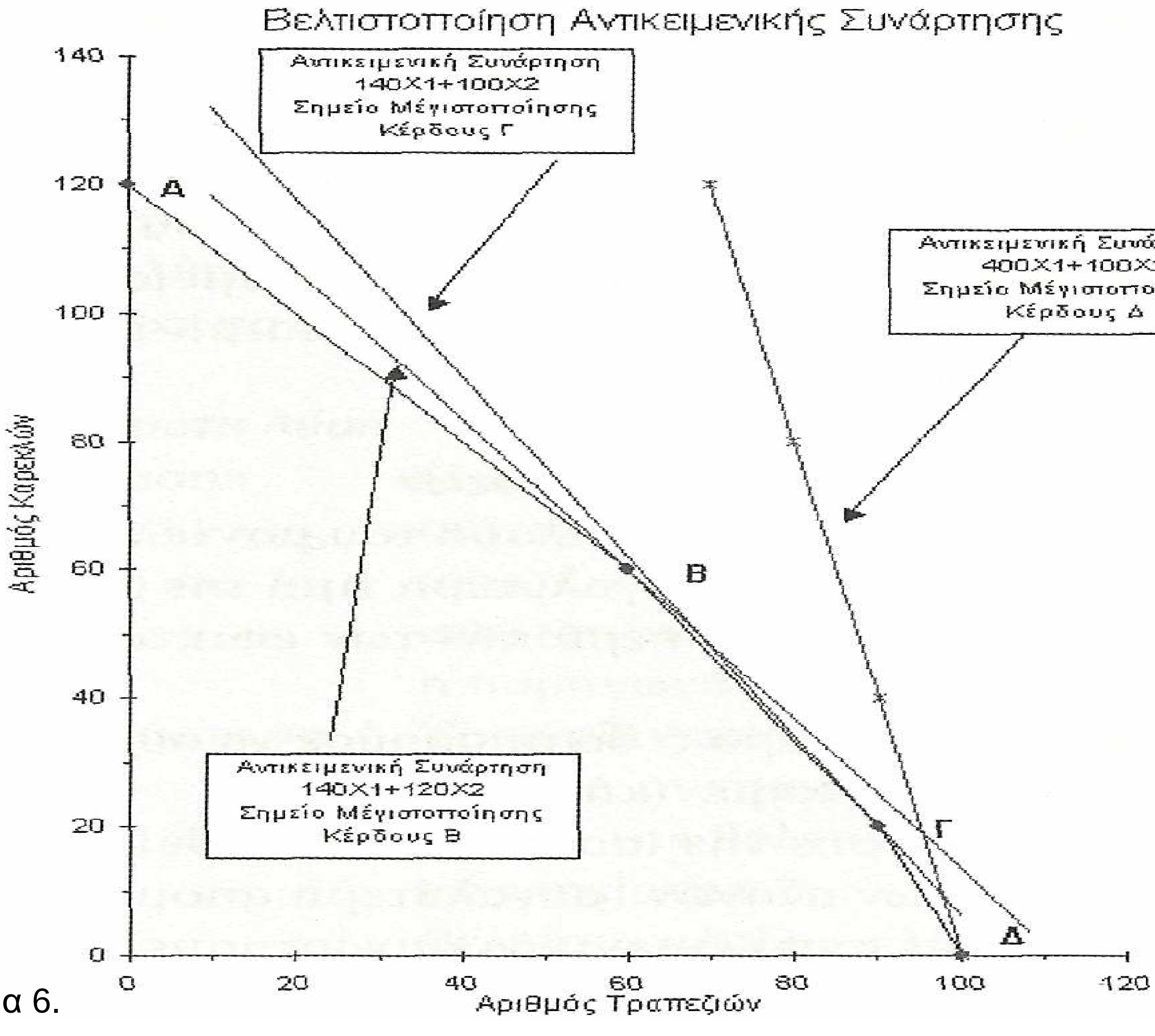
Τα ακραία σημεία της περιοχής των εφικτών λύσεων

- Από τη γραφική επίλυση του μοντέλου του ΓΠ, η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει τη μεγαλύτερη τιμή της (βέλτιστη λύση του προβλήματος) στην κορυφή Γ της περιοχής των εφικτών λύσεων (Σχήμα 5).

Ας εξετάσουμε όμως γενικότερα τι θα μπορούσε να συμβεί στην προσπάθεια μεγιστοποίησης της αντικειμενικής συνάρτησης

- Στη διαδικασία μετακίνησης της ισοσταθμικής ευθείας όσο το δυνατόν μακρύτερα από την αρχή των αξόνων (μεγαλύτερη απομάκρυνση αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης), το τελευταίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων από το οποίο μπορεί να διέλθει μια ισοσταθμική ευθεία είναι μία από τις κορυφές της περιοχής των εφικτών λύσεων Α, Β, Γ ή Δ. Το ποια ακριβώς από αυτές τις κορυφές ορίζει το σημείο που δίνει τη βέλτιστη τιμή του κέρδους, εξαρτάται από την κλίση της ισοσταθμικής ευθείας.

- Επομένως: **Η βέλτιστη λύση καθορίζεται πάντοτε από μία <u>κορυφή</u> της περιοχής των εφικτών λύσεων**


Βελτιστοποίηση Αντικειμενικής Συνάρτησης
Αντικειμενική Συνάρτηση
140X1+100X2
Σημείο Μέγιστοποίησης
Κέρδους Γ
Αντικειμενική Συνάρτηση
400X1+100X2
Σημείο Μέγιστοποίησης
Κέρδους Δ
Αντικειμενική Συνάρτηση
140X1+120X2
Σημείο Μέγιστοποίησης
Κέρδους Β
Α
Β
Γ
Δ
Αριθμός Καρεκλών
Αριθμός Τραπεζιών
0
20
40
60
80
100
120
140

Σχήμα 6.

➢Αν <u>η κλίση της ευθείας της αντικειμενικής συνάρτησης</u> ήταν λίγο μικρότερη:

- ➢το τελευταίο σημείο της περιοχής εφικτών λύσεων που θα μπορούσε να διέλθει η ισοσταθμική ευθεία θα ήταν το σημείο Β

➢Αντίθετα, <u>αν η κλίση ήταν μεγαλύτερη</u>:

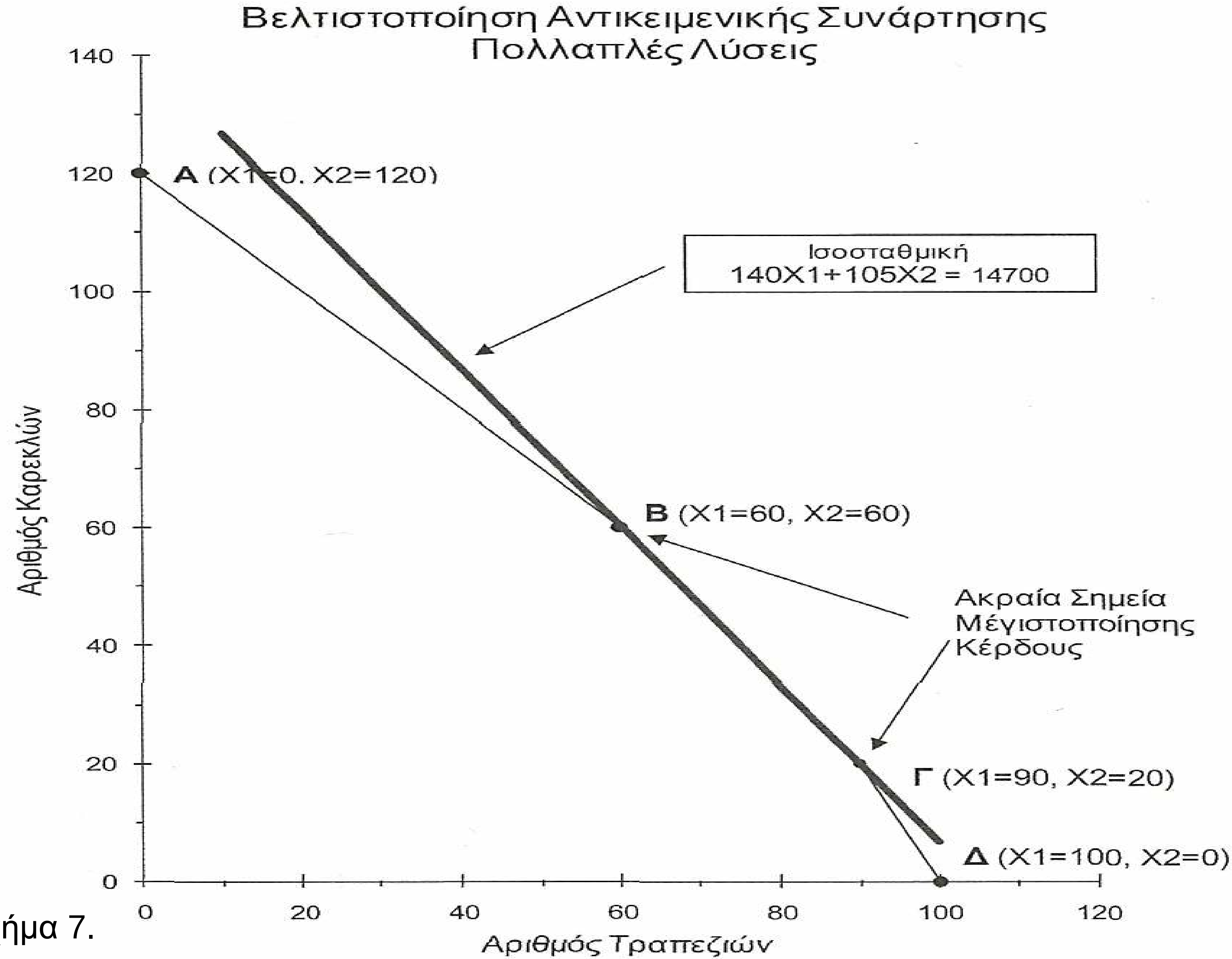
- ➢ αυτό θα ήταν το σημείο Δ (Σχήμα 6).

