

# ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΚΡΗΤΗΣ

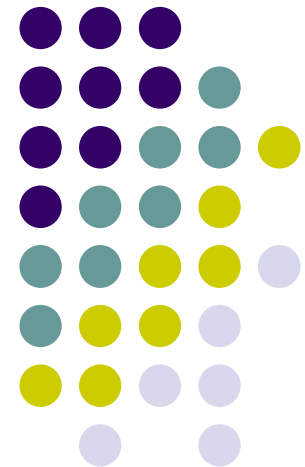
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΑΓΙΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΥ  
ΤΜΗΜΑ

Επιχειρηματικού Σχεδιασμού και  
Πληροφοριακών Συστημάτων

Μάθημα

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Παρουσιάσεις-Σημειώσεις



# Γραμμικός Προγραμματισμός

## Πρόβλημα μίξης της παραγωγής (product mix)



### Παράδειγμα: Μίξη παραγωγής στην ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

Η βιοτεχνία ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ παράγει δύο βασικά προϊόντα: τραπέζια και καρέκλες υψηλής ποιότητας. Η διαδικασία παραγωγής και για τα δύο προϊόντα περιλαμβάνει την επεξεργασία τους στα ίδια στάδια παραγωγής, αλλά απαιτεί διαφορετικές ώρες εργασίας για το κάθε προϊόν στα τρία τμήματα της επιχείρησης: το ξυλουργείο, το βαφείο και το στιλβωτήριο.

Το τμήμα παραγωγής της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ έχει τυποποιήσει τη διαδικασία κατασκευής των προϊόντων της και έχει προσδιορίσει το μέσο χρόνο εργασίας ανά παραγόμενη μονάδα σε κάθε τμήμα. Η κατασκευή κάθε τραπέζιού απαιτεί 8 ώρες εργασίας στο ξυλουργείο, 4 ώρες στο βαφείο και 4 ώρες στο στιλβωτήριο, ενώ αντίστοιχα οι ώρες που απαιτούνται για κάθε καρέκλα είναι 8 στο ξυλουργείο, 2 στο βαφείο και 3 στο στιλβωτήριο. Για τον επόμενο μήνα, ο υπεύθυνος παραγωγής έχει προσδιορίσει ότι οι διαθέσιμες ώρες εργασίας στο ξυλουργείο ανέρχονται συνολικά σε 960, στο βαφείο σε 400, ενώ στο στιλβωτήριο σε 420.

Από τα στοιχεία που διαθέτει η διεύθυνση οικονομικών υπηρεσιών της εταιρείας, προκύπτει ότι το μικτό κέρδος της επιχείρησης με βάση τις τρέχουσες τιμές πώλησης, ανέρχεται σε 140€ για κάθε τραπέζι και 100€ για κάθε καρέκλα.

## Πρόβλημα ζμίξης της παραγωγής (product mix)



*Το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ είναι ο καθορισμός των ποσοτήτων παραγωγής τραπεζιών και καρεκλών για τον επόμενο μήνα ώστε να πετύχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος (Στην απλοποιημένη αυτή μορφή του προβλήματος αγνοούμε προς το παρόν τυχών απόθεμα που μπορεί να υπάρχει, και υποθέτουμε ότι η ζήτηση για τα προϊόντα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ είναι ικανή να απορροφήσει την οποιαδήποτε ποσότητα θα παραχθεί).*

# Τα βήματα που θα ακολουθήσουμε ώστε να διατυπώσουμε το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ με τη μορφή ενός μαθηματικού μοντέλου



## *Καθορισμός των Μεταβλητών του προβλήματος*

➤ **Ως πρώτο βήμα** στη διαδικασία διατύπωσης του μοντέλου ΓΠ πρέπει να ορίσουμε τις **μεταβλητές απόφασης (decision variables)** του προβλήματος.

Όπως δηλώνει και το όνομα του, οι μεταβλητές του προβλήματος συμβολίζουν τα οικονομικά ή φυσικά μεγέθη τα οποία ο λήπτης αποφάσεων ενδιαφέρεται και είναι σε θέση να προσδιορίσει, και από τα οποία εξαρτάται το αποτέλεσμα που προσδοκά.

• **Στόχος της επιχείρησης είναι:** η μεγιστοποίηση του κέρδους που θα προκύψει από την πώληση των τραπεζιών και καρεκλών που θα κατασκευαστούν. Είναι προφανές ότι η ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ επιθυμεί να καθορίσει τις ποσότητες τραπεζιών και καρεκλών που πρέπει να κατασκευάσει έτσι ώστε να επιτύχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος.



➤ Χρησιμοποιώντας μαθηματικούς συμβολισμούς μπορούμε να ορίσουμε τις δύο μεταβλητές του προβλήματος ως εξής:

$X_1$  = αριθμός των τραπεζιών

$X_2$  = αριθμός των καρεκλών που θα κατασκευαστούν στη διάρκεια του μήνα.

#### Παράμετροι προβλήματος ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

Τμήμα Παραγωγής	Απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή 1 μονάδας		Διαθέσιμες ώρες σε κάθε τμήμα
	$X_1$ (τραπέζια)	$X_2$ (καρέκλες)	
Ευλουργείο	8 ώρες	8 ώρες	960 ώρες
Βαφείο	4 ώρες	2 ώρες	400 ώρες
Στιλβωτήριο	4 ώρες	3 ώρες	420 ώρες
Κέρδος ανά Μονάδα Προϊόντος	140€	100€	

## Το αποτέλεσμα - Η αντικειμενική συνάρτηση



- Το επόμενο βήμα στη διαμόρφωση του μαθηματικού μοντέλου του ΓΠ είναι: Η διατύπωση μιας μαθηματικής σχέσης που θα συνδέει τις μεταβλητές του προβλήματος με το αποτέλεσμα που επιδιώκουμε να βελτιστοποιήσουμε
- Στη συγκεκριμένη περίπτωση στόχος είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους της επιχείρησης
- Κάθε μονάδα από τα  $X_1$  (τραπέζια) αποφέρει κέρδος 140€.
  - το κέρδος (σε €) από την παραγωγή  $X_1$  τραπεζιών είναι  $140X_1$ .
  - το κέρδος από τα  $X_2$  τεμάχια καρεκλών είναι  $100X_2$ .
- Το συνολικό λοιπόν κέρδος της επιχείρησης από την παραγωγή  $X_1$  τραπεζιών και  $X_2$  καρεκλών είναι:

$$\text{Συνολικό κέρδος: } 140 X_1 + 100 X_2$$

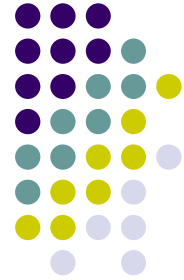
Η παραπάνω συνάρτηση κέρδους, την τιμή της οποίας επιδιώκουμε να μεγιστοποιήσουμε, καλείται **αντικειμενική συνάρτηση** του προβλήματος

