Η Μέθοδος Αναθεωρημένης Εκχώρησης (MODI)

•Η μέθοδος **MODI** επιτρέπει τον υπολογισμό των οριακών μεταβολών στο συνολικό κόστος μεταφοράς για κάθε μη επιλεγείσα διαδρομή με αλγεβρικό τρόπο, χωρίς τη διαδικασία σχηματισμού των κλειστών βρόγχων, όπως στη μέθοδο **Stepping Stone**

•Με αυτό τον τρόπο, όταν προσδιοριστεί η διαδρομή που επιφέρει τη μεγαλύτερη μείωση στο συνολικό κόστος μεταφοράς (αν υπάρχει), είναι απαραίτητη πλέον η χάραξη ενός μόνο κλειστού βρόγχου που θα αφορά τη συγκεκριμένη διαδρομή

•Η εφαρμογή της μεθόδου **MODI** ξεκινά από μια οποιαδήποτε αρχική λύση του προβλήματος μεταφοράς (όπως και η **Stepping Stone**) και προσδιορίζει μια νέα λύση με μικρότερο κόστος (αν υπάρχει) μέσω των εξής βημάτων:

1. Ορίζουμε τις παρακάτω μεταβλητές ως εξής:

R_i = μεταβλητή για τη σειρά i (πηγή προέλευσης).

K_j = μεταβλητή για τη στήλη j (προορισμού).

C_{ij} = το κόστος της αντίστοιχης διαδρομής (από τον πίνακα κόστους μεταφοράς.

2. Οι τιμές των R_i και K_j υπολογίζονται από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων που αντιστοιχούν στα κελιά των διαδρομών που έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί στην τρέχουσα λύση.

$$R_j + K_j = C_{ij}$$

Με αυτό τον τρόπο ορίζεται ένα σύστημα με $m+n-1$ εξισώσεις και $m+n$ αγνώστους.

3. Υπολογίζουμε τις τιμές των μεταβλητών R_j και K_j θέτοντας $R_1=0$ και λύνοντας το σύστημα ως προς τις υπόλοιπες μεταβλητές.

4. Υπολογίζουμε το δείκτη βελτίωσης (οριακή μεταβολή του συνολικού κόστους μεταφοράς) για κάθε μη χρησιμοποιηθείσα στην τρέχουσα λύση διαδρομή ως εξής:

$$\text{Δείκτης Βελτίωσης} = C_{ij} - (R_i + K_j)$$

5. Επιλέγουμε τη διαδρομή με το μικρότερο αρνητικό δείκτη για να χρησιμοποιηθεί στη νέα βελτιωμένη λύση.

6. Τροποποιούμε τα φορτία των διαδρομών με τον ίδιο τρόπο που ακολουθήθηκε στη μέθοδο Stepping Stone.

Ας εξετάσουμε την εφαρμογή της μεθόδου **MODI** μέσα από το προηγούμενο παράδειγμα.

Θεωρούμε λοιπόν την αρχική λύση που προέκυψε από την εφαρμογή της μεθόδου της "ΒΔ Γωνίας" και τις μεταβλητές R_i και K_j για κάθε γραμμή και στήλη του πίνακα:

	ΠΡΟΣ: ΑΠΟ:	K_1 Ιωάννινα	K_2 Λάρισα	K_3 Αθήνα	K_4 Ηράκλειο	Παραγωγή Εργοστασίων
R_1	Πάτρα	5 200	5 150	3	9	350
R_2	Βόλος	6	3 150	4 150	7	300
R_3	Θεσ/νίκη	5	4	6 250	8 200	450
	Ζήτηση Κέντρων	200	300	400	200	1100

Οι εξισώσεις του βήματος 2 της μεθόδου MODI έχουν ως εξής:

Διαδρομή	Εξίσωση
Πάτρα–Ιωάννινα	$R_1 + K_1 = 5$
Πάτρα–Λάρισα	$R_1 + K_2 = 5$
Βόλος–Λάρισα	$R_2 + K_2 = 3$
Βόλος–Αθήνα	$R_2 + K_3 = 4$
Θεσσαλονίκη–Αθήνα	$R_3 + K_3 = 6$
Θεσσαλονίκη–Ηράκλειο	$R_3 + K_4 = 6$

