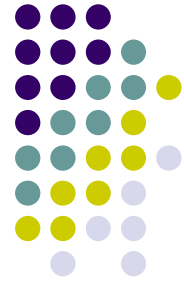


Προσδιορισμός Βέλτιστης Λύσης στα Προβλήματα Μεταφοράς

Η μέθοδος Stepping Stone



- ✓ Η μέθοδος **Stepping Stone** είναι μία επαναληπτική διαδικασία για τον προσδιορισμό της βέλτιστης λύσης σε ένα πρόβλημα μεταφοράς.
- ✓ Ο αριθμός των διαδρομών στις βασικές εφικτές λύσεις του προβλήματος είναι ίσος (ή μικρότερος) από το άθροισμα του αριθμού των "πηγών προέλευσης" συν τον αριθμό των "προορισμών" μειωμένο κατά 1

Έλεγχος λύσης με τη μέθοδο Stepping Stone

- ✓ Η βασική αρχή της μεθόδου είναι ότι ελέγχει την πιθανή μείωση του κόστους μιας συγκεκριμένης λύσης από τη χρήση διαδρομών που δεν έχουν επιλεγεί στην τρέχουσα λύση.
- Θεωρούμε, για παράδειγμα, την αρχική λύση που προέκυψε από τη μέθοδο της ΒΔ Γωνίας.

Αρχική Λύση με Μέθοδο “ΒΔ Γωνίας” για το πρόβλημα ΛΟΥΤΡΟΦΙΝ



ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 200	5 150	3	9	350
Βόλος	6	3 150	4 150	7	300
Θεσ/νίκη	5	4	6 250	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

• Σε κάθε **βήμα** της μεθόδου **Stepping Stone**, εξετάζεται η δυνατότητα εύρεσης μιας καλύτερης λύσης με αλλαγή μίας εκ των διαδρομών που χρησιμοποιούνται με μία από αυτές που δεν χρησιμοποιούνται

• Το ερώτημα που τίθεται είναι το εξής:

Αν χρησιμοποιηθεί μια διαδρομή που δεν συμπεριλαμβάνεται στη τρέχουσα λύση (όπως η διαδρομή Πάτρα-Αθήνα ή κάποια άλλη), ποια θα είναι η επίπτωση στο συνολικό κόστος μεταφοράς;

Υπολογισμός οριακών αλλαγών στο κόστος μεταφοράς



•Ο υπολογισμός της **επίπτωσης στο συνολικό κόστος μεταφοράς** για κάθε διαδρομή που **δεν συμπεριλαμβάνεται στη τρέχουσα λύση**, γίνεται με τα εξής βήματα:

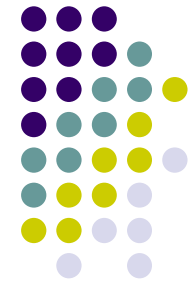
1. Επιλέγουμε μια διαδρομή που δεν συμπεριλαμβάνεται στην τρέχουσα λύση
2. Ξεκινώντας από το κελί της διαδρομής που επιλέχθηκε, δημιουργούμε έναν κλειστό βρόγχο, ο οποίος διέρχεται από διαδρομές που ήδη χρησιμοποιούνται, ακολουθεί είτε οριζόντια ή κάθετη πορεία και επιστρέφει στο ίδιο κελί
3. Ξεκινώντας με το σημείο + στο κελί της διαδρομής που επιλέξαμε, τοποθετούμε εναλλάξ τα σημεία - και + σε κάθε γωνία του βρόγχου. Ο αριθμός των + σε κάθε σειρά και σε κάθε στήλη του πίνακα πρέπει να είναι ίσος με τον αντίστοιχο αριθμό των -
4. Υπολογίζουμε την οριακή μεταβολή του κόστους στη συγκεκριμένη διαδρομή, προσθέτοντας το κόστος όλων των διαδρομών στις οποίες έχει τοποθετηθεί το σημείο +, και αφαιρώντας το κόστος όλων των διαδρομών στις οποίες έχει τοποθετηθεί το σημείο -
5. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1 έως 4 για όλες τις διαδρομές που δεν συμπεριλαμβάνονται στη λύση, ώστε για καθεμία από αυτές να υπολογίσουμε την οριακή αλλαγή του κόστους, εφόσον συμπεριληφθούν στη λύση. Αν για όλες τις διαδρομές η οριακή αλλαγή του κόστους είναι θετική (αύξηση κόστους), τότε η τρέχουσα λύση είναι η βέλτιστη