➢**<u>Η κλίση της ισοσταθμικής ευθείας καθορίζεται όμως από τους συντελεστές κέρδους των μεταβλητών X_1 και X_2</u>**.

Έτσι:

•*αν ο συντελεστής κέρδους για τις καρέκλες ήταν 120 αντί της αρχικής τιμής των 100, τότε η ισοσταθμική ευθεία θα είχε μικρότερη κλίση και το τελευταίο σημείο της εφικτής περιοχής από το οποίο θα περνούσε θα ήταν το σημείο Β.*

•*Αντίθετα, αν το κέρδος για τα τραπέζια ήταν 400 και το κέρδος για τις καρέκλες 100 δραχμές, η κλίση της ισοκερδούς ευθείας θα ήταν πολύ μεγαλύτερη,* και *επομένως το τελευταίο σημείο από το οποίο θα περνούσε θα ήταν το σημείο Δ (Σχήμα 6.)*



Βελτιστοποίηση Αντικειμενικής Συνάρτησης
Πολλαπλές Λύσεις
Α (X1=0, X2=120)
Ισοσταθμική
140X1+105X2 = 14700
Β (X1=60, X2=60)
Ακραία Σημεία
Μέγιστοποίησης
Κέρδους
Γ (X1=90, X2=20)
Δ (X1=100, X2=0)
Αριθμός Καρεκλών
Αριθμός Τραπεζιών
0
20
40
60
80
100
120
140

Σχήμα 7.

•Όταν η κλίση της ισοσταθμικής ευθείας είναι η ίδια με την κλίση της ευθείας που αντιπροσωπεύει έναν από τους περιορισμούς του προβλήματος, η τελευταία θέση της ισοσταθμικής ευθείας πριν βρεθεί εκτός της περιοχής των εφικτών λύσεων θα ταυτίζεται με την ευθεία του αντίστοιχου περιορισμού (Σχήμα 7).

• Σε αυτή την περίπτωση, κάθε σημείο της ευθείας αποτελεί μία βέλτιστη λύση του προβλήματος.

Ας υποθέσουμε ότι στο παράδειγμα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ, οι συντελεστές κέρδους για τις καρέκλες και τα τραπέζια ήταν 140 και 105 αντίστοιχα, με την αντικειμενική συνάρτηση να ορίζεται ως $140X_1+105X_2$.

Η κλίση της ευθείας της αντικειμενικής συνάρτησης είναι ίδια με την κλίση του περιορισμού των ωρών του Στιλβωτηρίου (140/105=4/3), επομένως η τελευταία θέση της ευθείας της αντικειμενικής συνάρτησης ***θα συνέπιπτε με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ*** *(Βλέπε Σχήμα 7).*

Στην περίπτωση αυτή:

Τόσο το σημείο Β (60 τραπέζια και 60 καρέκλες) όσο και το σημείο Γ (90 τραπέζια και 20 καρέκλες) αλλά και κάθε άλλο σημείο που βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ, αντιστοιχεί σε κέρδος 14.700€.

➢ **<u>Η βέλτιστη λύση θα μπορούσε να βρεθεί</u>** από την επίλυση όλων των συστημάτων εξισώσεων που ορίζονται σε κάθε ακραίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων από τους περιορισμούς που διέρχονται από το αντίστοιχο σημείο, και υπολογισμό της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης σε κάθε σημείο ώστε να προσδιορισθεί το σημείο που αντιστοιχεί στη μέγιστη τιμή.

Έλεγχος της Βέλτιστης Λύσης - Ανατροφοδότηση

➢Η λύση που προκύπτει εξαρτάται από τις παραδοχές που έγιναν στην απεικόνιση του πραγματικού επιχειρησιακού προβλήματος στο μαθηματικό μοντέλο

➢Πραγματικές συνθήκες που δεν απεικονίζονται στο μαθηματικό μοντέλο επειδή ίσως θεωρούνται προφανείς, απλοποιήσεις σύνθετων πραγματικών καταστάσεων, ελλείψείς και παραβλέψείς στη διατύπωση των περιορισμών, μπορεί να οδηγήσουν σε λύσεις που να μην είναι υλοποιήσιμες στην πράξη ή να μην είναι συμβατές με τα συγκεκριμένα επιχειρηματικά ή επιχειρησιακά δεδομένα του προβλήματος

➢Ένας άλλος παράγοντας που μπορεί επίσης να προκαλέσει προβλήματα στην υλοποίηση της λύσης του μαθηματικού μοντέλου είναι ανακριβή δεδομένα σε ό,τι αφορά τις παραμέτρους του προβλήματος.

Πριν από την υλοποίηση της βέλτιστης λύσης, η λύση ελέγχεται ως προς τη δυνατότητα εφαρμογής της και αν χρειαστεί, ακολουθείται μια διαδικασία αναθεώρησης του μαθηματικού μοντέλου ή των δεδομένων και παραμέτρων του.

Ας εξετάσουμε την περίπτωση της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ. Η Λύση που προέκυψε από την επίλυση του μοντέλου του γραμμικού προγραμματισμού προβλέπει ότι η μεγιστοποίηση του κέρδους της επιχείρησης προκύπτει από την παραγωγή 90 τραπεζιών και 20 καρεκλών.
Είναι η Βέλτιστη Λύση του μαθηματικού μοντέλου αποδεκτή με επιχειρηματικούς όρους; Εκτός και αν υπάρχουν ειδικές συνθήκες στην αγορά, είναι πολύ δύσκολο να δεχθεί κανείς ότι η ΕΠΙΠΛΟΞΥΑ θα μπορούσε να διαθέσει στην αγορά 90 τραπέζια και μόλις 20 καρέκλες, δεδομένου ότι συνήθως ένα τραπέζι συνοδεύεται και από έναν πολλαπλάσιο αριθμό καρεκλών.
Η παραπάνω όμως παραδοχή, προφανής μεν, αγνοήθηκε στη διατύπωση του μοντέλου του ΓΠ. Έτσι το μαθηματικό μοντέλο δεν απεικόνιζε με πιστότητα την πραγματική κατάσταση.
Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι ο υπεύθυνοι παραγωγής τη$ ΕΠΙΠΑΟΞΥΛ διαπιστώνονται το πρόβλημα που προέκυψε, ζητά από το τμήμα πωλήσεων της επιχείρησης, πληροφορίες για τη σχέση μεταξύ των ποσοτήτων τραπεζιών και καρεκλών με βάση της *πωλήσεις προηγούμενων περιόδων. Ο προϊστάμενος του τμήματος πωλήσεων δεν μπορεί να πει με σιγουριά ποια είναι η σχέση μεταξύ τραπεζιών και καρεκλών που πωλούνται, αλλά δηλώνει ότι για κάθε τραπέζι πωλούνται από 2 έως 6 καρέκλες. Μια τέτοια σχέση παραγωγής δεν θα δημιουργούσε πρόβλημα στις πωλήοεις, δεδομένου ότι ένας αριθμός τραπεζιών μπορεί να συνδυασθεί και με έναν άλλο τύπο καρέκλας που η εταιρεία εισάγει από την Ιταλία.*

❖**Το αρχικό μοντέλο ΓΠ της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ πρέπει να αναθεωρηθεί λαμβάνοντας υπ' όψη τις νέες απαιτήσεις**

- **οι καρέκλες πρέπει να είναι τουλάχιστο διπλάσιες σε αριθμό από τα τραπέζια**
- αλλά **να μην υπερβαίνουν το εξαπλάσιο των τραπεζιών**
- <u>δύο νέοι περιορισμοί πρέπει να προστεθούν:</u>

Ελάχιστος Αριθμός Καρεκλών: $X_2 \geq 2X_1$ ή $2X_1 - X_2 \leq 0$

Μέγιστος Αριθμός Καρεκλών: $X_2 \leq 6X_1$ ή $-6X_1 + X_2 \leq 0$

Αναθεωρημένο μοντέλο ΓΠ της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

Μεγιστοποίηση Συνολικού κέρδους: $140\,X_1 + 100\,X_2$

υπό τους περιορισμούς:

$8X_1 + 8X_2$	$\leq$	960	Περιορισμός Ξυλουργείου
$4X_1 + 2X_2$	$\leq$	400	Περιορισμός Βαφείου
$4X_1 + 3X_2$	$\leq$	420	Περιορισμός Στιλβωτηρίου
$2X_1 - X_2$	$\leq$	0	Ελάχιστος Αριθμός Καρεκλών
$-6X_1 + X_2$	$\leq$	0	Μέγιστος Αριθμός Καρεκλών

