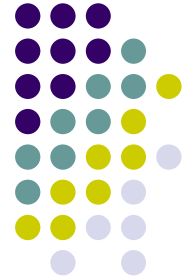


Επίλυση Προβλημάτων Αναθέσεων: Η "Ουγγρική Μέθοδος"



- Το πλήθος των εφικτών λύσεων σε ένα πρόβλημα ανάθεσης με m δραστηριότητες και m πόρους είναι ίσο με $m!$ ⁶
- Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των εφικτών λύσεων αυξάνεται με εκρηκτικό ρυθμό με το μέγεθος του προβλήματος
- Για να αντιληφθούμε τον εκρηκτικό ρυθμό αύξησης του αριθμού των λύσεων, αρκεί να αναλογιστούμε ότι σε ένα πρόβλημα με 5 δραστηριότητες υπάρχουν
 $5! = 120$ εφικτές λύσεις
 - αλλά, αν οι δραστηριότητες διπλασιασθούν, το αντίστοιχο πρόβλημα με 10 δραστηριότητες έχει 3,628,800 εφικτές λύσεις
 - ενώ ένα πρόβλημα με 15 δραστηριότητες έχει 373,621,248,000 εφικτές λύσεις
 - Επομένως, είναι πρακτικά αδύνατο να υπολογιστεί το κόστος όλων των λύσεων για να επιλεγεί η βέλτιστη

✓ Ο πιο γνωστός από τους ειδικούς αλγόριθμους που έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση των προβλημάτων ανάθεσης αναφέρεται με την ονομασία **Ουγγρική Μέθοδος**

✓ Η "Ουγγρική Μέθοδος" είναι μια επαναληπτική μέθοδος που περιλαμβάνει τα εξής βήματα:



Βήμα 1: Δημιουργούμε τον πίνακα κόστους ευκαιρίας:

Από τον πίνακα κόστους ή κερδών του προβλήματος ανάθεσης δημιουργούμε τον πίνακα κόστους ευκαιρίας ως εξής:

- Αφαίρεση του μικρότερου κόστους σε κάθε γραμμή του αρχικού πίνακα κόστους από όλα τα στοιχεία της γραμμής. Στην περίπτωση προβλημάτων μεγιστοποίησης, επιλέγουμε το μεγαλύτερο κέρδος σε κάθε γραμμή και παίρνουμε τις διαφορές των υπολοίπων στοιχείων από αυτό. Με τον τρόπο αυτό, σε κάθε γραμμή υπάρχει το στοιχείο 0 στη θέση που αντιστοιχεί στην προτιμητέα ανάθεση στη συγκεκριμένη γραμμή
- Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στις στήλες του πίνακα που προέκυψε παραπάνω με αφαίρεση του μικρότερου στοιχείου σε κάθε στήλη από όλα τα στοιχεία της στήλης. Μετά και από αυτή τη μετατροπή υπάρχει τουλάχιστο ένα μηδενικό στοιχείο σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του πίνακα.

Βήμα 2: Ελέγχουμε αν ο πίνακας που προέκυψε από το βήμα 1, δίνει τη βέλτιστη ανάθεση

Ο έλεγχος γίνεται με τον εξής τρόπο:

- Καλύπτουμε όλα τα μηδενικά στοιχεία του πίνακα χρησιμοποιώντας τον ελάχιστο αριθμό οριζόντιων και κατακόρυφων γραμμών. Αν ο αριθμός των γραμμών που απαιτούνται είναι ίσος με τον αριθμό των σειρών ή στηλών του πίνακα, τότε μπορούμε να προχωρήσουμε στην αντιστοίχιση που θα δώσει το μικρότερο κόστος. Προχωρούμε στο βήμα 4. Αλλιώς, συνεχίζουμε με το επόμενο βήμα

Βήμα 3: Αναπροσαρμογή των τιμών του πίνακα ως εξής:

- Αφαιρούμε το μικρότερο στοιχείο του πίνακα που δεν καλύπτεται με γραμμές από όλα τα υπόλοιπα στοιχεία που επίσης δεν καλύπτονται, ενώ το προσθέτουμε σε όλα τα στοιχεία του πίνακα που βρίσκονται στα σημεία τομής των γραμμών που τραβήχτηκαν στο βήμα 2
- Αφήνουμε τα υπόλοιπα στοιχεία μεταβλητά. Επιστρέφουμε στο βήμα 2

Βήμα 4: Εκτελούμε την αντιστοίχιση δραστηριοτήτων και πόρων.

- Ξεκινούμε από μια σειρά ή μια στήλη η οποία έχει μόνο ένα μηδενικό
- Αναθέτουμε τον πόρο που αντιστοιχεί στη γραμμή, στη δραστηριότητα που αντιστοιχεί στη στήλη
- Διαγράφουμε τον πόρο και τη δραστηριότητα και προχωρούμε με το υπόλοιπο τμήμα του πίνακα με τον ίδιο τρόπο
- Αν δεν υπάρχει σειρά ή στήλη με ένα μόνο μηδενικό, διαλέγουμε τη σειρά ή στήλη με δύο μηδενικά και επιλέγουμε ένα από αυτά
- Είναι ευνόητο ότι σε αυτή την περίπτωση μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία λύσεις



Εφαρμογή του αλγόριθμου της "Ουγγρικής Μεθόδου" στο συγκεκριμένο παράδειγμα που αναφέραμε



Βήμα 1. Δημιουργία Πίνακα Κόστους Ευκαιρίας

Το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης, επομένως στο πρώτο βήμα επιλέγουμε το μεγαλύτερο "κέρδος" σε κάθε σειρά (γεωγραφική περιοχή) και από αυτό αφαιρούμε τα υπόλοιπα της σειράς.

Περιοχή	Πωλητές				
	A	B	Γ	Δ	E
Αττ.	26	14	10	12	9
Μακ.	31	27	30	14	16
Κ. Ε.	20	19	16	25	10
Πελ.	17	12	21	30	25
Κρ.	15	18	16	25	30

Αφαίρεση τις τιμές
σε κάθε κελί από
το μεγαλύτερο
κέρδος σε κάθε
σειρά

Περιοχή	Πωλητές				
	A	B	Γ	Δ	E
Αττ.	0	12	16	14	17
Μακ.	0	4	1	17	15
Κ. Ε.	5	6	9	0	15
Πελ.	13	18	9	0	5
Κρ.	15	12	14	5	0

Για παράδειγμα, το μεγαλύτερο "κέρδος" για την περιοχή της Αττικής (πρώτη σειρά) προκύπτει όταν η περιοχή ανατεθεί στον πωλητή Α (κέρδος 26). Επομένως, τυχόν ανάθεσή της στον πωλητή Β, θα έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία μικρότερου κέρδους (συγκεκριμένα 14 μονάδων). Η διαφορά 26-14 αποτελεί το "κόστος ευκαιρίας" για την περίπτωση της ανάθεσης της Αττικής στον πωλητή Β, διότι ενώ υπήρχε η ευκαιρία να πραγματοποιηθεί κέρδος 26 μονάδων με ανάθεση στον Α, πραγματοποιούμε κέρδος μόνο 14 μονάδων (διαφορά 12) όταν γίνει ανάθεση στον Β. Ας δούμε ακόμα ένα παράδειγμα: Αν η Κρήτη ανα-

τεθεί στον πωλητή Γ το κόστος χαμένης ευκαιρίας είναι 14, διότι τόσο είναι η διαφορά μεταξύ της καλύτερης ανάθεσης που θα μπορούσε να γίνει (πωλητής Ε - κέρδος 30) και της ανάθεσης της Κρήτης στον Γ με κέρδος μόνο 16.