Stepping Stone: 1^η επανάληψη

• Οι έξι μη χρησιμοποιούμενες διαδρομές είναι: Πάτρα-Αθήνα, Πάτρα-Ηράκλειο, Βόλος-Ιωάννινα, Βόλος Ηράκλειο, Θεσσαλονίκη-Ιωάννινα και Θεσσαλονίκη-Λάρισα

• Θεωρούμε την πρώτη μη επιλεχθείσα διαδρομή, Πάτρα-Αθήνα

• Ξεκινώντας από το κελί της διαδρομής αυτής, μπορούμε εύκολα να χαράξουμε έναν κλειστό βρόγχο που να διέρχεται από επιλεγείσες διαδρομές ως εξής:
Πάτρα-Αθήνα -► Βόλος-Αθήνα -► Βόλος-Λάρισα -► Πάτρα-Λάρισα



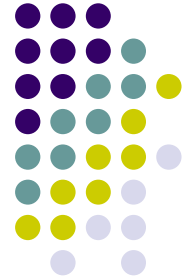
ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	200	150	150	9	350
Βόλος		150	150	7	300
Θεσ/νίκη			250	200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

• Ποιο είναι το νόημα του κλειστού βρόγχου και της τοποθέτησης των σημείων + και - στις γωνίες του βρόγχου;



- Καταρχήν πρέπει να θυμηθούμε ότι θέλουμε να ελέγξουμε τη μεταβολή που θα προκύψει στο κόστος μεταφοράς αν χρησιμοποιηθεί η διαδρομή Πάτρα-Αθήνα αντί μιας άλλης από αυτές που έχουν ήδη επιλεγεί.
- Επομένως, αν εκχωρήσουμε φορτίο 1 μονάδος στη διαδρομή Πάτρα-Αθήνα, θα πρέπει αυτό να αφαιρεθεί από κάποια άλλη διαδρομή που έχει σαν προορισμό την Αθήνα έτσι ώστε το συνολικό φορτίο που θα μεταφερθεί στην Αθήνα να παραμείνει στα 400 τεμάχια, όσο η συνολική ζήτηση
- Οι δύο άλλες διαδρομές με προορισμό την Αθήνα είναι οι Βόλος-Αθήνα και Θεσσαλονίκη-Αθήνα
- Επιλέγουμε τη διαδρομή Βόλος-Αθήνα και τοποθετούμε το σημείο - σε αυτή τη διαδρομή (εάν επιλέξουμε τη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Αθήνα θα φθάναμε σε αδιέξοδο, όπως θα εξηγήσουμε στη συνέχεια)
- Εφόσον όμως θα μειώσουμε το φορτίο στη διαδρομή Βόλος-Αθήνα, θα πρέπει να αυξήσουμε αντίστοιχα το φορτίο στη διαδρομή Βόλος-Λάρισα, έτσι ώστε να μην μεταβληθεί η μεταφερόμενη από το Βόλο ποσότητα
- Τοποθετούμε το σημείο + στη διαδρομή Βόλος-Λάρισα
- Αντίστοιχα, θα πρέπει να μειωθεί το αρχικά εκχωρηθέν φορτίο στη διαδρομή Πάτρα-Λάρισα, ώστε το συνολικό φορτίο με προορισμό τη Λάρισα να παραμείνει το ίδιο
- ❖ Με αυτό τον τρόπο κλείνει ο βρόγχος και υπάρχει ισορροπία των + και - σε κάθε σειρά και σε κάθε στήλη του πίνακα

Τοποθέτηση των + / - στη μέθοδο Stepping Stone



- Υπάρχει πάντα ένα κλειστός βρόχος που ξεκινά και καταλήγει σε ένα κελί που δεν έχει επιλεγεί περνώντας μόνο από κελιά που έχουν επιλεγεί
 - Η επιλογή κελιών γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι δυνατή πάντα η αντιστάθμιση των + και - σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη
 - Αν για παράδειγμα, επιλέγαμε το κελί Θεσσαλονίκη-Αθήνα αντί του Βόλος-Αθήνα για να τοποθετήσουμε το σημείο -, τότε αναγκαστικά θα επιλέγαμε το κελί Θεσσαλονίκη - Ηράκλειο για να τοποθετήσουμε το σημείο +
 - Στο σημείο αυτό φτάνουμε σε αδιέξοδο, διότι στην τελευταία στήλη δεν υπάρχει άλλο κελί που έχει ήδη επιλεγεί στην τρέχουσα λύση για να τοποθετηθεί το - ώστε να αντισταθμιστούν όλα τα + με -
- ✓ Επομένως, η επιλογή του κελιού **Βόλος-Αθήνα** ήταν η **μοναδική δυνατή**