$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$

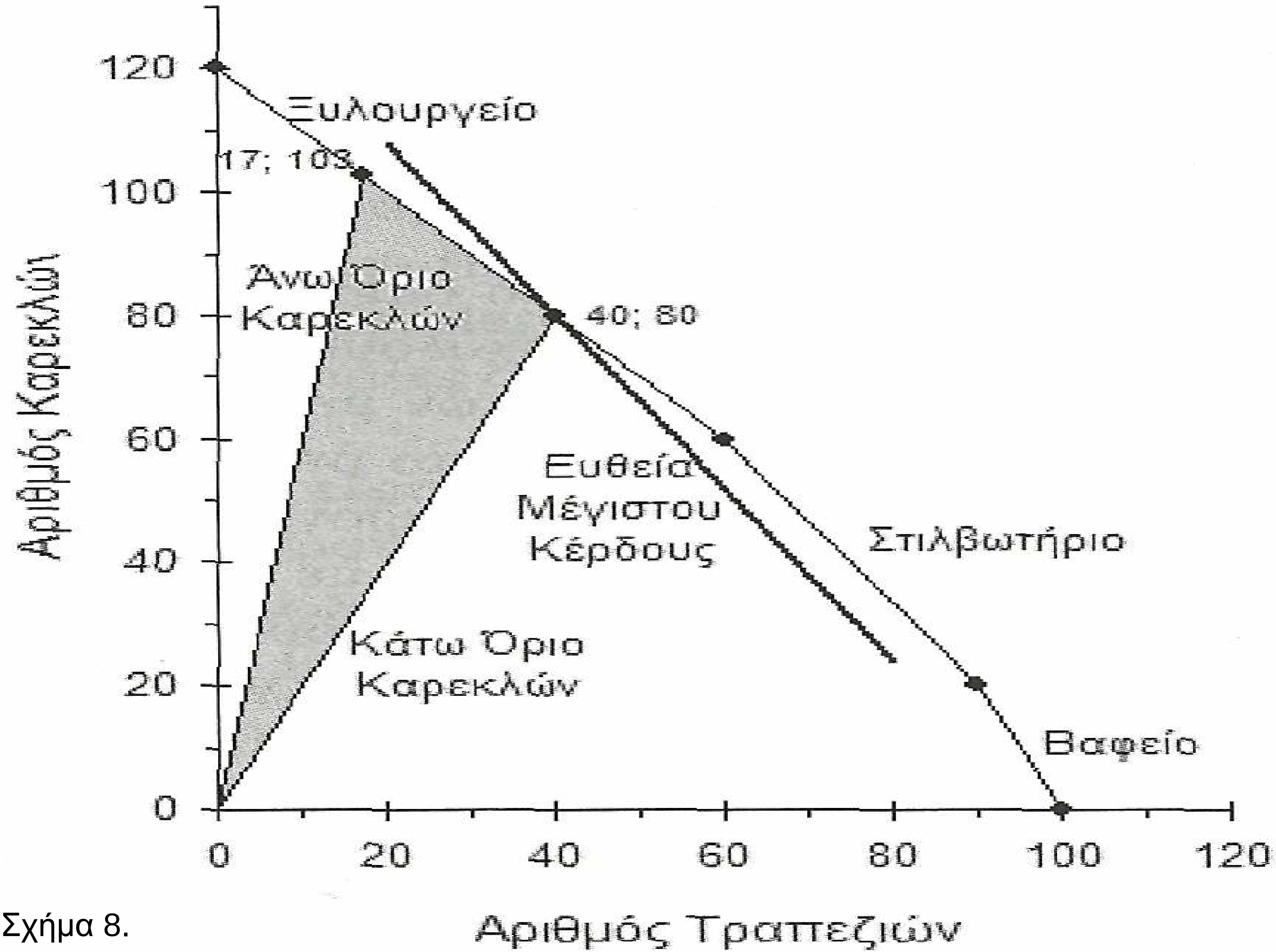
•Όπως φαίνεται και στο Σχήμα.8, η περιοχή των εφικτών λύσεων για το αναθεωρημένο πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ περιορίζεται στο σκιασμένο τρίγωνο που περικλείεται από τους περιορισμούς του ελάχιστου και μέγιστου αριθμού καρεκλών και του περιορισμού του Ξυλουργείου.

•Η βέλτιστη λύση βρίσκεται σε μία από τις κορυφές της περιοχής των εφικτών λύσεων και το τελευταίο σημείο της περιοχής από το οποίο μπορεί να διέλθει η ευθεία ίσου κέρδους είναι το σημείο (X_1=40, X_2=80) όπως φαίνεται και στο Σχήμα 8.

•Δεσμευτικοί είναι οι περιορισμοί του ελάχιστου αριθμού καρεκλών και των διαθέσιμων ωρών στο Ξυλουργείο,

• Οι περιορισμοί του Βαφείου και Στιλβωτηρίου δεν είναι πλέον δεσμευτικοί, δηλαδή το νέο πρόγραμμα παραγωγής εξαντλεί όλες τις ώρες στο Ξυλουργείο, ενώ υπάρχει ένας αριθμός ωρών εργασίας που δεν θα χρησιμοποιηθεί στην παραγωγή, στα τμήματα Βαφείου και Στιλβωτηρίου.

➢***Η νέα λύση που προκύπτει είναι η X_1 = 40 και X_2 = 80 με συνολικό κέρδος για την επιχείρηση 140(40) + 100(80) = 13.600€.***



120
100
80
60
40
20
0
Ξυλουργείο
17; 103
Άνω Όριο
Καρεκλών
40; 80
Ευθεία
Μέγιστου
Κέρδους
Στιλβωτήριο
Κάτω Όριο
Καρεκλών
Βαφείο
0
20
40
60
80
100
120
Αριθμός Καρεκλών
Αριθμός Τραπεζιών

Σχήμα 8.

Επίλυση προβλημάτων ΓΠ με τη μέθοδο Simplex

➢Σε εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού που αναφέρονται σε πραγματικά προβλήματα, ο αριθμός των μεταβλητών του προβλήματος είναι πολύ μεγαλύτερος των δύο, και επομένως η γραφική μέθοδος επίλυσης δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί

➢ Δεδομένου ότι ο αριθμός των μεταβλητών και των περιορισμών των προβλημάτων ΓΠ ανέρχεται σε δεκάδες, εκατοντάδες ή ακόμα και σε χιλιάδες, αυτό που χρειαζόμαστε είναι μια συστηματική μέθοδος επίλυσης τους, η οποία να είναι δυνατό να υλοποιηθεί μέσω καταλλήλων προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή για την επίλυση προβλημάτων ΓΠ οποιουδήποτε μεγέθους

➢Η αλγοριθμική μέθοδος **Simplex**, έχει ακριβώς αυτά τα χαρακτηριστικά

➢Είναι μία αλγοριθμική μέθοδος, περιλαμβάνει δηλαδή μία καθορισμένη σειρά επαναλαμβανόμενων διαδοχικών βημάτων υπολογισμών μέσω των οποίων

> ➢Ξεκινώντας από ένα αρχικό ακραίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων (αρχική λύση **Simplex**) **οδηγούμαστε σε κάθε επανάληψη** από ένα ακραίο σημείο της περιοχής των εφικτών λύσεων σε ένα άλλο, γειτονικό με το προηγούμενο, **το οποίο αντιστοιχεί σε μία καλύτερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης**.
>
> ➢Οι διαδοχικές βελτιώσεις της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης επαναλαμβάνονται έως ότου εντοπισθεί η βέλτιστη λύση.

Βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου Simplex:

- εκτός από την εύρεση της βέλτιστης λύσης
- παρέχει επίσης πλήθος άλλων πληροφοριών οικονομικής φύσεως, οι οποίες δεν είναι δυνατό να εξαχθούν με άλλες τεχνικές

Κατάστρωση Αρχικού Πίνακα Simplex

Παράδειγμα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ:

Μεταβλητές	X_1 = Ποσότητα παραγόμενων Τραπεζιών,			
	X_2 = Ποσότητα παραγόμενων Καρεκλών,			
Αντικειμενική Συνάρτηση	Μεγιστοποίηση Κέρδους: 140 X1 + 100 X2.			
Περιορισμοί:	$8X_1 + 8X_2$	$\leq$	960	Ώρες Ξυλουργείου
	$4X_1 + 2X_2$	$\leq$	400	Ώρες Βαφείου
	$4X_1 + 3X_2$	$\leq$	420	Ώρες Στιλβωτηρίου
	$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$			

Μετατροπή ανισοτήτων σε ισότητες - Μεταβλητές Περιθωρίου

➢Η εφαρμογή της μεθόδου **Simplex** επιβάλει τη μετατροπή όλων των περιορισμών που διατυπώνονται με μορφή ανισοτήτων σε ισότητες

➢Η μετατροπή αυτή επιτυγχάνεται με την εισαγωγή στο μοντέλο των **μεταβλητών περιθωρίου,** οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις ποσότητες των πόρων που δεν χρησιμοποιούνται

Στην περίπτωση του παραδείγματος που εξετάζουμε, ορίζουμε τρεις μεταβλητές περιθωρίου (μία για κάθε περιορισμό) ως εξής:

- S_1 = Ώρες Ξυλουργείου που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή
- S_2 = Ώρες Βαφείου που δεν θα χρησιμοποιηθούν
- S_3 = Ώρες Στιλβωτηρίου που δεν θα χρησιμοποιηθούν.