Θέτοντας $R_1 = 0$, υπολογίζουμε διαδοχικά τις εξής τιμές για τις υπόλοιπες μεταβλητές:

$$R_1 = 0$$

$$\begin{array}{lcl}
0 + K_1 = 5 & \Rightarrow & K_1 = 5 \\
0 + K_2 = 5 & \Rightarrow & K_2 = 5 \\
R_2 + 5 = 3 & \Rightarrow & R_2 = -2 \\
-2 + K_3 = 4 & \Rightarrow & K_3 = 6 \\
R_3 + 6 = 6 & \Rightarrow & R_3 = 0 \\
0 + K_4 = 8 & \Rightarrow & K_4 = 8
\end{array}$$

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε το δείκτη βελτίωσης που εκφράζει την οριακή μεταβολή του συνολικού κόστους για τη χρήση κάθε μίας από τις μη χρησιμοποιηθείσες διαδρομές στην τρέχουσα λύση σύμφωνα με τον τύπο: $C_{ij}-(R_i+K_j)$

Διαδρομή	$C_{ij}-(R_j+K_j)$	
Πάτρα–Αθήνα	$C_{13}-(R_1+K_3)$:	3–0–6 = -3
Πάτρα–Ηράκλειο	$C_{14}-(R_1+K_4)$:	9–0–8 = 1
Βόλος–Ιωάννινα	$C_{21}-(R_2+K_1)$:	6–(-2)–5 = 3
Βόλος–Ηράκλειο	$C_{24}-(R_2+K_4)$:	7 -(-2)–8 = 1
Θεσσαλονίκη–Ιωάννινα	$C_{31}-(R_3+K_1)$:	5–0 -5 = 0
Θεσσαλονίκη–Λάρισα	$C_{32}-(R_3+K_2)$:	4–0–5 = -1

•Η διαδρομή που πρέπει να επιλεγεί είναι η διαδρομή Πάτρα-Αθήνα που αντιστοιχεί στον μικρότερο αρνητικό συντελεστή μεταβολής του κόστους

•Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, οι δείκτες βελτίωσης για κάθε διαδρομή είναι ακριβώς οι ίδιοι που είχαν υπολογιστεί με τους κλειστούς βρόγχους της μεθόδου **Stepping Stone**

•Επομένως το κριτήριο βελτιστοποίησης ικανοποιείται όταν όλοι οι συντελεστές είναι θετικοί ή μηδέν

•Από το σημείο αυτό και μετά, ο προσδιορισμός της επόμενης λύσης ακολουθεί την ίδια μεθοδολογία που περιγράψαμε στη μέθοδο **Stepping Stone**

•Προσδιορίζεται το φορτίο που μπορεί να μεταφερθεί στη διαδρομή Πάτρα-Αθήνα, και ακολούθως τροποποιούνται τα φορτία των άλλων διαδρομών ώστε να καλύπτεται η συνολική διαθέσιμη και η συνολική ζητούμενη ποσότητα, και συνεχίζονται οι επαναλήψεις έως ότου βρεθεί η βέλτιστη λύση

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΑΝΑΘΕΣΕΩΝ

•Πρόβλημα της ανάθεσης ή αντιστοίχησης ή εκχώρησης

•Αποτελεί ένα από τα ειδικής μορφής προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού και ακριβέστερα αποτελεί μια απλούστευση του προβλήματος μεταφοράς

•Προκύπτει όταν οι δραστηριότητες (έργα, γεωγραφικές περιοχές, διαδικασίες) μπορούν να εκτελεστούν από, ή να αντιστοιχηθούν σε m διαφορετικούς πόρους (μηχανήματα, άτομα κ.ά.)

- •όπου το κόστος εκτέλεσης κάθε δραστηριότητος ή το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι διαφορετικό και εξαρτάται από τη συγκεκριμένη ανάθεση της σε ένα συγκεκριμένο πόρο (λόγω εξειδίκευσης, εμπειρίας, καταλληλότητας ή και άλλων παραγόντων)

• Το αντικείμενο των προβλημάτων ανάθεσης είναι η αντιστοίχηση πόρων σε δραστηριότητες, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος ή να μεγιστοποιείται το αποτέλεσμα

•Ο μόνος περιορισμός του προβλήματος είναι ότι ο κάθε πόρος μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο σε μία δραστηριότητα και η κάθε δραστηριότητα θα χρησιμοποιήσει μόνο ένα πόρο

Παράδειγμα

Μια επιχείρηση διαθέτει πέντε (5) πωλητές στους οποίους πρόκειται να αναθέσει τις πωλήσεις των προϊόντων της σε πέντε γεωγραφικές περιοχές: Αττική, Μακεδονία, Κεντρική Ελλάδα, Πελοπόννησο και Κρήτη. Με βάση την προηγούμενη εμπειρία των πωλητών από πωλήσεις άλλων προϊόντων σε διαφορετικές γεωγραφικές περιοχές, η επιχείρηση κατέληξε στον παρακάτω πίνακα στον οποίο φαίνονται οι εκτιμήσεις για το αναμενόμενο ύψος των πωλήσεων σε εκατομμύρια ευρώ από την πιθανή δραστηριοποίηση κάθε πωλητή σε κάθε διαφορετική γεωγραφική περιοχή.