Επομένως, σε κάθε σειρά υπάρχει ένα μηδέν στη θέση που αντιστοιχεί στην καλύτερη ανάθεση της περιοχής. Προφανώς οι θέσεις των μηδέν υποδεικνύουν πιθανές αναθέσεις. Αυτό όμως στο συγκεκριμένο στάδιο δεν είναι δυνατό, γιατί οι περιοχές για παράδειγμα Αττικής και Μακεδονίας θα έπρεπε να ανατεθούν και οι δύο στον πωλητή Α, ενώ αυτό δεν είναι εφικτό εφόσον ο κάθε πωλητής αναλαμβάνει μια περιοχή και αντίστροφα, κάθε περιοχή ανατίθεται σε έναν πωλητή.

Το επόμενο βήμα είναι η αφαίρεση του μικρότερου στοιχείου κάθε στήλης από τα υπόλοιπα στοιχεία της στήλης. Με αυτό τον τρόπο κάθε στήλη και κάθε σειρά περιέχει τουλάχιστον ένα μηδέν. Η εφαρμογή αυτής της διαδικασίας στο δεύτερο πίνακα δίνει τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα:

Περιοχή	Πωλητές				
	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Αττ.	0	8	15	14	17
Μακ.	0	0	0	17	15
Κ. Ε.	5	2	8	0	15
Πελ.	13	14	8	0	5
Κρ.	15	8	13	5	0

Παρατηρούμε ότι επειδή στις στήλες των πωλητών Α, Δ και Ε υπήρχε ήδη ένα μηδενικό στοιχείο, αυτό είναι και το μικρότερο στοιχείο της στήλης, και επομένως η αφαίρεσή του από τα υπόλοιπα δεν αλλιάζει τα στοιχεία των αντίστοιχων στηλών. Αντίθετα, στις στήλες Β και Γ το μικρότερο στοιχείο ήταν το 4 και το 1 αντίστοιχα, και επομένως τα αφαιρούμε από όλα τα στοιχεία των αντίστοιχων στηλών με αποτέλεσμα να προκύψουν μηδενικά στις αντίστοιχες θέσεις.

Βήμα 2. Έλεγχος Βέλτιστης Ανάθεσης

Προσπαθούμε να καλύψουμε όλα τα μηδενικά του πίνακα που προέκυψε με τον ελάχιστο αριθμό οριζόντιων και κατακόρυφων γραμμών. Αν ο αριθμός των γραμμών είναι 5 όσες και οι σειρές και στήλες του πίνακα, τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη ανάθεση.

Περιοχή	Πωλητές				
	A	B	Γ	Δ	E
Αττ.	0	8	15	14	17
Μακ.	0	0	0	17	15
Κ. Ε.	5	2	8	0	15
Πελ.	13	14	8	0	5
Κρ.	15	8	13	5	0



- Στην περίπτωση του πίνακα του παραδείγματος, η κάλυψη όλων των μηδενικών στοιχείων μπορεί να γίνει με μόνο 4 γραμμές, όπως φαίνεται παραπάνω
- Είναι απαραίτητη η συνέχιση της μεθόδου με το επόμενο Βήμα

Βήμα 3: Αναπροσαρμογή τιμών πίνακα

- Το μικρότερο μη καλυπτόμενο από γραμμές στοιχείο είναι το 2 που αντιστοιχεί στην ανάθεση Κεντρική Ελλάδα - Πωλητής B.
- Αφαιρούμε το στοιχείο 2 από όλα τα μη καλυπτόμενα με γραμμές στοιχεία, και το προσθέτουμε στις διασταυρώσεις των γραμμών (Αττική - Δ, Αττική - E, Μακεδονία - Δ, Μακεδονία - E)
- Αφήνουμε τα υπόλοιπα καλυπτόμενα με γραμμές στοιχεία αμετάβλητα
- Το αποτέλεσμα δίνεται στον παρακάτω πίνακα (αριστερά)
- Η κάλυψη των μηδενικών στοιχείων στον πίνακα που προέκυψε απαιτεί 5 γραμμές και δεν υπάρχει τρόπος να γίνει με λιγότερες όπως φαίνεται στον δεξιό πίνακα
- Επομένως, μπορούμε να κάνουμε τις αναθέσεις που αντιστοιχούν σε Βέλτιστη λύση ακολουθώντας το Βήμα 4 της Ουγκρικής μεθόδου