Ο όρος **μεταβλητές περιθωρίου** έχει την έννοια ότι οι τιμές αυτών των μεταβλητών αντιστοιχούν στις διαφορές μεταξύ του αριστερού μέρους της ανισότητας (απαιτούμενη ποσότητα) και του αντίστοιχου δεξιού μέρους (διαθέσιμη ποσότητα)

Π.χ, ας θεωρήσουμε την περίπτωση παραγωγής 70 τραπεζιών (X_1=70) και 40 καρεκλών (X_2=40). Οι ώρες ξυλουργείου που θα απαιτηθούν είναι 8(70)+8(40) = 880. Σε αυτή την περίπτωση η τιμή της μεταβλητής S_1 είναι 80 ώρες (960 διαθέσιμες - 880 που θα χρησιμοποιηθούν).

➢Οι περιορισμοί του προβλήματος με την **προσθήκη των μεταβλητών περιθωρίου** γράφονται ως εξής:

$8X_1 + 8X_2 + S_1$	$=$	960	Περιορισμός Ξυλουργείου
$4X_1 + 2X_2 + S_2$	$=$	400	Περιορισμός Βαφείου
$4X_1 + 3X_2 + S_3$	$=$	420	Περιορισμός Στιλβωτηρίου

ή αν θέλουμε να συμπεριλάβουμε όλες τις μεταβλητές σε όλους τους περιορισμούς έχουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων με πέντε αγνώστους (2 αρχικές μεταβλητές και 3 μεταβλητές περιθωρίου)

$8X_1 + 8X_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 960$	Περιορισμός Ξυλουργείου
$4X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 = 400$	Περιορισμός Βαφείου
$4X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 = 420$	Περιορισμός Στιλβωτηρίου

➢Εφόσον οι μεταβλητές περιθωρίου εκφράζουν τις ποσότητες των πόρων που δεν θα χρησιμοποιηθούν στην παραγωγή, δεν υπάρχει καμία συνεισφορά τους στο κέρδος
➢Επομένως, μπορούν να συμπεριληφθούν και στην αντικειμενική συνάρτηση με μηδενικούς συντελεστές κέρδους.

Μετά την προσθήκη των μεταβλητών περιθωρίου, το μαθηματικό μοντέλο του ΓΠ για τη πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ διατυπώνεται στην πλήρη **κανονική μορφή** του ως εξής:

Μεγιστοποίηση $140\ X_1 + 100\ X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

Υπό τους περιορισμούς:

$$
\begin{array}{ll}
(\Xi) & 8X_1 + 8X_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 960 \\
(\mathrm{B}) & 4X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 = 400 \\
(\Sigma) & 4X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 = 420 \\
 & X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ S_1 \geq 0,\ S_2 \geq 0,\ S_3 \geq 0
\end{array}
$$

Αλγεβρικός Προσδιορισμός Λύσεων

Έχουμε ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων
με πέντε μεταβλητές

•Εφόσον **ο αριθμός των εξισώσεων είναι μικρότερος από τον αριθμό των αγνώστων, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις**

•Μπορούμε να θέσουμε 2 από τις μεταβλητές ίσες με μηδέν και να υπολογίσουμε τις τιμές των 3 άλλων μεταβλητών λύνοντας το αλγεβρικό σύστημα των 3 εξισώσεων με τις 3 μη μηδενικές μεταβλητές

- •Αυτός ο τρόπος προσδιορισμού λύσεων δίνει λύσεις που αντιστοιχούν σε ακραία σημεία, που ορισμένα από αυτά ορίζουν την περιοχή των εφικτών λύσεων.

Μια εύκολη υπολογιστικά λύση είναι να θέσουμε τις μεταβλητές $X_1 = 0$ και $X_2 = 0$, επομένως οι τιμές των υπόλοιπων μεταβλητών είναι ίσες με τις σταθερές της κάθε εξίσωσης, δηλαδή $S_1 = 960$, $S_2 = 400$ και $S_3 = 420$.

Είναι ευνόητο ότι η λύση αυτή δεν είναι ιδιαίτερα ελκυστική, διότι αντιπροσωπεύει την περίπτωση παραγωγής 0 τεμαχίων τόσο σε καρέκλες όσο και σε τραπέζια. Με μηδενική παραγωγή, καμία από τις διαθέσιμες ώρες στα τμήματα παραγωγής δεν χρησιμοποιείται. Αυτό δηλώνουν και οι τιμές *των μεταβλητών περιθωρίου* S_1*=960 ώρες,* S_2*=400 ώρες και* S_3*=420 ώρες. Η Λύση αυτή αντιστοιχεί στο ακραίο σημείο (0,0), την αρχή των* αξόνων *(Σχήμα 5).*

- **Ως αρχική λύση**, που απαιτείται για την έναρξη της επαναληπτικής διαδικασίας, μπορεί να θεωρηθεί η προφανής λύση **X_1=O και X_2=0, S_1=960, S_2=400 και S_3=420.**
- Μία τέτοια λύση, όπου όλες οι πραγματικές μεταβλητές του προβλήματος έχουν τιμή 0, είναι λύση που μπορούμε να παράγουμε εύκολα για τα περισσότερα προβλήματα ΓΠ.
- Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης που αντιστοιχεί στην αρχική αυτή λύση είναι προφανώς 0

Ο αρχικός πίνακας Simplex

➢Τα βήματα της μεθόδου **Simplex** υλοποιούνται μέσω αλγεβρικών πράξεων στα δεδομένα του προβλήματος τα οποία απεικονίζονται σε μία συγκεκριμένη διάταξη πίνακα που ονομάζεται **πίνακας Simplex.**

➢Ο πρώτος πίνακας **Simplex** περιλαμβάνει τους <u>συντελεστές όλων των μεταβλητών στην αντικειμενική συνάρτηση</u> και τους <u>περιορισμούς του προβλήματος</u> διατεταγμένα ως εξής:

Αρχικός Πίνακας Simplex

Συντ. Κέρδους $c_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
$\downarrow$	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	8	8	1	0	0	960
0	S_2	4	2	0	1	0	400
0	S_3	4	3	0	0	1	420
	Z_j	0	0	0	0		0
	$C_j - Z_j$	140	100	0	0	0	

Ο αρχικός πίνακας Simplex

- Κάθε πίνακας **Simplex** αντιστοιχεί σε μία εφικτή λύση του προβλήματος

- Ο αρχικός πίνακας **Simplex** αντιστοιχεί στη λύση S_1 = 960, S_2 =400 και S_3=420 **(βασικές μεταβλητές)** και X_1=0 και X_2=0 **(μη βασικές μεταβλητές).**

- Οι μεταβλητές που έχουν μη μηδενικές τιμές ονομάζονται **βασικές μεταβλητές,** ενώ οι υπόλοιπες **μη βασικές**

- Στον αρχικό πίνακα **Simplex** του παραδείγματος ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ, οι βασικές μεταβλητές είναι οι S_1(S_2 και S_3 ενώ μη βασικές οι μεταβλητές X_1 και X_2

- Το σύνολο των βασικών μεταβλητών καλείται και **βάση** της λύσης που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο πίνακα

- Κάθε βασική μεταβλητή αντιστοιχεί σε έναν περιορισμό του προβλήματος, επομένως ο αριθμός των βασικών μεταβλητών σε κάθε πρόβλημα ΓΠ είναι ίσος με τον αριθμό των περιορισμών του προβλήματος.

Ο αρχικός πίνακας Simplex

- **Η πρώτη στήλη του πίνακα Simplex** περιλαμβάνει τους συντελεστές κέρδους στην αντικειμενική συνάρτηση που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές
- **Στη δεύτερη στήλη** τοποθετούμε τις βασικές μεταβλητές (S_1, S_2 και S_3 για τον αρχικό πίνακα)
- **Οι επόμενες στήλες αποτελούν** το κυρίως τμήμα του πίνακα **Simplex** και αντιστοιχούν στους συντελεστές των μεταβλητών του προβλήματος στους αντίστοιχους περιορισμούς
- **Η τελευταία στήλη** αντιστοιχεί στις σταθερές ποσότητες των περιορισμών
- Οι **τιμές των βασικών μεταβλητών** δίνονται στην τελευταία στήλη του πίνακα
- Δηλαδή η τιμή 960 αντιστοιχεί στην S_1, η τιμή 400 στην S_2 και η τιμή 420 στη μεταβλητή S_3
- **Οι τιμές των μη βασικών μεταβλητών είναι πάντοτε μηδέν**
- **Η πρώτη σειρά του πίνακα** περιλαμβάνει τους συντελεστές κέρδους όλων των μεταβλητών όπως αναφέρονται στην αντικειμενική συνάρτηση του προβλήματος

Οικονομική Ερμηνεία του Πίνακα Simplex - Συντελεστές Μετατροπής

- Τα στοιχεία κάθε στήλης του πίνακα **Simplex** είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές των περιορισμών του προβλήματος.