Το πρόβλημα της επιχείρησης είναι ο προσδιορισμός του γεωγραφικού τομέα που θα ανατεθεί σε κάθε πωλητή ώστε να μεγιστοποιηθεί το κέρδος της επιχείρησης.

Διατύπωση Προβλημάτων Αναθέσεων

•Έστω ότι διαθέτουμε m δραστηριότητες οι οποίες πρέπει να ανατεθούν σε m διαθέσιμους πόρους, έτσι η ανάθεση κάθε πόρου i (i =1,2,3, ..., m), σε κάθε δραστηριότητας 0=1,2,3, ..., m), δημιουργεί ένα κόστος (ή κέρδος) C_{ij}

•Το ζητούμενο είναι να προσδιοριστεί η αντιστοίχηση των πόρων στις δραστηριότητες με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος (ή αντίστοιχα να μεγιστοποιείται το κέρδος)

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος μεταφοράς έχει ως εξής:

✓**Μεταβλητές**

Για κάθε συνδυασμό πόρου i και δραστηριότητος j ορίζουμε τη μεταβλητή: X_{ij} =1 αν ο πόρος i χρησιμοποιηθεί στη δραστηριότητα j, ή 0 αν δεν χρησιμοποιηθεί

✓**Αντικειμενική Συνάρτηση**

Ελαχιστοποίηση Κόστους ή Μεγιστοποίηση Κέρδους Αναθέσεων: $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$

Στη αντικειμενική συνάρτηση κόστους λαμβάνονται υπ' όψη μόνο εκείνα τα στοιχεία C_{ij} για τα οποία ισχύει η ανάθεση του πόρου i στη δραστηριότητα j, οπότε η αντίστοιχη μεταβλητή X_{ij} έχει την τιμή 1

Περιορισμοί

Κάθε "πόρος" i θα χρησιμοποιηθεί μόνο σε μία από τις δραστηριότητες. Επομένως, για κάθε i υπάρχει μόνο ένα j για το οποίο το X_{ij} είναι ίσο με 1.

$\sum_{j=1}^{m} X_{ij}=1$ Επομένως, υπάρχουν m τέτοιοι περιορισμοί για $i= 1,2,3, ..., m$.

Ομοίως, κάθε δραστηριότητα j θα χρησιμοποιήσει μόνο έναν πόρο. Άρα, για κάθε j υπάρχει μόνο ένα i για το οποίο το Xij είναι ίσο με 1.

$\sum_{i=1}^{m} X_{ij}=1$ Επομένως, υπάρχουν m τέτοιοι περιορισμοί για $j= 1,2,3, ..., m$.

Τα δεδομένα ενός προβλήματος αναθέσεων είναι μόνο το κόστος ανάθεσης κάθε δραστηριότητας σε κάθε πόρο και καταγράφονται σε μορφή πίνακα ως εξής:

✓**Πίνακας κόστους αναθέσεων**

	Δραστηριότητα j			
Πόροι i	1	2	. . .	m
1	C_{11}	C_{12}	. . .	C_{1m}
2	C_{21}	C_{21}	. . .	C_{2m}
.	.	.	. . .	.
.	.	.	. . .	.
.	.	.	. . .	.
m	C_{m1}	C_{m2}		C_{mm}

•Στην περίπτωση όπου το πλήθος των δραστηριοτήτων είναι διαφορετικό από το πλήθος των διαθέσιμων πόρων, εισάγονται τεχνητοί πόροι ή τεχνητές δραστηριότητες με μηδενικό κόστος, όπως και στο πρόβλημα μεταφοράς

•Αν μια συγκεκριμένη αντιστοίχηση δεν είναι τεχνικά δυνατή, τότε στην αντίστοιχη θέση θέτουμε ως κόστος έναν πολύ μεγάλο αριθμό (M), ώστε στη διαδικασία ελαχιστοποίησης του κόστους να αποφευχθεί η συγκεκριμένη αντιστοίχηση