# Η διαδικασία παραγωγής - Οι περιορισμοί του προβλήματος



- Κάθε αύξηση της παραγωγής (που μαθηματικά αντιστοιχεί σε αύξηση των τιμών των μεταβλητών  $X_1$  και  $X_2$ ) οδηγεί και σε αντίστοιχη αύξηση των κερδών
- Οι ποσότητες παραγωγής των δύο προϊόντων δεν μπορεί να αυξηθούν απεριόριστα, διότι οι διαθέσιμες ώρες εργασίας στα τμήματα ξυλουργείο, βαφείο και στιλβωτήριο είναι συγκεκριμένες και επομένως με την συνεχή αύξηση των ποσοτήτων παραγωγής θα εξαντληθούν
- Επομένως, οι διαθέσιμες ώρες εργασίας σε κάθε τμήμα περιορίζουν το πόσο μπορεί να αυξηθεί η παραγωγή

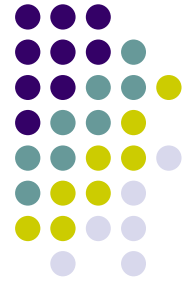
## Επόμενο βήμα: Η μαθηματική διατύπωση των περιορισμών του προβλήματος



- **Η έννοια των περιορισμών σε ένα πρόβλημα ΓΠ** είναι ότι:  
Περιγράφουν τις επιχειρησιακές και λειτουργικές συνθήκες με βάση τις οποίες καθορίζονται οι τιμές των μεταβλητών του προβλήματος
  
- **Στο συγκεκριμένο πρόβλημα**, οι περιορισμοί περιγράφουν τις συνθήκες παραγωγής των δυο προϊόντων στα τρία τμήματα τις επιχείρησης, όπου οι απαιτούμενες για την παραγωγή ώρες εργασίας σε κάθε τμήμα μπορεί να ξεπερνούν τις αντίστοιχες διαθέσιμες



συνέχεια...



Επομένως:

- Οι απαιτούμενες ώρες εργασίας στο ξυλουργείο για παραγωγή  $X_1$  τραπεζιών και  $X_2$  καρεκλών είναι:  $8X_1 + 8X_2$

- Οι διαθέσιμες ώρες εργασίας στο ξυλουργείο είναι: 960

- Συνεπώς ο περιορισμός που αφορά την επεξεργασία των δύο προϊόντων στο ξυλουργείο μπορεί να διατυπωθεί με την εξής μαθηματική σχέση:

$$\begin{array}{l} \text{Περιορισμός Ξυλουργείου (Ξ):} \\ \text{(απαιτούμενες ώρες} \leq \text{διαθέσιμες)} \end{array} \quad 8X_1 + 8X_2 \leq 960$$

- Οι περιορισμοί που αφορούν την επεξεργασία των δύο προϊόντων στο βαφείο και στο στιλβωτήριο ορίζονται με τον ίδιο τρόπο ως εξής:

$$\begin{array}{l} \text{Περιορισμός Βαφείου (Β):} \\ \text{(απαιτούμενες ώρες} \leq \text{διαθέσιμες)} \end{array} \quad 4X_1 + 2X_2 \leq 400$$

$$\begin{array}{l} \text{Περιορισμός Στιλβωτηρίου (Σ):} \\ \text{(απαιτούμενες ώρες} \leq \text{διαθέσιμες)} \end{array} \quad 4X_1 + 3X_2 \leq 420$$

# Το μοντέλο ΓΠ της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ



Η πλήρης διατύπωση του προβλήματος της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ σε μοντέλο Γραμμικού Προγραμματισμού έχει ως εξής:

Μεγιστοποίηση Συνολικού κέρδους:  $140 X_1 + 100 X_2$

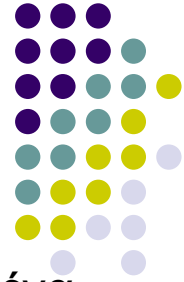
υπό τους περιορισμούς:

$8X_1 + 8X_2$	$\leq$	960	Περιορισμός Ξυλουργείου
$4X_1 + 2X_2$	$\leq$	400	Περιορισμός Βαφείου
$4X_1 + 3X_2$	$\leq$	420	Περιορισμός Στιλβωτηρίου
$X_1 \geq 0$			
$X_2 \geq 0$			

Οι δύο τελευταίοι περιορισμοί δηλώνουν ότι οι μεταβλητές  $X_1$  και  $X_2$  μπορούν να λάβουν μόνο θετικές τιμές, προφανώς εφόσον εκφράζουν ποσότητες παραγωγής, κάτι που όμως πρέπει να συμπεριληφθεί στη διατύπωση του αντίστοιχου μαθηματικού μοντέλου

Το πρόβλημα έχει μετατραπεί από ένα διοικητικό - οικονομικό πρόβλημα, σε ένα καθαρά μαθηματικό πρόβλημα

## Γραφική Μέθοδος Επίλυσης Προβλημάτων ΓΠ



- Η εφαρμογή της γραφικής μεθόδου που περιγράφεται είναι δυνατή μόνο σε προβλήματα ΓΠ με δύο μεταβλητές ώστε να είναι δυνατή η απεικόνιση τους σε ένα σύστημα αξόνων  $X_1$  και  $X_2$ .
- Όταν υπάρχουν περισσότερες από δύο μεταβλητές (όπως συμβαίνει σε όλα τα πραγματικά προβλήματα) η εφαρμογή της γραφικής μεθόδου δεν είναι δυνατή και η επίλυση των προβλημάτων γίνεται με την αλγοριθμική μέθοδο Simplex.

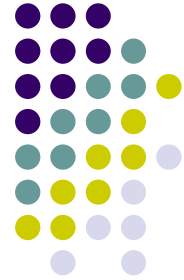
### Εφικτές Λύσεις

Το πρώτο βήμα στη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος ΓΠ είναι ο προσδιορισμός των εφικτών λύσεων.

➤ **Μια λύση καλείται εφικτή** όταν δεν παραβιάζει κανέναν από τους περιορισμούς του προβλήματος.