Ο υπολογισμός της μεταβολής που προκύπτει στο κόστος από τη χρησιμοποίηση της διαδρομής Πάτρα-Λάρισα:

Αν μία μονάδα φορτίου μεταφερθεί στη διαδρομή Πάτρα-Λάρισα, τότε θα έχουμε σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση τις εξής αλλαγές φορτίων στις διαδρομές που χρησιμοποιούνται ήδη:

Διαδρομή		Μεταβολή σε μεταφερόμενη ποσότητα	Αλλαγή Κόστους
Πάτρα-Αθήνα	Νέα	Αύξηση (+1)	+3
Βόλος-Αθήνα	Επιλεγείσα	Μείωση (-1)	-4
Βόλος-Λάρισα	Επιλεγείσα	Αύξηση (+1)	+3
Πάτρα-Λάρισα	Επιλεγείσα	Μείωση (-1)	-5
Συνολική Αλλαγή Κόστους			-3

- Επομένως, τυχόν επιλογή της διαδρομής Πάτρα-Αθήνα θα οδηγούσε σε οριακή μείωση του κόστους κατά 3 μονάδες για κάθε μονάδα μεταφερόμενα ποσότητας
- Η οριακή ανάλυση του κόστους πρέπει να εξεταστεί με τον ίδιο τρόπο και για τις υπόλοιπες μη χρησιμοποιούμενες διαδρομές στην αρχική λύση της "ΒΔ Γωνίας"
- Τα αποτελέσματα έχουν ως εξής:

Πάτρα–Ηράκλειο.

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	200	150			350
Βόλος		150	150		300
Θεσ/νίκη			250	200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Μεταβολή Κόστους: $+9 - 8 + 6 - 4 + 3 - 5 = +1$

Βόλος–Ιωάννινα:

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	200	150			350
Βόλος		150	150		300
Θεσ/νίκη			250	200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Μεταβολή Κόστους: $+6 - 5 + 5 - 3 = +3$

Βόλος–Ηράκλειο:

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	200	150			350
Βόλος		150	150		300
Θεσ/νίκη			250	200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Μεταβολή Κόστους: $+7-8 + 6-4 = +1$

Θεσσαλονίκη–Ιωάννινα.

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	200	150			350
Βόλος		150	150		300
Θεσ/νίκη			250	200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Μεταβολή Κόστους: $+5-6 + 4-3 + 5-5 = 0$

Θεσσαλονίκη-Λάρισα:

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 200	5 150	3	9	350
Βόλος	6	3 - 150	4 + 150	7	300
Θεσ/νίκη	5	4 +	6 - 250	8	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Μεταβολή Κόστους: $+4-6 + 4-3 = -1$

Συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα έχουν ως εξής:

Νέα Διαδρομή	Οριακή Μεταβολή Κόστους
Πάτρα-Αθήνα	-3
Πάτρα-Ηράκλειο	+1
Βόλος-Ιωάννινα	+3
Βόλος-Ηράκλειο	+1
Θεσσαλονίκη-Ιωάννινα	0
Θεσσαλονίκη-Λάρισα	-1



- Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, οι επιλογές των διαδρομών Πάτρα-Αθήνα ή Θεσσαλονίκη-Λάρισα μπορεί να οδηγήσουν σε μείωση του κόστους μεταφοράς

- Η τρέχουσα λύση επιδέχεται βελτίωση

- Από τις δύο διαδρομές που η χρήση τους μπορεί να μειώσει το συνολικό κόστος μεταφοράς, επιλέγουμε αυτή με το μικρότερο αρνητικό συντελεστή, δηλαδή τη διαδρομή Πάτρα-Αθήνα, η επιλογή της οποίας θα επιφέρει τη μεγαλύτερη μείωση κόστους ανά μονάδα μεταφερόμενα ποσότητας

Οι συντελεστές οριακής μεταβολής του κόστους στη μέθοδο **Stepping Stone**

- ✓ Τα βήματα της επαναληπτικής μεθόδου **Stepping Stone** είναι αντίστοιχα με τα βήματα της μεθόδου **Simplex**