- Π.χ. Η στήλη του πίνακα που αντιστοιχεί στη μεταβλητή X_1 περιέχει τους συντελεστές του X_1 στους τρεις περιορισμούς αντίστοιχα.

- Ποια είναι η οικονομική ερμηνεία αυτών των συντελεστών;

Τα στοιχεία της στήλης X_1 καλούνται **συντελεστές μετατροπής** μεταξύ της μεταβλητής X_1 και όλων των βασικών μεταβλητών του πίνακα, δηλαδή των S_1, S_2, S_3 και ερμηνεύονται ως εξής:

Οικονομική Ερμηνεία του Πίνακα Simplex - Συντελεστές Μετατροπής

Για να αυξηθεί η τιμή της X_1 κατά μία μονάδα (για να παράγουμε δηλαδή ένα τραπέζι) απαιτείται να μειωθούν οι τιμές των S_1, S_2, S_3 κατά 8, 4, και 4 μονάδες αντίστοιχα (δηλαδή να ελαττώσουμε τις μη χρησιμοποιούμενες ώρες στο ξυλουργείο, στο Βαφείο και στο στιλβωτήριο κατά 8, 4 και 4 αντίστοιχα).

Η ερμηνεία αυτή επαληθεύεται εύκολα, αν αναλογισθούμε ότι για την κατασκευή κάθε τραπεζιού απαιτούνται 8 ώρες στο ξυλουργείο, 4 ώρες στο Βαφείο και 4 στο στιλβωτήριο.

Αντίστοιχη ερμηνεία μπορούμε να δώσουμε για τα στοιχεία της στήλης X_2.

Οι σειρές Cj, Zj, Cj-Zj

•Η σειρά C_j περιέχει τους συντελεστές κέρδους της αντικειμενικής συνάρτησης

•Τα στοιχεία αυτής της σειράς μπορεί να ερμηνευθούν ως η μικτή αύξηση που προκύπτει στο συνολικό κέρδος αν η τιμή της κάθε μεταβλητής αυξηθεί κατά μία μονάδα.

•Έτσι, μία μονάδα της X_1 αποφέρει στην επιχείρηση επιπλέον κέρδος 140€

•Τα στοιχεία της σειράς Z_j δηλώνουν το κατά πόσο θα μειώνονταν το συνολικό κέρδος αν η τιμή της αντίστοιχης μεταβλητής αυξηθεί κατά μία μονάδα

Πώς όμως δικαιολογείται η μείωση του κέρδους;

Οι σειρές C_j, Z_j, C_j-Z_j

Ας θεωρήσουμε τη μεταβλητή X_1.

•Για να αυξηθεί η X_1 κατά μία μονάδα θα πρέπει να ελαττωθούν η S_1 κατά 8 μονάδες, η S_2 κατά 4 μονάδες και η S_3 κατά 4 μονάδες

•Η μείωση των S_1, S_2 και S_3 δεν έχει κάποια επίπτωση στο συνολικό κέρδος διότι οι συντελεστές κέρδους των S_1, S_2 και S_3 είναι 0 (θυμηθείτε ότι οι μεταβλητές περιθωρίου δηλώνουν ώρες παραγωγής που ούτως ή άλλως είναι διαθέσιμες αλλά δεν χρησιμοποιούνται).

•Στα επόμενα βήματα της διαδικασίας **Simplex** , οι βασικές μεταβλητές θα αλλάξουν και επομένως τα στοιχεία της σειράς $\mathbf{Z_j}$ δεν θα είναι μηδενικά.

•Η τελευταία σειρά του πίνακα, $\mathbf{C_j}$**-**$\mathbf{Z_j}$ είναι αυτή που δηλώνει την καθαρή επίπτωση στο συνολικό κέρδος (αύξηση κέρδους - μείωση κέρδους) στην περίπτωση που η αντίστοιχη μη βασική μεταβλητή του προβλήματος αυξηθεί κατά μία μονάδα

Επαναληπτική διαδικασία Simplex

- Η μέθοδος **Simplex** είναι μια επαναληπτική μέθοδος
- Βασίζεται σε μία επαναλαμβανόμενη σειρά βημάτων με την οποία από ένα δεδομένο πίνακα **Simplex** παράγουμε τον επόμενο, ο οποίος αντιστοιχεί σε μία καλύτερη λύση κ.ο.κ., έως ότου προσδιορισθεί η βέλτιστη λύση
- Η επαναληπτική αυτή διαδικασία **περιλαμβάνει 6 βήματα**

Βήμα 1 Έλεγχος κριτηρίου βελτιστοποίησης

➢Ελέγχουμε αν η λύση που δίνει ο τρέχων πίνακας **Simplex** είναι η βέλτιστη

➢Η λύση είναι βέλτιστη όταν όλα τα στοιχεία της σειράς $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$ είναι αρνητικά ή μηδενικά **για προβλήματα μεγιστοποίησης**

➢**Για προβλήματα ελαχιστοποίησης** το κριτήριο είναι όλα τα στοιχεία της σειράς $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$ να είναι θετικά ή μηδενικά

➢Αν η λύση είναι βέλτιστη, τότε η διαδικασία έχει ολοκληρωθεί, αν όχι, εκτελούμε τα βήματα 2 έως 5

Βήμα 2 Επιλογή νέας βασικής μεταβλητής

➢Εφόσον η λύση δεν είναι βέλτιστη, επιδέχεται βελτιώσεις. Βελτίωση της λύσης σημαίνει ότι από το ακραίο σημείο που αντιστοιχεί στην τρέχουσα λύση, πρέπει να μετακινηθούμε σε ένα γειτονικό ακραίο σημείο

- ➢Αυτό απαιτεί αντικατάσταση μιας βασικής με μία από τις μη βασικές μεταβλητές.

➢Επιλέγουμε εκείνη τη μη βασική μεταβλητή που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο θετικό στοιχείο της σειράς $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$ για να συμπεριληφθεί στη βάση

➢Η μεταβλητή αυτή συνεισφέρει στη μεγαλύτερη αύξηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης

➢Τη στήλη που αντιστοιχεί στη νέα βασική μεταβλητή την ονομάζουμε **οδηγό στήλη**

Βήμα 3 Επιλογή βασικής μεταβλητής που αντικαθίσταται

•Εφόσον μια νέα μεταβλητή "μπαίνει" στη βάση, μια άλλη θα πρέπει να "φύγει", ώστε να διατηρηθεί ίδιος ο αριθμός των βασικών μεταβλητών

• Για να προσδιορίσουμε τη μεταβλητή που θα αντικατασταθεί:

  • Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της τελευταίας στήλης του πίνακα (ποσότητες) με τα αντίστοιχα θετικά στοιχεία της οδηγού στήλης

  •Το μικρότερο θετικό κλάσμα προσδιορίζει τη μεταβλητή που θα αντικατασταθεί (αρνητικές τιμές αγνοούνται)

  •Τη σειρά της μεταβλητής που θα αντικατασταθεί την αποκαλούμε **οδηγό σειρά**

  •Το στοιχείο που βρίσκεται στην τομή της οδηγού σειράς με την οδηγό στήλη το ονομάζουμε **οδηγό στοιχείο**

Βήμα 4 Υπολογισμός νέων τιμών οδηγού σειράς

<u>Οι νέες τιμές υπολογίζονται με διαίρεση όλων των στοιχείων της οδηγού σειράς με το οδηγό στοιχείο</u>

$$\boxed{\text{Νέα Οδηγός Σειρά}} = \boxed{\text{Προηγούμενη Οδηγός Σειρά}} \;/\; \boxed{\text{Οδηγό στοιχείο}}$$

Βήμα 5 Υπολογισμός νέων τιμών για τις υπόλοιπες σειρές του πίνακα

Οι νέες τιμές κάθε σειράς, εκτός της οδηγού σειράς που υπολογίστηκε στο προηγούμενο βήμα, υπολογίζονται ως εξής:

$$\boxed{\text{Νέες Τιμές Σειράς}} = \boxed{\text{Προηγούμενες Τιμές}} - \boxed{\text{Στοιχείο Σειράς στην Οδηγό στήλη}} \times \boxed{\text{Νέα Οδηγό Σειρά}}$$

Βήμα 6 Υπολογισμός των νέων τιμών για τις σειρές Z_j και C_j-Z_j

- Οι τιμές της σειράς Z_j υπολογίζονται με πολλαπλασιασμό των στοιχείων κάθε στήλης με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών
- Οι τιμές της σειράς $\mathbf{C_j-Z_j}$ προκύπτουν από την αφαίρεση των τιμών των σειρών $\mathbf{C_j}$ και $\boldsymbol{Z_j}$.

Ο Δεύτερος Πίνακας Simplex - ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

Εφαρμογή της επαναληπτικής διαδικασίας **Simplex** στο συγκεκριμένο παράδειγμα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ.