Σε επιχειρησιακούς όρους μία εφικτή λύση αντιπροσωπεύει μία από τις πολλές εναλλακτικές επιλογές τιμών για τις μεταβλητές αποφάσεων, η οποία είναι δυνατό να υλοποιηθεί με τα μέσα/πόρους που διατίθενται.

## Το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ



• Μία λύση για το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ περιλαμβάνει τον προσδιορισμό δύο τιμών:

• την ποσότητα των τραπεζιών ( $X_1$ ) και

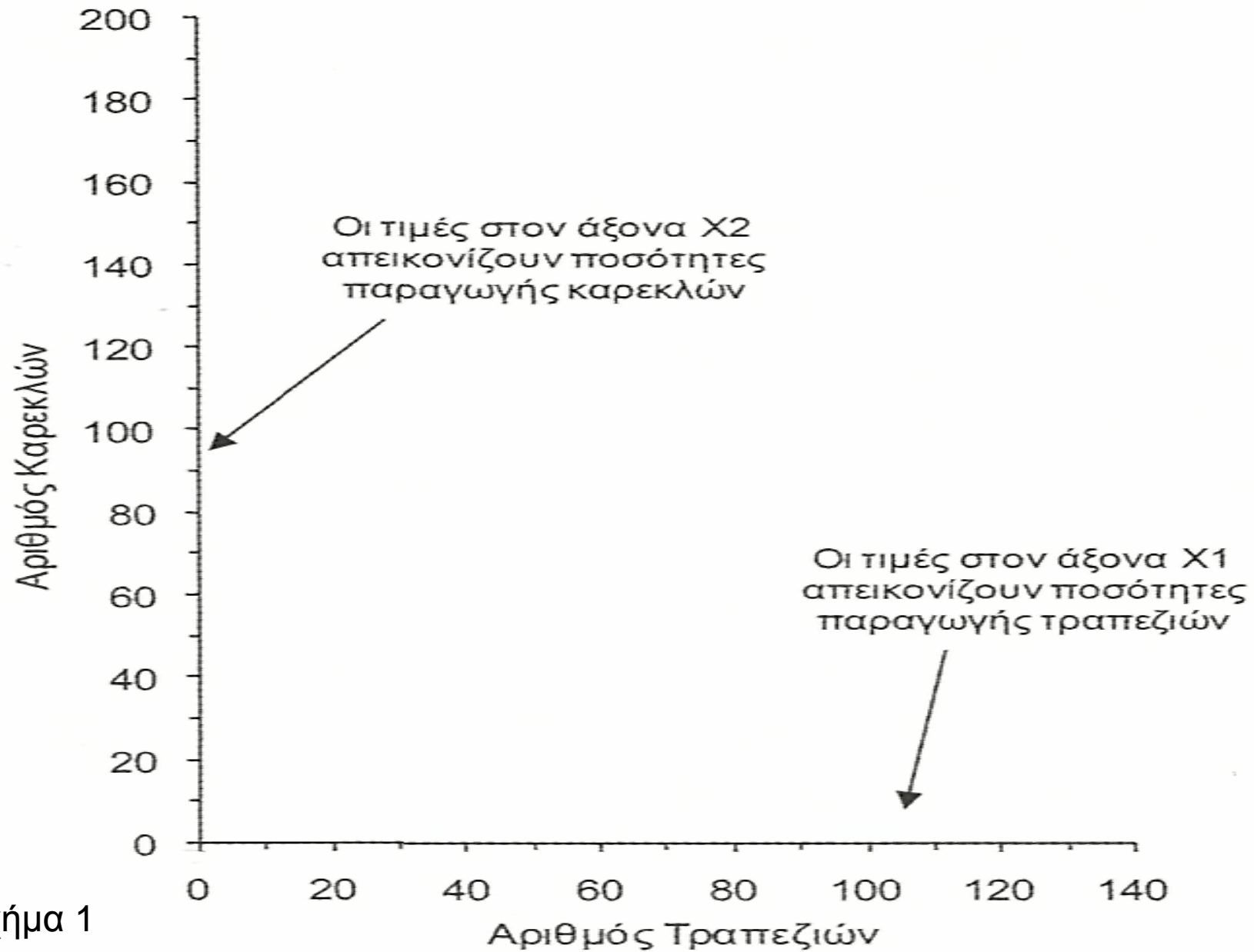
• την ποσότητα των καρεκλών ( $X_2$ ) που θα κατασκευασθούν

• Οι δύο μεταβλητές μπορεί να απεικονιστούν γραφικά σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων, έτσι ώστε η μεταβλητή  $X_1$  (τραπέζια) να απεικονίζεται στον οριζόντιο άξονα και η μεταβλητή  $X_2$  (καρέκλες) να απεικονίζεται στον κατακόρυφο άξονα.

• Μας ενδιαφέρουν μόνο οι μη αρνητικές τιμές των  $X_1$  και  $X_2$ .

• Σε μαθηματικούς όρους, αυτό σημαίνει ότι σε ένα σύστημα αξόνων  $X_1$  και  $X_2$  οι τιμές των μεταβλητών περιορίζονται στο πρώτο τεταρτημόριο (βλέπε στο ακόλουθο σχήμα).

## Απεικόνιση των Μεταβλητών $X_1$ και $X_2$



Σχήμα 1

## Γραφική Παράσταση περιορισμών



• Για τη γραφική παράσταση του πρώτου περιορισμού του προβλήματος (Ξυλουργείο) σε γραφική μορφή στο ορθογώνιο σύστημα των αξόνων, πρέπει αρχικά να θεωρήσουμε την αντίστοιχη ανισότητα ως ισότητα

$$(\Xi): \quad 8X_1 + 8X_2 = 960$$

• Μια γραμμική εξίσωση με δύο μεταβλητές παριστάνει μία ευθεία γραμμή στο σύστημα αξόνων  $X_1$ - $X_2$ .

• Ο πιο εύκολος τρόπος να χαράξουμε την ευθεία γραμμή είναι να βρούμε δύο σημεία από τα οποία διέρχεται.

• Όταν δεν παράγουμε καθόλου τραπέζια ( $X_1 = 0$ ), για να εξαντλήσουμε όλες τις διαθέσιμες ώρες στο ξυλουργείο θα πρέπει να παράγουμε 120 καρέκλες: ( $8(0) + 8X_2 = 960 \Rightarrow 8X_2 = 960 \Rightarrow X_2 = 960/8 = 120$ ).

Επομένως το σημείο  $X_1=0$ ,  $X_2=120$  είναι ένα σημείο από το οποίο διέρχεται η ευθεία  $8X_1 + 8X_2 = 960$ .