Περιοχή	Πωλητές				
	A	B	Γ	Δ	Ε
Αττ.	0	8	15	16	19
Μακ.	0	0	0	19	17
Κ. Ε.	3	0	6	0	15
Πελ.	11	12	6	0	5
Κρ.	13	6	11	5	0

Περιοχή	Πωλητές				
	A	B	Γ	Δ	Ε
Αττ.	0	8	15	16	19
Μακ.	0	0	0	19	17
Κ. Ε.	3	0	6	0	15
Πελ.	11	12	6	0	5
Κρ.	13	6	11	5	0

Διαδικασία Βέλτιστης Ανάθεσης

Βήμα 4. Αναθέσεις δραστηριοτήτων σε πόρους

- Προσδιορίζουμε μια περιοχή (γραμμή) ή έναν πωλητή για τον οποίο η αντίστοιχη σειρά ή στήλη περιέχει ένα μόνο μηδενικό στοιχείο
- Η πρώτη περιοχή, η Αττική, περιλαμβάνει ένα μόνο μηδέν
- Η θέση του μηδέν υποδεικνύει ανάθεση

Άρα, η Αττική ανατίθεται στον πωλητή Α, και διαγράφουμε την περιοχή και τον πωλητή από τη συνέχεια της διαδικασίας

- Στη συνέχεια, επαναλαμβάνουμε την προσπάθεια ανεύρεσης περιοχής ή πωλητή με ένα μόνο μηδενικό στοιχείο στην αντίστοιχη σειρά ή στήλη στο υπόλοιπο τμήμα του πίνακα (διαγράφοντας την Αττική και τον πωλητή Α)



Περιοχή	Πωλητές				
	A	B	Γ	Δ	E
Αττ.	0	8	15	16	19
Μακ.	0	0	0	19	17
Κ. Ε.	3	0	6	0	15
Πελ.	11	12	6	0	5
Κρ.	13	6	11	5	0

- Στη σειρά της Πελοποννήσου Ελλάδος υπάρχει μόνο ένα μηδενικό στοιχείο που αντιστοιχεί στον πωλητή Δ
- Άρα, γίνεται η ανάθεση Πελοπόννησος - Πωλητής Δ
- Στον τμήμα του πίνακα που απομένει, συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο η Κεντρική Ελλάδα ανατίθεται στον πωλητή Β και ακολούθως η Μακεδονία ανατίθεται στον Πωλητή Γ και η Κρήτη στον Πωλητή Ε
- Με έντονα στοιχεία δηλώνονται οι αναθέσεις

Περιοχή	Πωλητές				
	A	B	Γ	Δ	E
Αττ.	0	8	15	16	19
Μακ.	0	0	0	19	17
Κ. Ε.	3	0	6	0	15
Πελ.	11	12	6	0	5
Κρ.	13	6	11	5	0

Υπολογισμός κόστους ή κέρδους της βέλτιστης ανάθεσης



- Το συνολικό κόστος ή κέρδος της βέλτιστης ανάθεσης προκύπτει από την πρόσθεση των στοιχείων του αρχικού πίνακα που αντιστοιχούν στις αναθέσεις

Περιοχή	Πωλητές				
	A	B	Γ	Δ	E
Αττ.	26	14	10	12	9
Μακ.	31	27	30	14	16
Κ. Ε.	20	19	16	25	10
Πελ.	17	12	21	30	25
Κρ.	15	18	16	25	30

Μέγιστο κέρδος: $26 + 30 + 19 + 30 + 30 = 135$