- Οι συντελεστές της οριακής μεταβολής του κόστους μεταφοράς για κάθε διαδρομή που δεν έχει χρησιμοποιηθεί στην τρέχουσα λύση, που υπολογίστηκαν παραπάνω, αντιστοιχούν στις τιμές της γραμμής $C_j - Z_j$ αν το πρόβλημα λυθεί με τη μέθοδο **Simplex**

- Και η οικονομική τους ερμηνεία είναι αντίστοιχη

Βελτίωση της Λύσης

Καταλήξαμε στο ότι η επιλογή και χρησιμοποίηση τηw διαδρομής Πάτρα-Αθήνα θα οδηγήσει σε μείωση του κόστους και μάλιστα γνωρίζουμε ότι για κάθε μονάδα φορτίου που θα μεταφερθεί στη διαδρομή αυτή το κόστος θα μειωθεί κατά 3 μονάδες



Τρία άλλα σημεία τα οποία πρέπει να λάβουμε υπ' όψη είναι τα εξής:

1. Ο αριθμός των διαδρομών που θα χρησιμοποιηθούν δεν πρέπει να ξεπερνά τις 6 ($4+3-1$), όπως εξηγήσαμε και προηγουμένως
Επομένως, χρησιμοποιώντας τη διαδρομή Πάτρα-Αθήνα θα πρέπει να αποκλειστεί μια από τις ήδη χρησιμοποιούμενες διαδρομές
2. Εφόσον το συνολικό κόστος μεταφοράς μειώνεται κατά 3 μονάδες για κάθε μονάδα φορτίου που θα εκχωρηθεί στη διαδρομή Πάτρα-Αθήνα, θα πρέπει να επιδιώξουμε την εκχώρηση όσο το δυνατόν μεγαλύτερης ποσότητας φορτίου στη διαδρομή αυτή
3. Σύμφωνα με τον κλειστό βρόγχο του πίνακα που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως για τον υπολογισμό των οριακών μεταβολών του κόστους μεταφοράς για κάθε νέα-μη χρησιμοποιούμενη διαδρομή, κάθε ανάθεση φορτίου στη διαδρομή Πάτρα-Αθήνα, οδηγεί σε μεταβολές των μεταφερόμενων ποσοτήτων στις άλλες διαδρομές. Συγκεκριμένα για κάθε ποσότητα φορτίου που θα εκχωρηθεί στη διαδρομή Πάτρα-Αθήνα, η ίδια ποσότητα φορτίου θα αφαιρεθεί από τις διαδρομές Πάτρα-Λάρισα και Βόλος-Αθήνα (σημείο -) ενώ αντίθετα το ίδιο φορτίο θα προστεθεί στη διαδρομή Βόλος-Λάρισα (σημείο +).

Εκχώρηση φορτίου στη νέα διαδρομή



- Το πρόβλημα εντοπίζεται στις διαδρομές από τις οποίες θα αφαιρεθεί φορτίο
- Από τη διαδρομή Πάτρα-Λάρισα η μεγαλύτερη ποσότητα φορτίου που μπορεί να αφαιρεθεί είναι 150 μονάδες, ενώ από τη διαδρομή Βόλος-Αθήνα μπορούν να αφαιρεθούν επίσης έως 150 μονάδες
- Επομένως, η μεγαλύτερη ποσότητα που μπορεί να εκχωρηθεί στη νέα διαδρομή Πάτρα-Αθήνα είναι 150 μονάδες και οι αλλαγές στα φορτία των διαδρομών έχουν ως εξής:

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 200	- 5 150-150=0	+ 3 150	9	350
Βόλος	6	+ 3 150+150=300	- 4 150-150=0	7	300
Θεσ/νίκη	5	4	6 250	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

που δίνουν την παρακάτω βελτιωμένη λύση:

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 200	5	3 150	9	350
Βόλος	6	3 300	4 0	7	300
Θεσ/νίκη	5	4	6 250	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Το κόστος της βελτιωμένης λύσης είναι:

Συνολικό Κόστος Βελτιωμένης Λύσης ΒΔ Γωνίας

Διαδρομή	Μεταφερόμενη Ποσότητα	Κόστος Μονάδος	Συνολικό Κόστος
Πάτρα-Ιωάννινα	200	5	1000
Πάτρα-Αθήνα	150	3	450
Βόλος-Λάρισα	300	3	900
Θεσσαλονίκη-Αθήνα	250	6	1500
Θεσσαλονίκη-Ηράκλειο	200	8	1600
Σύνολο			<u>5450</u>