Ομοίως, όταν δεν παράγουμε καθόλου καρέκλες ( $X_2 = 0$ ), για να εξαντλήσουμε όλες τις διαθέσιμες ώρες στο ξυλουργείο θα πρέπει να παράγουμε 120 τραπέζια ( $8X_1 + 8(0) = 960 \Rightarrow X_1 = 960/8 = 120$ ).



- Το σημείο  $X_1=120$ ,  $X_2=0$  είναι ένα δεύτερο σημείο της ευθείας.
- Η ευθεία που αντιστοιχεί στον περιορισμό των ωρών εργασίας στο ξυλουργείο διέρχεται από τα σημεία  $(0,120)$  και  $(120,0)$  και απεικονίζεται γραφικώς στο σχήμα α.
- Στο σχήμα α παρατηρούμε την ευθεία γραμμή που αντιπροσωπεύει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς παραγωγής καρεκλών και τραπεζιών που αναλώνουν τη συνολική διαθέσιμη ποσότητα των 960 ωρών στο ξυλουργείο
- Ο αρχικός περιορισμός του προβλήματος δήλωνε ότι οι ώρες που θα αναλωθούν στην παραγωγή δεν μπορεί να ξεπερνούν τις 960
- Επομένως, οποιοδήποτε σημείο που βρίσκεται είτε πάνω στην ευθεία γραμμή είτε στην περιοχή κάτω από αυτήν, αντιπροσωπεύει ένα συνδυασμό παραγωγής που δεν απαιτεί περισσότερες από 960 ώρες στο ξυλουργείο.



Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να προσδιορίσουμε τα σημεία που ικανοποιούν το δεύτερο περιορισμό του προβλήματος (Βαφείο). Επαναλαμβάνοντας την ανάλυση και θεωρώντας την ανισότητα του δεύτερου περιορισμού ως ισότητα, έχουμε:

(B):  **$4X_1 + 2X_2 = 400$ .**

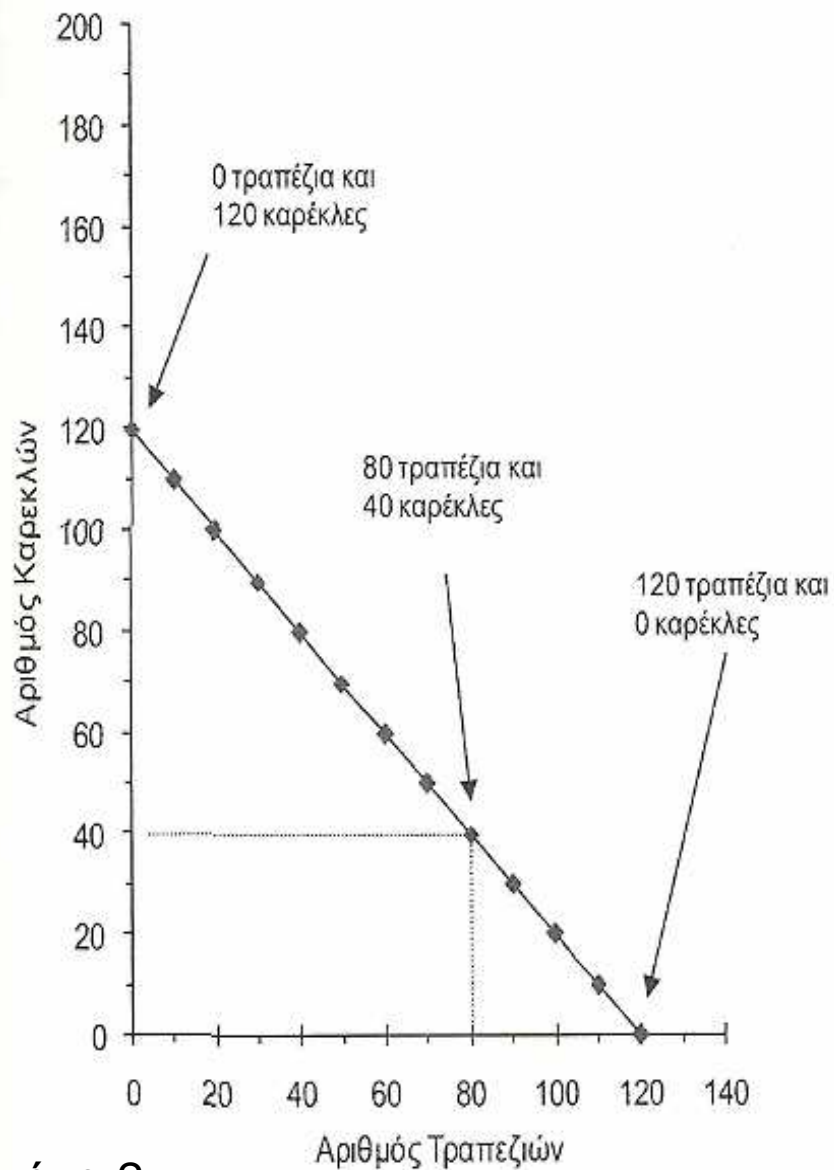
Στην περίπτωση που δεν παράγουμε καθόλου τραπέζια ( $X_1 = 0$ ) για να εξαντλήσουμε όλες τις διαθέσιμες ώρες στο βαφείο θα πρέπει να παράγουμε 200 καρέκλες:

$$(4(0) + 2X_2 = 400 \Rightarrow 2X_2 = 400 \Rightarrow X_2 = 400/2 = 200).$$

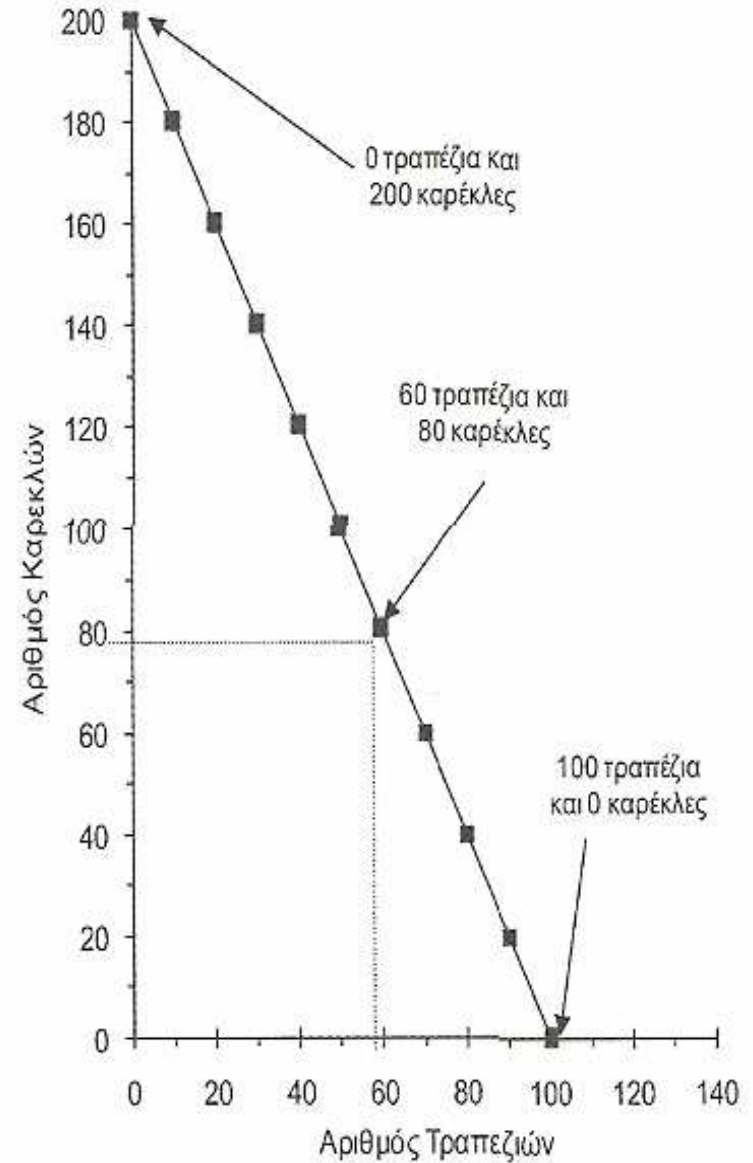
Ομοίως, όταν δεν παράγουμε καθόλου καρέκλες ( $X_2 = 0$ ) για να εξαντλήσουμε όλες τις διαθέσιμες ώρες στο βαφείο, θα πρέπει να παράγουμε 100 τραπέζια ( $X_1 = 400/4 = 100$ ). Ο περιορισμός των ωρών στο βαφείο απεικονίζεται γραφικώς στο σχήμα β.



### Περιορισμός Ωρών Ξυλουργείου



### Περιορισμός Ωρών Βαφείου



Σχήμα 2

α. Περιορισμός Ξυλουργείου

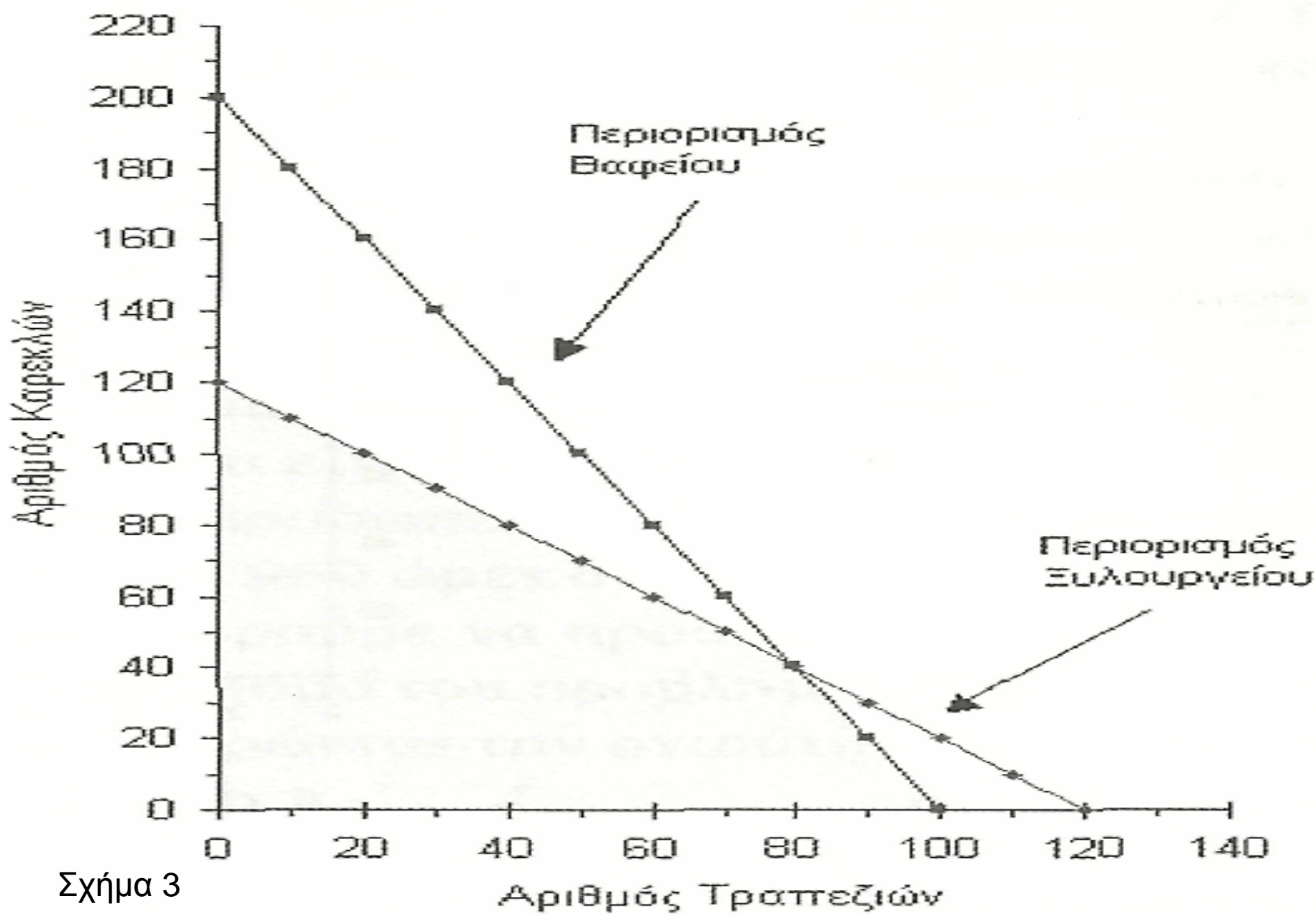
β. Περιορισμός Βαφείου



•Ας δούμε ποιοι συνδυασμοί παραγωγής ικανοποιούν και τους δύο περιορισμούς ταυτόχρονα, δηλαδή να απαιτούν το πολύ 960 ώρες εργασίας στο ξυλουργείο και 400 ώρες εργασίας στο βαφείο

•**Τοποθετώντας και τους δύο περιορισμούς στο ίδιο γράφημα, το αποτέλεσμα είναι η περιοχή που βρίσκεται εντός και των δύο περιορισμών**, δηλαδή η σκιασμένη περιοχή του σχήματος 3 που αντιπροσωπεύει την περιοχή των λύσεων που δεν απαιτούν περισσότερες από 960 ώρες στο ξυλουργείο και 400 ώρες στο βαφείο αντίστοιχα.