Βήμα 1 Όλα τα στοιχεία της σειράς $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$ του πρώτου πίνακα **Simplex** είναι **μεγαλύτερα ή ίσα με μηδέν**.
Επομένως, η λύση που δίνει ο πρώτος πίνακας **Simplex** δεν είναι βέλτιστη και προχωρούμε στα βήματα 2 έως 5

Βήμα 2 Η επιλογή της μεταβλητής που θα συμπεριληφθεί στη βάση, γίνεται με βάση τη μεγαλύτερη θετική τιμή στη σειρά $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$**.**
Επιλέγουμε τη μεταβλητή X_1 γιατί έχει τιμή $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$=140, ενώ η X_2 έχει τιμή 100.
Επομένως, η στήλη της X_1 είναι η οδηγός στήλη.

Βήμα 3 Μετά την επιλογή της X_1 για να συμπεριληφθεί στη βάση θα πρέπει να εξετάσουμε ποια από τις βασικές μεταβλητές S_1, S_2 και S_3 θα αντικατασταθεί από αυτή.

Υπολογίζουμε τα πηλίκα των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης του πίνακα προς τους συντελεστές της οδηγού στήλης

Ο Δεύτερος Πίνακας Simplex - ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ

Για την S_1: 960 ώρες ξυλουργείου /8 ώρες ανά τραπέζι =120 τραπέζια
Για την **S_2**: 400 ώρες βαφείου /4 ώρες ανά τραπέζι =**100 τραπέζια**
Για την S_3: 420 ώρες στιλβωτηρίου / 4 ώρες ανά τραπέζι =105 τραπέζια

Επομένως:

- **Η S_2 που αντιστοιχεί στο μικρότερο θετικό πηλίκο, είναι αυτή που θα αντικατασταθεί από τη X_1**

- **<u>Η σειρά S_2 είναι η οδηγός σειρά και το στοιχείο 4 στη διασταύρωση της οδηγού σειράς με την οδηγό στήλη είναι το οδηγό στοιχείο</u>**

Συντ. Κέρδους C_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	8	8	1	0	0	960
0	S_2	4	2	0	1	0	400 ➔
0	S_3	4	3	0	0	1	420
	Z_j	0	0	0	0		0
	$C_j - Z_j$	140 ↑	100	0	0	0	

Βήμα 4 Αφού ορίσαμε ήδη ότι η μεταβλητή X_1 θα αντικαταστήσει την S_2, θα πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές του δεύτερου πίνακα **Simplex**.

Καταρχήν **θα αντικαταστήσουμε την οδηγό σειρά**.

Το οδηγό στοιχείο είναι το 4.

Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της οδηγού σειράς με το 4.

<u>Άρα, η νέα οδηγός σειρά είναι:</u>

140	X_1	4/4= 1	2/4= ½	0/4= 0	1/4= ¼	0/4= 0	400/4= 100

Ο νέος πίνακας **Simplex** θα έχει την εξής μορφή σε αυτό το σημείο της διαδικασίας:

Συντ. Κέρδους c_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1						
140	X_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	S_3						
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

- η X_1 αντικατέστησε την S_2 στη βάση
- η τιμή της X_1 είναι 100 μονάδες
- ο συντελεστής κέρδους της X_1 εμφανίζεται στη στήλη συντελεστών κέρδους των βασικών μεταβλητών

Βήμα 5 Απομένει να υπολογίσουμε τις νέες τιμές για τις σειρές που αντιστοιχούν στις S_1 και S_3 καθώς και τις νέες τιμές στις σειρές $\mathbf{Z_j}$ και $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$

Νέα Σειρά S_1:

προηγούμενες τιμές σειράς S_1	8	8	1	0	0	960
μείον	-	-	-	-	-	-
(στοιχείο σειράς στην οδηγό στήλη) x (νέες τιμές της οδηγού σειράς X_1)	8(1)	8(½)	8(0)	8(¼)	8(0)	8(100)
=	=	=	=	=	=	=
νέες τιμές της σειράς S_1	0	4	1	-2	0	160

Βήμα 5

Νέα Σειρά S_3:

προηγούμενες τιμές σειράς S_3	4	3	0	0	1	420
μείον	-	-	-	-	-	-
(στοιχείο σειράς στην οδηγό στήλη) x (νέες τιμές της οδηγού σειράς X_1)	4(1)	4(½)	4(0)	4(¼)	4(0)	4(100)
=	=	=	=	=	=	=
νέες τιμές της σειράς S_3	0	1	0	-1	1	20

Επομένως, ο νέος πίνακας **Simplex** μετά τον υπολογισμό και των σειρών S_1 και S_3 θα έχει την εξής μορφή:

2^{os} Πίνακας Simplex – ΕΠΙΛΟΞΥΛ

Συντ. Κέρδους $c_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
$\downarrow$	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	4	1	-2	0	160
140	X_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	S_3	0	1	0	-1	1	20
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

Μοναδιαίες στήλες στον πίνακα Simplex

•Ο νέος πίνακας **Simplex** περιέχει επίσης τρεις μοναδιαίες στήλες που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές S_1, X_1, και S_3

•Οι αλγεβρικές πράξεις που εκτελέσαμε για να υπολογίσουμε τις νέες τιμές του πίνακα **Simplex** είχαν ακριβώς αυτό ως στόχο

- •Να μετατρέψουμε δηλαδή τη στήλη που αντιστοιχεί στη νέα βασική μεταβλητή X_1 σε μοναδιαία στήλη.

•Η διαίρεση με το οδηγό στοιχείο έδωσε την τιμή 1 στη θέση της τομής της σειράς X_1 με τη στήλη X_1

•Ο πολλαπλασιασμός των νέων τιμών της οδηγού σειράς με το 8 και 4 αντίστοιχα και η αφαίρεση των γινομένων από τις τιμές των σειρών S_1 και S_3 είχε σαν αποτέλεσμα να μηδενίσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης X_1.

Βήμα 5 Απομένει τώρα ο υπολογισμός των τιμών για τις σειρές $\mathbf{Z_j}$ και $\mathbf{C_j\text{-}Z_j}$

•Οι τιμές της σειράς $\mathbf{Z_j}$ αντιστοιχούν στη μείωση που θα προκύψει στο κέρδος στην περίπτωση που επιλέξουμε να συμπεριληφθεί στη βάση μια από τις μη βασικές μεταβλητές. Στο σημείο αυτό μπορούμε να εξηγήσουμε καλύτερα την έννοια των τιμών της σειράς $\mathbf{Z_j}$

•Η νέα λύση που προέκυψε είναι X_1=100, X_2=0, και S_1=160, S_2=0, και S_3=20.

•Δηλαδή, παραγωγή 100 τραπεζιών, καθόλου καρεκλών, με αχρησιμοποίητες 160 ώρες εργασίας στο ξυλουργείο, 0 ώρες στο βαφείο και 20 ώρες στο στιλβωτήριο.

Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε την περίπτωση παραγωγής και καρεκλών.

•Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της X_2 από 0 που είναι σε αυτό το σημείο της διαδικασίας, θα αυξηθεί

•Σύμφωνα με τη μεθοδολογία **Simplex**, αυτό σημαίνει ότι η X_2 θα γίνει βασική μεταβλητή, δηλαδή θα συμπεριληφθεί στη βάση (αντικαθιστώντας κάποια από τις μεταβλητές S_1 (X_1 ή S_3).

•Ο δεύτερος πίνακας **Simplex** μας δίνει τις εξής πληροφορίες από τις τιμές των συντελεστών μετατροπής της στήλης X_2:

Για αύξηση της τιμής της X_2 κατά μία μονάδα απαιτείται η μείωση της S_1 κατά 4, της X_1 κατά X_1 1/2 και της S_3 κατά 1. Δηλαδή, μείωση της παραγωγής τραπεζιών κατά μισό, και μείωση επίσης των αχρησιμοποίητων ωρών στο ξυλουργείο κατά 4 και στο στιλβωτήριο κατά 1 (δηλαδή να χρησιμοποιήσουμε 4 και 1 ώρες αντίστοιχα από αυτές που δεν έχουν χρησιμοποιηθεί με βάση τη λύση του 2ου πίνακα **Simplex**).

❖Για να υπολογίσουμε τις τιμές της σειράς $\mathbf{Z_j}$ πολλαπλασιάζουμε τους συντελεστές μετατροπής για κάθε μεταβλητή με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών και προσθέτουμε τα γινόμενα ως εξής:

$2^{ος}$ Πίνακας Simplex – ΕΠΙΛΟΞΥΛ (τελική μορφή)

Συντ. Κέρδους $c_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
$\downarrow$	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	4	1	-2	0	160
140	X_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	S_3	0	1	0	-1	1	20
	Z_j	0(0) +1(140) +0(0) 140	4(0) +½(140) +1(0) 70	1(0) +0(140) +0(0) 0	-2(0) +¼(140) +1(0) 35	1(0) +0(140) +1(0) 0	
	C_j - Z_j	0	30	0	-35	0	

•Οι τιμές της σειράς $\mathbf{C_j}$-$\mathbf{Z_j}$ προκύπτουν από αφαίρεση της σειράς $\mathbf{Z_j}$ από τη σειρά $\mathbf{C_j}$
Βλέπουμε λοιπόν ότι η αύξηση της X_2 κατά 1 μονάδα (παραγωγή μίας καρέκλας) θα έχει σαν αποτέλεσμα καθαρή αύξηση των κερδών κατά 30.