✓ Ο αλγεβρικός υπολογισμός του κόστους επαληθεύεται και από την οριακή μείωση του κόστους λόγω της επιλογής της διαδρομής Πάτρα-Αθήνα

• Είχαμε βρει ότι για κάθε μεταφερόμενη μονάδα το κόστος μειώνεται κατά 3 μονάδες, επομένως η συνολική μείωση για εκχωρούμενο φορτίο 150 μονάδων είναι 450 μονάδες μικρότερο από το κόστος της προηγούμενα λύσης που ανέρχονταν σε 5900

Stepping Stone και Simplex

Η αντιστοιχία των βημάτων της επαναληπτικής μεθόδου **Stepping Stone** και της μεθόδου **Simplex** συνεχίζεται:

- Σε κάθε βήμα η λύση βελτιώνεται με την αλλαγή κάποιας εκ των χρησιμοποιούμενων διαδρομών με μία από τις μη-χρησιμοποιούμενες
- Οι χρησιμοποιούμενες διαδρομές αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές του πίνακα **Simplex**, ενώ οι μη-χρησιμοποιούμενες στις μη-βασικές
- Οι υπολογισμοί στη μέθοδο **Stepping Stone** είναι πιο απλοί, λόγω του ότι οι συντελεστές των μεταβλητών στους περιορισμούς (τεχνολογικοί συντελεστές) είναι όλοι είτε μοναδιαίοι είτε μηδενικοί

Stepping Stone: 2η επανάληψη



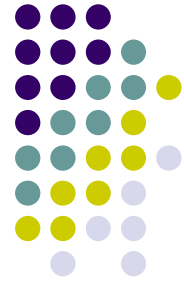
- Η πρώτη επανάληψη της μεθόδου **Stepping Stone** έδωσε τη λύση της προηγούμενης παραγράφου
- Στη λύση αυτή χρησιμοποιούνται μόνο 5 διαδρομές, ενώ 7 διαδρομές δεν χρησιμοποιούνται

Η περίπτωση που χρησιμοποιούνται λιγότερες από $m+n-1$ διαδρομές

- Στην περίπτωση που οι διαδρομές στη λύση είναι λιγότερες από $m+n-1$ (δηλαδή 6 στη συγκεκριμένη περίπτωση), **μία από τις διαδρομές με μηδενικό φορτίο**, από αυτές που μηδενίστηκαν ταυτόχρονα σε κάποια συγκεκριμένη εκχώρηση, θεωρείται για την δημιουργία των κλειστών βρόγχων ως διαδρομή που έχει επιλεγεί με φορτίο 0
- Στην περίπτωση του παραδείγματος μπορούμε να θεωρήσουμε τη διαδρομή Βόλος-Αθήνα ως επιλεγείσα.

Εξετάζουμε τώρα τις οριακές μεταβολές του κόστους για τις διαδρομές που δεν έχουν επιλεγεί με τον ίδιο τρόπο, όπως και στην πρώτη επανάληψη της μεθόδου **Stepping Stone**

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων	
Πάτρα	200	5	5	3	9	350
Βόλος		6	3	4	7	300
Θεσ/νίκη		5	4	6	8	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200		1100



- Οι κλειστοί βρόγχοι για κάθε διαδρομή φαίνονται στον παραπάνω πίνακα μεταφοράς
- Στα κελιά που αντιστοιχούν σε μη χρησιμοποιούμενες διαδρομές έχει τοποθετηθεί το σημείο +
- Ακολουθώντας τον κάθε βρόγχο μπορούμε να τοποθετήσουμε εναλλάξ τα σημεία - και +, ώστε σε κάθε περίπτωση να υπάρχει αντιστάθμιση των + και - σε κάθε γραμμή και στήλη

• Τα αποτελέσματα με τους υπολογισμούς της οριακής μεταβολής του συνολικού κόστους μεταφοράς έχουν ως εξής:



Μη επιλεγείσα διαδρομή	Κόστος μη επιλεγείσας διαδρομής	Υπόλοιπες διαδρομές κλειστού βρόγχου	Μεταβολές κόστους επιλεχθέντων διαδρομών	Οριακή μεταβολή κόστους
Πάτρα-Λάρισα	+5	Πάτρα-Αθήνα Βόλος-Αθήνα Βόλος-Λάρισα	-3 +4 -3	+3
Πάτρα-Ηράκλειο	+9	Θεο/νίκη-Ηράκλειο Θεο/νίκη-Αθήνα Πάτρα-Αθήνα	-8 +6 -3	+4
Βόλος-Ιωάννινα	+6	Πάτρα-Ιωάννινα Πάτρα-Αθήνα Βόλος-Αθήνα	-5 +3 -4	0
Βόλος-Ηράκλειο	+7	Θεο/νίκη-Ηράκλειο Θεο/νίκη-Αθήνα Βόλος-Αθήνα	-8 +6 -4	+1
Θεο/νίκη-Ιωάννινα	+5	Πάτρα-Ιωάννινα Πάτρα-Αθήνα Θεο/νίκη-Αθήνα	-5 +3 -4	-1
Θεο/νίκη-Λάρισα	+4	Βόλος-Λάρισα Βόλος-Αθήνα Θεο/νίκη-Αθήνα	-3 +4 -6	-1

- Παρατηρούμε ότι η επιλογή της διαδρομής Θεσσαλονίκη-Λάρισα, όπως και της διαδρομής Θεσσαλονίκη-Ιωάννινα, θα μειώσει το συνολικό κόστος μεταφοράς κατά 1 μονάδα ανά μονάδα μεταφερόμενης ποσότητας
- Εφόσον η οριακή μεταβολή του κόστους είναι ίδια, επιλέγουμε μία εκ των δυο τυχαία, έστω τη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Λάρισα
- Για να αποφασίσουμε ποια διαδρομή θα αντικατασταθεί από την προσθήκη της διαδρομής Θεσσαλονίκη-Λάρισα στις διαδρομές που θα χρησιμοποιηθούν, εξετάζουμε τις αντίστοιχες μεταβολές στον πίνακα του προβλήματος μεταφοράς



ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων	
Πάτρα	200	5	5	3	9	350
Βόλος	6	3	4	7	300	
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450	
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100	

Additional annotations in the table:

- A horizontal dotted line connects the '300' in the 'Βόλος' row, 'Λάρισα' column to the '0' in the 'Βόλος' row, 'Αθήνα' column. A '-' sign is above the '300' and a '+' sign is above the '0'.
- A vertical dotted line connects the '0' in the 'Βόλος' row, 'Αθήνα' column to the '250' in the 'Θεσ/νίκη' row, 'Αθήνα' column. A '+' sign is to the left of the '0' and a '-' sign is to the left of the '250'.
- A horizontal dotted line connects the '250' in the 'Θεσ/νίκη' row, 'Αθήνα' column to the '4' in the 'Θεσ/νίκη' row, 'Λάρισα' column. A '+' sign is to the left of the '250' and a '-' sign is to the left of the '4'.

- Το μέγιστο φορτίο που μπορεί να εκχωρηθεί στη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Λάρισα, περιορίζεται από τις διαδρομές με πρόσημο –
- Η μικρότερη τιμή στα κελιά με το σημείο - καθορίζει το φορτίο που θα εκχωρηθεί στη νέα διαδρομή που έχει επιλεγεί, στην προκειμένη περίπτωση τη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Λάρισα
- Από τις δύο διαδρομές του πίνακα με πρόσημο -, τις Βόλος-Λάρισα και Θεσσαλονίκη-Αθήνα το μικρότερο φορτίο βρίσκεται στη δεύτερη
- Επομένως, εκχωρούμε 250 μονάδες στη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Λάρισα, το οποίο αφαιρείται από τις διαδρομές Βόλος-Λάρισα και Θεσσαλονίκη-Αθήνα, και προστίθεται στη διαδρομή Βόλος-Αθήνα



Ο νέος πίνακας μεταφοράς:

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 200	5	3 150	9	350
Βόλος	6	3 50	4 250	7	300
Θεσ/νίκη	5	4 250	6	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Το κόστος της νέας βελτιωμένης λύσης είναι:

Συνολικό Κόστος Βελτιωμένης Λύσης ΒΔ Γωνίας			
Διαδρομή	Μεταφερόμενη Ποσότητα	Κόστος Μονάδος	Συνολικό Κόστος
Πάτρα-Ιωάννινα	200	5	1000
Πάτρα-Αθήνα	150	3	450
Βόλος-Λάρισα	50	3	150
Βόλος-Αθήνα	250	4	1000
Θεσσαλονίκη-Λάρισα	250	4	1000
Θεσσαλονίκη-Ηράκλειο	200	8	<u>1600</u>
Σύνολο			<u>5200</u>