# Περιορισμοί Ξυλουργείου και Βαφείου ταυτόχρονα



Σχήμα 3



- Υπάρχει όμως και ένας τρίτος περιορισμός του προβλήματος, αυτός που αφορά τις διαθέσιμες ώρες στο σπιλβωτήριο
- Όλα τα σημεία της σκιασμένης περιοχής του σχήματος 3 δεν είναι σίγουρο ότι θα ικανοποιούν και τον τρίτο περιορισμό.
- Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία και θεωρώντας την ανισότητα του τρίτου περιορισμού ως ισότητα, έχουμε:

**(Σ):  $4X_1+3X_2=420$**

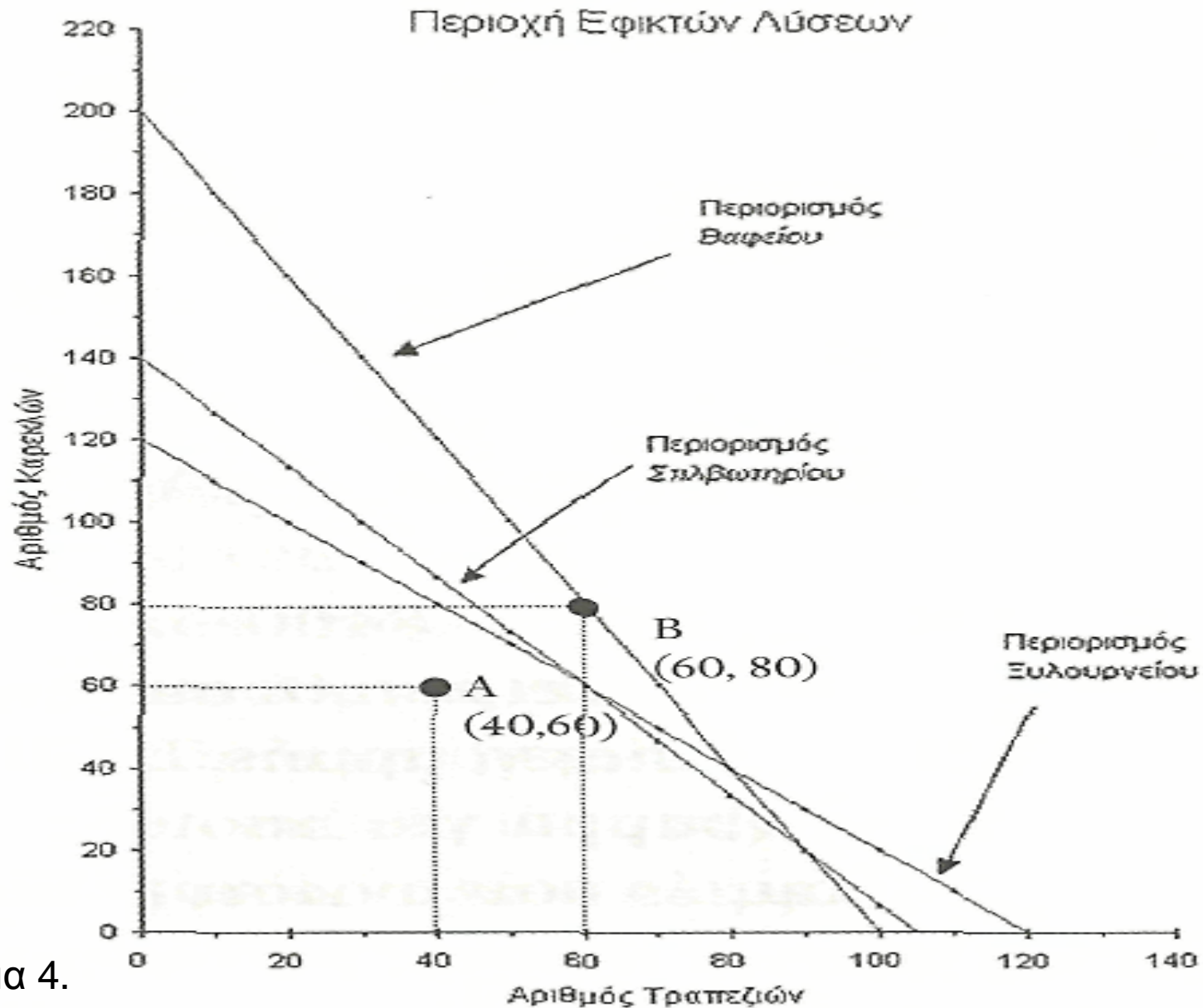
Στην περίπτωση που δεν παράγουμε καθόλου τραπέζια ( $X_1 = 0$ ), για να εξαντλήσουμε τις διαθέσιμες ώρες στο σπιλβωτήριο θα πρέπει να παράγουμε 140 καρέκλες:

$$(4(0) + 3X_2 = 420 \Rightarrow 3X_2 = 420 \Rightarrow X_2 = 420/3 = 140).$$

Ομοίως, όταν δεν παράγουμε καθόλου καρέκλες ( $X_2 = 0$ ), για να εξαντλήσουμε όλες τις διαθέσιμες ώρες στο σπιλβωτήριο θα πρέπει να παράγουμε 105 τραπέζια:

$$(X_1=420/4=105).$$

Θέτοντας και τον περιορισμό του σιλβωτηρίου στο ίδιο γράφημα με τους άλλους δύο περιορισμούς



Σχήμα 4.



## Περιοχή εφικτών λύσεων

- Η σκιασμένη περιοχή του Σχήματος 4, στην οποία περιέχονται όλες οι λύσεις που ικανοποιούν ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς του προβλήματος, καλείται περιοχή εφικτών λύσεων.
- Κάθε σημείο που βρίσκεται εκτός της περιοχής των εφικτών λύσεων αντιπροσωπεύει λύση που δεν είναι εφικτή, δηλαδή ένα συνδυασμό παραγωγής τραπεζιών και καρεκλών που δεν είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί, διότι απαιτεί περισσότερες από τις διαθέσιμες ώρες στο ένα τουλάχιστον από τα τρία τμήματα παραγωγής.