•Ο υπολογισμός του κέρδους που αντιστοιχεί στη λύση του τρέχοντος πίνακα **Simplex** υπολογίζεται με την άθροιση των γινομένων της τελευταίας στήλης που δίνει τις τιμές των βασικών μεταβλητών με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών.

•Κέρδος = 160(0) + 100(140) + 20(0)= 14000

Ο τρίτος πίνακας Simplex

Βήμα 1

Εφόσον η σειρά C_j-Z_j του δεύτερου πίνακα Simplex περιλαμβάνει και θετικούς αριθμούς, η λύση που δίνει ο δεύτερος πίνακας Simplex δεν είναι βέλτιστη. Επομένως, θα πρέπει να επαναλάβουμε τα πέντε βήματα για να διαμορφώσουμε τον τρίτο κατά σειρά πίνακα **Simplex**.

Βήμα 2

Η μεταβλητή που θα συμπεριληφθεί στη βάση είναι η X_2, διότι είναι η μόνη μεταβλητή με θετική τιμή 30 στη σειρά C_j-Z_j

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε καρέκλα που θα παραχθεί, το κέρδος αυξάνεται κατά 30€.

Η στήλη της X_2 είναι η οδηγός στήλη.

Βήμα 3 Μετά την επιλογή της X_2 για να συμπεριληφθεί στη βάση θα πρέπει να επιλέξουμε ποια από τις υπάρχουσες βασικές μεταβλητές S_1, X_1 και S_3 θα αντικατασταθεί
Αν υπολογίσουμε τους λόγους των ποσοτήτων της τελευταίας στήλης του πίνακα προς τους συντελεστές της οδηγού στήλης, έχουμε:

Για την S_1: 160 ώρες ξυλουργείου / 4 ώρες ανά καρέκλα =40 καρέκλες
Για την X_1: 100 τραπέζια / 1/2 τραπέζια ανά καρέκλα =200 καρέκλες
Για την S_3: 20 ώρες ξυλουργείου / 1 ώρα ανά καρέκλα =20 καρέκλες
Η S_3 αντιστοιχεί στη μικρότερη θετική τιμή και επομένων είναι αυτή που θα αντικατασταθεί από την X_2

Η νέα οδηγός σειρά, οδηγός στήλη και οδηγό στοιχείο έχουν ως εξής:

Συντ. Κέρδους $C_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	4	1	-2	0	160
140	X_1	1	1/2	0	1/4	0	100
0	S_3	0	1	0	-1	1	20➜
	Z_j	140	70	0	35	0	14000
	$C_j - Z_j$	0	30 ↑	0	-35	0	

Βήμα 4

- Προχωρούμε στον υπολογισμό των τιμών του τρίτου πίνακα **Simplex**.
- **Καταρχήν αντικαθιστούμε την οδηγό σειρά**
- **Το οδηγό στοιχείο είναι το 1**
- **Διαιρούμε όλα τα στοιχεία της οδηγού σειράς με το 1**, και επομένως η νέα οδηγός σειρά παραμένει ως έχει:

Συντ. Κέρδους $C_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1						
140	X_1						
100	X_2	0	1	0	-1	1	20
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

- η X_2 αντικατέστησε την S_3 στη βάση
- η τιμή της X_2 είναι 20 μονάδες
- ο συντελεστής κέρδους της X_2 εμφανίζεται στη στήλη συντελεστών κέρδους των βασικών μεταβλητών

Βήμα 5

•Απομένει τώρα να υπολογίσουμε τις νέες τιμές για τις σειρές που αντιστοιχούν στην S_1 και την X_1

•Οι πράξείς είναι αντίστοιχες με αυτές για τον υπολογισμό του 2ου πίνακα **Simplex**

Νέα Σειρά S_1:

προηγούμενες τιμές σειράς S_1	0	4	1	-2	0	160
μείον	-	-	-	-	-	-
(στοιχείο σειράς στην οδηγό στήλη) x (νέες τιμές της οδηγού σειράς X_2)	4(0)	4(1)	4(0)	4(-1)	4(1)	4(20)
=	=	=	=	=	=	=
νέες τιμές της σειράς S_1	0	0	1	2	-4	80

Νέα Σειρά X_1:

προηγούμενες τιμές σειράς X_1	1	1/2	0	1/4	0	100
μείον	-	-	-	-	-	-
(στοιχείο σειράς στην οδηγό στήλη) x (νέες τιμές της οδηγού σειράς X_2)	1/2(0)	1/2(1)	1/2(0)	1/2(-1)	1/2(1)	1/2(20)
=	=	=	=	=	=	=
νέες τιμές της σειράς X_1	1	0	0	3/4	-1/2	90

Ο νέος πίνακας **Simplex** μετά τον υπολογισμό και των σειρών S_1 και X_1 θα έχει την εξής μορφή:

3^{os} Πίνακας Simplex - ΕΠΙΛΟΞΥΛ

Συντ. Κέρδους $C_j \rightarrow$		140	100	0	0	0	Ποσότητα
$\downarrow$	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	-4	80
140	X_1	1	0	0	3/4	-1/2	90
100	X_2	0	1	0	-1	1	20
	Z_j						
	$C_j - Z_j$						

Οι τρεις μοναδιαίες στήλες που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές στον τρίτο πίνακα **Simplex** είναι οι S_1, X_1, και X_2.

Βήμα 6 Απομένει τώρα ο υπολογισμός των τιμών για τις σειρές Z_j και C_j-Z_j

Ο υπολογισμός των τιμών της σειράς Z_j γίνεται με πολλαπλασιασμό των συντελεστών μετατροπής κάθε μεταβλητής με τους αντίστοιχους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών και πρόσθεση των γινομένων ως εξής:

3ος Πίνακας Simplex – ΕΠΙΛΟΞΥΛ (τελική μορφή)

Συντ. Κέρδους c_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	-4	80
140	X_1	1	0	0	3/4	-1/2	90
100	S_3	0	1	0	-1	1	20
	Z_j	0(0) +1(140) +0(100) = 140	0(0) 0(140) +1(100) = 100	1x0) +0(140) +0(100) = 0	-2(0) +¾(140) -1(100) = 5	-4(0) -½(140) +1(100) = 30	14600
	C_j - Z_j	0	0	0	-5	-30	

- **Οι τιμές** της σειράς C_j-Z_j προκύπτουν από **αφαίρεση** της σειράς Z_j από τη σειρά C_j.
- Ο υπολογισμός του κέρδους που αντιστοιχεί στη λύση του τρέχοντος πίνακα **Simplex**, υπολογίζεται με την άθροιση των γινομένων της τελευταίας στήλης που δίνει τις τιμές των μεταβλητών με τους συντελεστές κέρδους των βασικών μεταβλητών
- **Κέρδος = 90(140) + 20(100) = 14600**

Κριτήριο βελτιστοποίησης

- Ο παραπάνω τρίτος πίνακας **Simplex** είναι και ο τελικός πίνακας **Simplex** για το πρόβλημα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ
- Παρατηρούμε ότι η σειρά **C_j-Z_j δεν περιέχει θετικά στοιχεία**, συνεπώς δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί περαιτέρω αύξηση του κέρδους.
- Η βέλτιστη λύση σύμφωνα με τον τελικό πίνακα **Simplex** είναι:

X_1 = 90 τραπέζια

X_2 = 20 καρέκλες

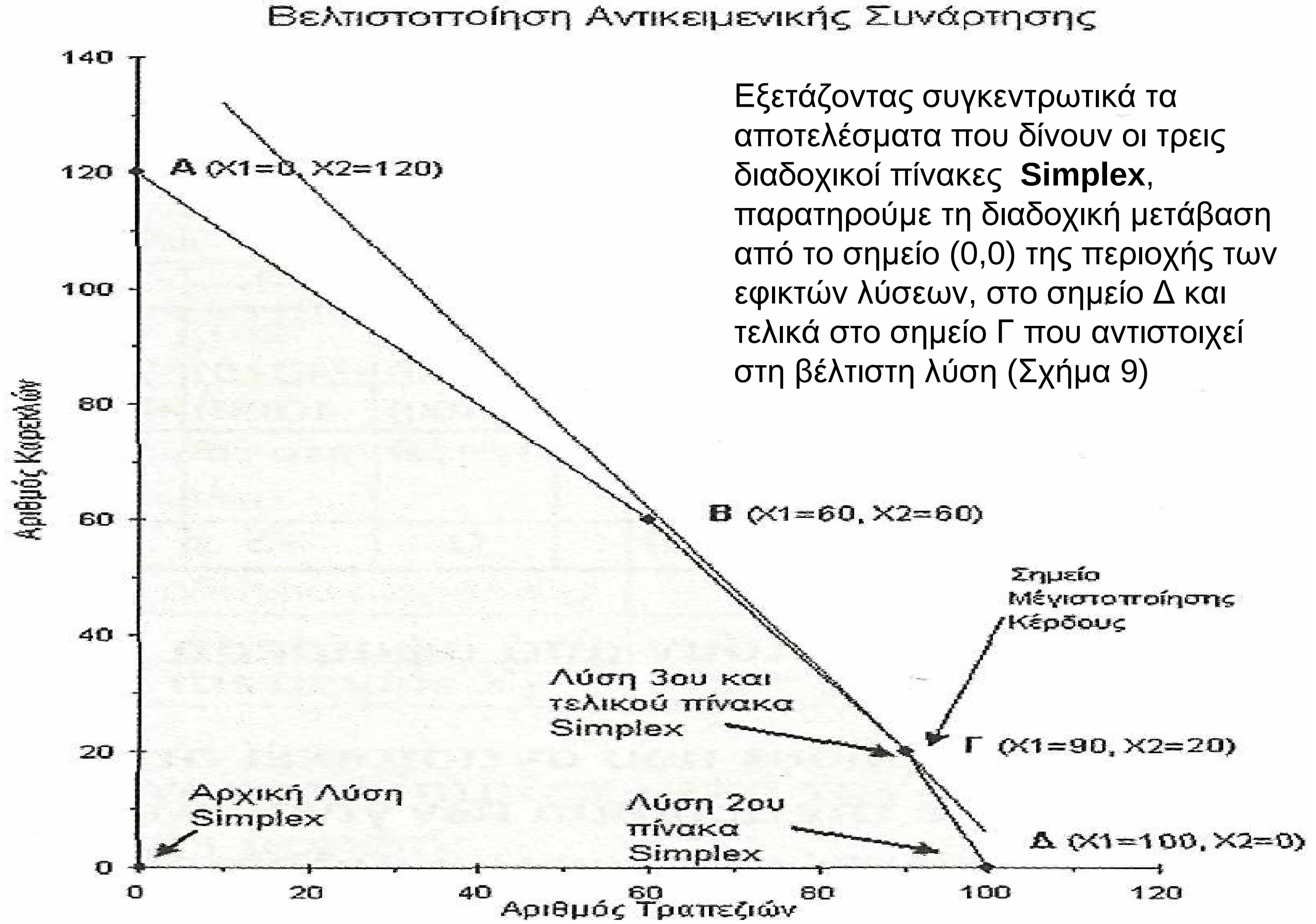
S_1 = 80 ώρες διαθέσιμες στο ξυλουργείο

S_2 = 0 ώρες διαθέσιμες στο βαφείο

S_3 = 0 ώρες διαθέσιμες στο στιλβωτήριο

•**Αυτός ο συνδυασμός της παραγωγής δίνει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος, το οποίο ανέρχεται σε 14.600€.**

Εξετάζοντας συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα που δίνουν οι τρεις διαδοχικοί πίνακες **Simplex**, παρατηρούμε τη διαδοχική μετάβαση από το σημείο (0,0) της περιοχής των εφικτών λύσεων, στο σημείο Δ και τελικά στο σημείο Γ που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση (Σχήμα 9)



Οι λύσεις των διαδοχικών βημάτων της μεθόδου Simplex

Αρχικός Πίνακας: *Σημείο (0,0) – αρχή των αξόνων*

Παραγωγή: X_1 = 0 τραπέζια X_2 = 0 καρέκλες

Διαθέσιμοι Πόροι: S_1 = 960 μη χρησιμοποιούμενες ώρες (διαθέσιμες) ξυλουργείου

S_2 = 400 διαθέσιμες ώρες βαφείου

S_3 = 420 διαθέσιμες ώρες στιλβωτηρίου

Κέρδος 0€

<u>Δεύτερος Πίνακας:</u> *Σημείο Δ(100,0)*

Παραγωγή: X_1 = 100 τραπέζια X_2 = 0 καρέκλες

Διαθέσιμοι Πόροι: S_1 = 160 μη χρησιμοποιούμενες ώρες (διαθέσιμες) ξυλουργείου

S_2 = 0 διαθέσιμες ώρες βαφείου

S_3 = 20 διαθέσιμες ώρες στιλβωτηρίου

Κέρδος 14.000€

<u>Τρίτος Πίνακας (τελικός):</u> *Σημείο Γ(90,20)*

Παραγωγή: X_1 = 90 τραπέζια X_2 = 20 καρέκλες

Διαθέσιμοι Πόροι: S_1 = 80 μη χρησιμοποιούμενες ώρες (διαθέσιμες) ξυλουργείου

S_2 = 0 διαθέσιμες ώρες βαφείου

S_3 = 0 διαθέσιμες ώρες στιλβωτηρίου

Κέρδος 14.600€

Οικονομική Ερμηνεία των αποτελεσμάτων της μεθόδου Simplex

•Το παράδειγμα της ΕΠΙΠΛΟΞΥΛ από το στάδιο της διατύπωσης του επιχειρησιακού προβλήματος έως την επίλυση του

Δεδομένα Επιχειρησιακού Προβλήματος – Παράμετροι

Τμήμα Παραγωγής	Απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή 1 μονάδας: X_1 (τραπέζια)	Απαιτούμενες ώρες για την παραγωγή 1 μονάδας: X_2 (καρέκλες)	Διαθέσιμες ώρες σε κάθε τμήμα
Ξυλουργείο	8 ώρες	8 ώρες	960 ώρες
Βαφείο	4 ώρες	2 ώρες	400 ώρες
Στιλβωτήριο	4 ώρες	3 ώρες	420 ώρες
Κέρδος ανά Μονάδα Προϊόντος	140€	100€	

Μαθηματικό Μοντέλο

Μεγιστοποίηση $140\,X_1 + 100\,X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

Υπό τους περιορισμούς:

$$
\begin{array}{ll}
(\Xi) & 8X_1 + 8X_2 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 960 \\
(\mathrm{B}) & 4X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 = 400 \\
(\Sigma) & 4X_1 + 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 = 420 \\
 & X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ S_1 \geq 0,\ S_2 \geq 0,\ S_3 \geq 0
\end{array}
$$

Βέλτιστη λύση Μεθόδου Simplex

Συντ. Κέρδους c_j →		140	100	0	0	0	Ποσότητα
↓	Βασικές Μεταβλητές	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B_i
0	S_1	0	0	1	2	-4	80
140	X_1	1	0	0	3/4	-1/2	90
100	X_2	0	1	0	-1	1	20
	Z_j	140	100	0	5	30	14600
	$C_j - Z_j$	0	0	0	-5	-30	

Φυσική Ερμηνεία Βέλτιστης Λύσης

Παραγωγή	Διαθέσιμοι Πόροι
$X_1 = 90$ τραπέζια	$S_1 = 80$ μη χρησιμοποιηθείσες ώρες ξυλουργείου
$X_2 = 20$ καρέκλες	$S_2 = 0$ χρησιμοποιηθείσες ώρες βαφείου
	$S_3 = 0$ χρησιμοποιηθείσες ώρες στιλβωτηρίου
Κέρδος	14.600€

Δεσμευτικοί και Μη Δεσμευτικοί Περιορισμοί

- Οι περιορισμοί (Β) και (Σ) του προβλήματος, που αντιστοιχούν στις ώρες βαφείου και στιλβωτηρίου καλούνται **δεσμευτικοί περιορισμοί** διότι είναι αυτοί που καθορίζουν τις τιμές των μεταβλητών και η τομή τους προσδιορίζει το σημείο της βέλτιστης λύσης (Σχήμα 9)
- Αντίθετα, ο περιορισμός (Ξ) είναι μη **δεσμευτικός** δεδομένου ότι δεν προσδιορίζει τη βέλτιστη λύση (η ευθεία που αντιστοιχεί στον περιορισμό των ωρών ξυλουργείου βρίσκεται πάνω από το βέλτιστο σημείο Γ - σχήμα 9)
- Οι μη δεσμευτικοί περιορισμοί δεν περιορίζουν τη βέλτιστη λύση με την έννοια ότι ακόμα και αν δεν υπήρχαν, η βέλτιστη λύση δεν θα άλλαζε
- Οι μεταβλητές περιθωρίου που αντιστοιχούν στους δεσμευτικούς περιορισμούς έχουν την τιμή μηδέν, ενώ για τους μη δεσμευτικούς περιορισμούς οι αντίστοιχες μεταβλητές περιθωρίου έχουν θετικές τιμές.

Δεσμευτικοί και Μη Δεσμευτικοί Περιορισμοί

•Εφόσον λοιπόν στα τμήματα βαφείου και στιλβωτηρίου έχουν χρησιμοποιηθεί όλες οι διαθέσιμες ώρες, αν στα τμήματα αυτά προστεθεί ή αφαιρεθεί έστω και μία ώρα εργασία», η βέλτιστη λύση θα άλλαζε

•Αντίθετα, η βέλτιστη λύση δεν θα άλλαζε αν είχαμε μία επιπλέον ώρα ή μία ώρα λιγότερη στο τμήμα ξυλουργείου, διότι ήδη περισσεύουν 80 ώρες, οπότε αν μεν είχαμε 1 ώρα λιγότερη θα περίσσευαν 79 ώρες και αν είχαμε 1 ώρα περισσότερη θα περίσσευαν 81 ώρες

•Επομένως, η αύξηση των ωρών στο τμήμα ξυλουργείου δεν δικαιολογείται με οικονομικούς όρους

• Θα μπορούσαμε μάλιστα να τις ελαττώσουμε έως και 80 χωρίς αυτό να έχει καμία επίπτωση στη βέλτιστη παραγωγή και στα κέρδη