- Όπως και στο προηγούμενο βήμα, ο αλγεβρικός υπολογισμός του κόστους επαληθεύεται και από την οριακή μείωση του συνολικού κόστους λόγω της επιλογής της διαδρομής Θεσσαλονίκη-Λάρισα
- Εφόσον για κάθε μεταφερόμενη μονάδα στη διαδρομή αυτή, το συνολικό κόστος μειώνεται κατά 1 μονάδα, η συνολική μείωση για εκχωρούμενο φορτίο 250 μονάδων είναι 250 μονάδες, μειώνοντας το κόστος από 5.450 σε 5.200

Stepping Stone: 3η επανάληψη



Η λύση που προέκυψε με το τέλος του 2ου επαναληπτικού βήματος της μεθόδου **Stepping Stone**, δίνεται στον πίνακα μεταφοράς που ακολουθεί:

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 200	5	3 150	9	350
Βόλος	6	3 50	4 250	7	300
Θεσ/νίκη	5	4 250	6	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

✓ Ο υπολογισμός των οριακών μεταβολών του κόστους για τις διαδρομές που δεν έχουν επιλεγεί γίνεται με τον ίδιο τρόπο όπως και στις προηγούμενες επαναλήψεις της μεθόδου **Stepping Stone**. Οι κλειστοί βρόγχοι για κάθε διαδρομή δίνονται στον παρακάτω πίνακα με φορά σύμφωνα με την κίνηση των δεικτών του ρολογιού:

Μη επιλεγείσα διαδρομή	Κόστος μη επιλεγείσας διαδρομής	Υπόλοιπες διαδρομές κλειστού βρόχου	Μεταβολές κόστους επιλεχθέντων διαδρομών	Οριακή μεταβολή κόστους
Πάτρα-Λάρισα	+5	Πάτρα-Αθήνα Βόλος-Αθήνα Βόλος-Λάρισα	-3 +4 -3	+3
Πάτρα-Ηράκλειο	+9	Θεσ/νίκη-Ηράκλειο Θεσ/νίκη-Λάρισα Βόλος-Λάρισα Βόλος-Αθήνα Πάτρα-Αθήνα	-8 +4 -3 +4 -3	+3
Βόλος-Ιωάννινα	+6	Πάτρα-Ιωάννινα Πάτρα-Αθήνα Βόλος-Αθήνα	-5 +3 -4	0
Βόλος-Ηράκλειο	+7	Θεσ/νίκη-Ηράκλειο Θεσ/νίκη-Λάρισα Βόλος-Λάρισα	-8 +4 -3	0
Θεσ/νίκη-Ιωάννινα	+5	Πάτρα-Ιωάννινα Πάτρα-Αθήνα Βόλος-Αθήνα Βόλος-Λάρισα Θεσ/νίκη-Λάρισα	-5 +3 -4 +3 -4	-2
Θεσ/νίκη-Αθήνα	+6	Θεσ/νίκη-Λάρισα Βόλος-Λάρισα Βόλος-Αθήνα	-4 +3 -4	+1

- Παρατηρούμε ότι υπάρχει μία μόνο διαδρομή με αρνητικό συντελεστή οριακού κόστους, αυτή της Θεσ/νίκης-Ιωάννινα, η οποία πρέπει να επιλεγεί
- Για να αποφασίσουμε ποια διαδρομή θα αντικατασταθεί από τη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Ιωάννινα, εξετάζουμε τις αντιστοιχεί μεταβολές στον πίνακα του προβλήματος μεταφοράς

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5 - 200	5	3 + 150	9	350
Βόλος	6	+ 3 50	- 4 250	7	300
Θεσ/νίκη	+ 5	- 4 250	6	8 200	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100



- Για να προσδιορίσουμε το φορτίο που θα εκχωρηθεί στη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Ιωάννινα εξετάζουμε τις διαδρομές που χαρακτηρίζονται με πρόσημο -
- Η μικρότερη ποσότητα βρίσκεται στη διαδρομή Πάτρα-Ιωάννινα
- Επομένως, εκχωρούμε 200 μονάδες στη διαδρομή Θεσσαλονίκη-Ιωάννινα, το οποίο αφαιρείται από τις διαδρομές Πάτρα-Ιωάννινα, Βόλος-Αθήνα και Θεσσαλονίκη-Λάρισα (πρόσημο -) και προστίθεται στις διαδρομές Πάτρα-Αθήνα και Βόλος-Λάρισα (πρόσημο +)

Ο νέος πίνακας μεταφοράς:



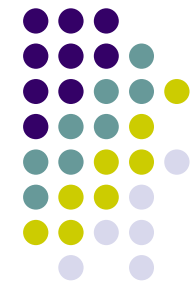
ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5	5	3	9	350
Βόλος	6	3	4	7	300
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Το κόστος της νέας βελτιωμένης λύσης είναι:

Συνολικό Κόστος Βελτιωμένης Λύσης ΒΔ Γωνίας			
Διαδρομή	Μεταφερόμενη Ποσότητα	Κόστος Μονάδος	Συνολικό Κόστος
Πάτρα-Αθήνα	350	3	1050
Βόλος-Λάρισα	250	3	750
Βόλος-Αθήνα	50	4	200
Θεσσαλονίκη-Ιωάννινα	200	5	1000
Θεσσαλονίκη-Λάρισα	50	4	200
Θεσσαλονίκη-Ηράκλειο	200	8	1600
Σύνολο			<u>4800</u>

- Όπως και με στο προηγούμενο βήμα, ο αλγεβρικός υπολογισμός του κόστους επαληθεύεται και από την οριακή μείωση του κόστους λόγω της επιλογής της διαδρομής Θεσσαλονίκη-Ιωάννινα
- Εφόσον για κάθε μεταφερόμενη μονάδα το κόστος μειώνεται κατά 2 μονάδες, η συνολική μείωση για εκχωρούμενο φορτίο 200 μονάδων είναι 400 μονάδες από το κόστος της προηγούμενης λύσης που ήταν 5200

Stepping Stone: 4η επανάληψη



•Εξετάζουμε τώρα τις οριακές μεταβολές του κόστους για τις διαδρομές που δεν έχουν επιλεγεί με τον ίδιο τρόπο όπως και στις προηγούμενες επαναλήψεις της μεθόδου **Stepping Stone** :

ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	Ιωάννινα	Λάρισα	Αθήνα	Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
Πάτρα	5	5	3	9	350
Βόλος	6	3	4	7	300
Θεσ/νίκη	5	4	6	8	450
Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

✓ Οι κλειστοί βρόγχοι για κάθε διαδρομή δίνονται στον παρακάτω πίνακα με φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού με τα αποτελέσματα των υπολογισμών της οριακής μεταβολής του συνολικού κόστους μεταφοράς:



• Παρατηρούμε ότι σε όλες τις μη επιλεγείσες διαδρομές της τελευταίας λύσης, ο συντελεστής οριακού κόστους είναι θετικός, επομένως οποιαδήποτε αλλαγή της λύσης με αντικατάσταση μιας εκ των διαδρομών που έχουν επιλεγεί από μία άλλη, θα είχε ως αποτέλεσμα την αύξηση του κόστους

Μη επιλεγείσα διαδρομή	Κόστος μη επιλεγείσας διαδρομής	Υπόλοιπες διαδρομές κλειστού βρόγχου	Μεταβολές κόστους επιλεχθέντων διαδρομών	Οριακή μεταβολή κόστους
Πάτρα-Ιωάννινα	+5	Πάτρα-Αθήνα Βόλος-Αθήνα Βόλος-Λάρισα Θεσ/νίκη-Λάρισα Θεσ/νίκη-Ιωάννινα	-3 +4 -3 +4 -5	+2
Πάτρα-Λάρισα	+5	Πάτρα-Αθήνα Βόλος-Αθήνα Βόλος-Λάρισα	-3 +4 -3	+3
Πάτρα-Ηράκλειο	+9	Θεσ/νίκη-Ηράκλειο Θεσ/νίκη-Λάρισα Βόλος-Λάρισα Βόλος-Αθήνα Πάτρα-Αθήνα	-8 +4 -3 +4 -3	+3
Βόλος-Ιωάννινα	+6	Βόλος-Λάρισα Θεσ/νίκη-Λάρισα Θεσ/νίκη-Ιωάννινα	-3 +4 -5	+2
Βόλος-Ηράκλειο	+7	Θεσ/νίκη-Ηράκλειο Θεσ/νίκη-Λάρισα Βόλος-Λάρισα	-8 +4 -3	0
Θεσ/νίκη-Αθήνα	+6	Θεσ/νίκη-Λάρισα Βόλος-Λάρισα Βόλος-Αθήνα	-4 +3 -4	+1

Κριτήριο βέλτιστης λύσης στα προβλήματα μεταφοράς

✓ Όταν οι συντελεστές οριακού κόστους για όλες τις διαδρομές που δεν έχουν επιλεγεί στην τρέχουσα λύση είναι μη αρνητικοί, τότε η τρέχουσα λύση είναι βέλτιστη