*Η παραγωγή 40 τραπεζίων και 60 καρεκλών είναι εφικτή διότι το σημείο A (40,60) βρίσκεται μέσα στην περιοχή των εφικτών λύσεων, ενώ αντίθετα δεν είναι εφικτή η παραγωγή 60 τραπεζίων και 80 καρεκλών διότι το αντίστοιχο σημείο B είναι εκτός της περιοχής των εφικτών λύσεων (σχήμα 4).*

## Προσδιορισμός Βέλτιστης Λύσης



Βέλτιστη λύση ενός προβλήματος ΓΠ είναι εκείνη η λύση η οποία είναι καταρχήν εφικτή και η οποία βελτιστοποιεί (δίνει δηλαδή τη μέγιστη ή ελάχιστη τιμή αντίστοιχα) την αντικειμενική συνάρτηση.

Έχοντας προσδιορίσει την περιοχή των εφικτών λύσεων στο συγκεκριμένο πρόβλημα (σχήμα 4).

Ας εξετάσουμε τη διαδικασία με την οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε γραφικά ποια από τις εφικτές λύσεις αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο κέρδος, δηλαδή τη βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Ας ξεκινήσουμε με το να προσδιορίσουμε λύσεις που αποφέρουν ένα προκαθορισμένο σταθερό κέρδος.

Ας επιλέξουμε τυχαία ένα συγκεκριμένο επίπεδο κέρδους, για παράδειγμα 8.400€.

Υπάρχουν εφικτές λύσεις που αντιστοιχούν σε κέρδος 8.400€ και ποιες είναι αυτές;

Η απάντηση προφανώς είναι όλες οι λύσεις που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$140X_1 + 100X_2 = 8400.$$



- Όλες οι λύσεις που δίνουν στην αντικειμενική συνάρτηση την τιμή 8400 παριστάνονται με τα σημεία μίας ευθείας γραμμής
- Είναι προφανές ότι μπορούμε να χαράξουμε μία ευθεία γραμμή για οποιοδήποτε συγκεκριμένο επίπεδο κέρδους
- Οι ευθείες γραμμές που αντιστοιχούν σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο κέρδους ονομάζονται **ισοσταθμικές (ή ισοβαρείς)** ευθείες κέρδους
- Η συγκεκριμένη ισοσταθμική ευθεία κέρδους μπορεί να οριστεί από τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες: θέτοντας  $X_1=0$ , προκύπτει  $X_2=84$ , και αντίστοιχα θέτοντας
- $X_2=0$ , προκύπτει  $X_1=60$  (Σχήμα 5).





- Κάθε σημείο που βρίσκεται πάνω από μία ισοσταθμική αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη τιμή κέρδους

### **Αντίθετα**

- Σημεία που βρίσκονται κάτω της ευθείας αντιστοιχούν σε μικρότερες τιμές.
- Προφανώς τα σημεία της ισοσταθμικής των 8.400 δεν παράγουν τη μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, δεν αντιστοιχούν δηλαδή σε συνδυασμούς παραγωγής που θα έδιναν το μεγαλύτερο κέρδος στην επιχείρηση
- Αυτό προκύπτει από την εξέταση του σχήματος 5, όπου μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν σημεία μέσα στην περιοχή εφικτών λύσεων που βρίσκονται πάνω από τη συγκεκριμένη ισοσταθμική ευθεία και επομένως αντιστοιχούν σε επίπεδο κέρδους μεγαλύτερο από 8.400.



•Θεωρώντας μια τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης μεγαλύτερη των 8400,

π.χ την τιμή 11.200

μπορούμε να χαράξουμε μια δεύτερη ισοσταθμική ευθεία κέρδους που αντιστοιχεί στην εξίσωση της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$140X_1 + 100X_2 = 11200.$$

η οποία, όπως διακρίνουμε στο Σχήμα 5, διέρχεται από τα σημεία (0,112) και (80,0). (θέτοντας  $X_1=0$ , προκύπτει  $X_2=112$ , και αντίστοιχα θέτοντας  $X_2=0$ , έχουμε  $X_1=80$ ).



Παρατηρούμε ότι :

- Αυξάνοντας κάθε φορά την τιμή της αντικειμενικά συνάρτησης, παίρνουμε μια νέα ισοσταθμική ευθεία κέρδους παράλληλη με την αρχική (διότι οι συντελεστές του  $X_1$  και  $X_2$  που καθορίζουν την κλίση της ευθείας παραμένουν οι ίδιοι) και η οποία βρίσκεται πιο πάνω από την προηγούμενη.

Μετακινώντας επομένως την ισοσταθμική ευθεία κέρδους προς τα πάνω, και διατηρώντας την ταυτόχρονα παράλληλη προς την αρχική της θέση, επιτυγχάνουμε μεγαλύτερες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης.

Σε κάθε νέα θέση παίρνουμε μια νέα ισοσταθμική ευθεία κέρδους (σχήμα 5)

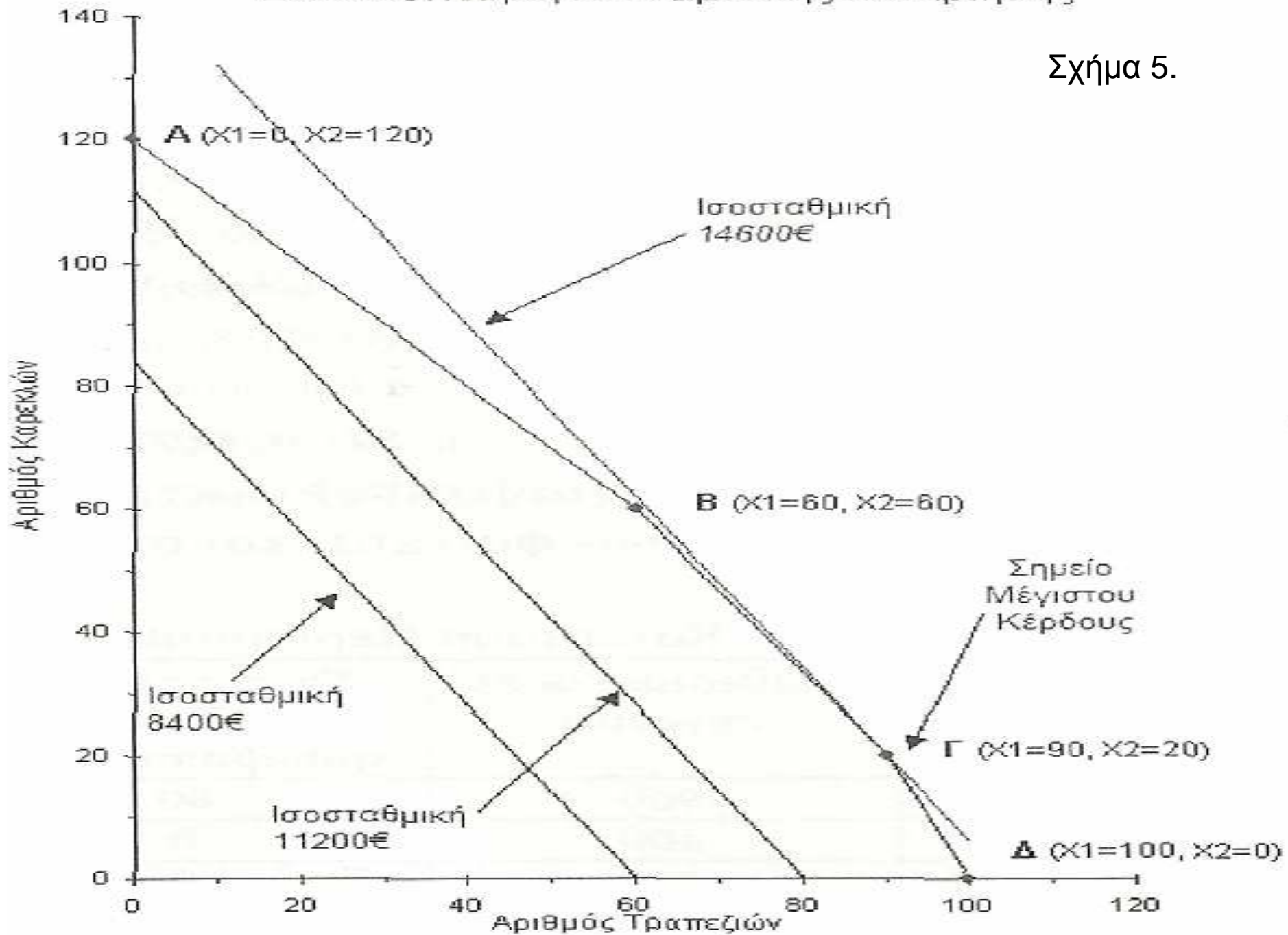
### **Εφόσον λοιπόν στόχος είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους**

Θα πρέπει να μετακινήσουμε την ισοσταθμική ευθεία όσο πιο ψηλά είναι δυνατόν, χωρίς όμως να ξεφύγει από τα όρια της περιοχής των εφικτών λύσεων

Όταν καταλήξουμε στο σημείο όπου η ευθεία του κέρδους δεν είναι δυνατό να μετακινηθεί ψηλότερα, γιατί θα βρεθεί πλέον εκτός της περιοχής των εφικτών λύσεων, τότε έχουμε επιτύχει τη μέγιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.

# Βελτιστοποίηση Αντικειμενικής Συνάρτησης

Σχήμα 5.





Ποιο είναι το τελευταίο σημείο (ή σημεία) της περιοχής των εφικτών λύσεων από τα οποία θα διέλθει μία ισοσταθμική ευθεία;

Προφανώς στην περίπτωση του συγκεκριμένου παραδείγματος είναι το σημείο Γ της περιοχής των εφικτών λύσεων.

Αυτό είναι και το σημείο στο οποίο μεγιστοποιείται και το συνολικό κέρδος, διότι κάθε άλλη ισοσταθμική ευθεία που θα αντιστοιχούσε σε μεγαλύτερο κέρδος, θα βρισκονταν έξω από την περιοχή των εφικτών λύσεων (Σχήμα 5)



## Μεταβλητές απόφασης

• Η κορυφή Γ της περιοχής των εφικτών λύσεων αντιστοιχεί στο σημείο ( $X_1=90$ ,  $X_2=20$ ). Επομένως, ο συνδυασμός παραγωγής που οδηγεί στην επίτευξη του μεγαλύτερου κέρδους είναι η παραγωγή 90 τραπεζιών και 20 καρεκλών.

## Αντικειμενική συνάρτηση

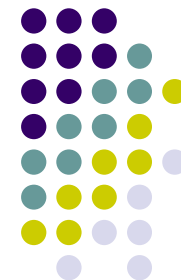
• Το κέρδος που προκύπτει μπορεί να υπολογιστεί με αντικατάσταση των τιμών  $X_1=90$  και  $X_2=20$  της βέλτιστης λύσης στην αντικειμενική συνάρτηση:

$$\text{Βέλτιστο κέρδος} = 140(90) + 100(20) = 14.600\text{€}$$

## Περιορισμοί

• Η επιχείρηση είχε στη διάθεση της στα τρία τμήματα (Ξυλουργείο, Βαφείο και Στιλβωτήριο) 960, 400 και 420 ώρες εργασίας αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας τις τιμές  $X_1=90$  και  $X_2=20$  σε κάθε περιορισμό μπορούμε να υπολογίσουμε σε ποια τμήματα εξαντλήθηκαν όλες οι διαθέσιμες ώρες εργασίας και σε ποια όχι, όπως φαίνεται και στον πίνακα

Τμήμα	Απαιτούμενες ώρες εργασίας	Διαθέσιμες ώρες εργασίας	Ώρες εργασίας που δεν χρησιμοποιούνται	Είδος περιορισμού
Ξ	$8(90) + 8(20) = 880$	960	80	Μη δεσμευτικός
Β	$4(90) + 2(20) = 400$	400	0	Δεσμευτικός
Σ	$4(90) + 3(20) = 420$	420	0	Δεσμευτικός



- Οι περιορισμοί του Βαφείου και Στιλβωτηρίου χαρακτηρίζονται **δεσμευτικοί**, διότι στα αντίστοιχα τμήματα εξαντλούνται όλες οι διαθέσιμες ποσότητες πόρων (ωρών εργασίας)
- Αυτό φαίνεται και στο Σχήμα 5. όπου το σημείο Γ της βέλτιστης λύσης προσδιορίζεται από την τομή των ευθειών των δύο περιορισμών (Βαφείου και Στιλβωτηρίου), ενώ σε σχέση με την ευθεία του περιορισμού του Ξυλουργείου, το σημείο Γ βρίσκεται κάτω από αυτή, επομένως δεν αναλώνει όλη τη διαθέσιμη ποσότητα των 960 ωρών εργασίας στο Ξυλουργείο.