

Χρηματοοικονομική Διοίκηση I

**ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
– ΡΑΝΤΕΣ**

ΡΑΝΤΕΣ

- ◆ Προβλήματα Ραντών
- ◆ Μελλοντική & Παρούσα Αξία
- ◆ Εσωτερικός Βαθμός Απόδοσης
- ◆ Εφαρμογές:
 - Αποτίμηση Χρεογράφων (Ιδιωτικών Εταιρειών, Δημοσίου),
 - Αποτίμηση Μετοχών,
 - Δάνεια, Γραμμάτια,
 - Επενδύσεις.

ΡΑΝΤΕΣ

- ◆ Είναι σειρά (ακολουθία) χρηματικών καταβολών σε ίσα χρονικά διαστήματα.
- ◆ **Σταθερή και μεταβλητή ράντα**
- ◆ **Σταθερή:** ίσες χρηματικές καταβολές
- ◆ **Μεταβλητή:** άνισες χρηματικές καταβολές

ΡΑΝΤΕΣ

- ◆ **Χαρακτηριστικά Ράντας:**

Όρος ή δόση

Περίοδος ράντας = χρόνος μεταξύ δύο καταβολών

- ◆ **Ληξιπρόθεσμη:** καταβολές στο τέλος της περιόδου

- ◆ **Προκαταβλητέα:** καταβολές στην αρχή της περιόδου

- ◆ **Πρόσκαιρη** = ορισμένος αριθμός όρων

- ◆ **Διηνεκής** = άπειρος αριθμός όρων

Τελική αξία η Μέλλουσα Αξία (ΜΑ) – μη σταθερής ράντας (άνισες Ταμειακές ροές)

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε (όχι μία, αλλά) C_i ταμειακές ροές, $i=1, \dots, v$, σε λογαριασμό ταμειυτηρίου (savings fund) για μία περίοδο χρόνου. Τότε:

Η πρώτη ροή C_1 τοκίζεται για $v - 1$ περιόδους

Η δεύτερη ροή C_2 τοκίζεται για $v - 2$ περιόδους

\vdots

Η ροή C_v τοκίζεται για $v - v$ περιόδους

$$\therefore MA = C_1 (1 + r)^{v-1} + C_2 (1 + r)^{v-2} + \dots + C_v$$

$$\therefore MA = \sum_{i=1}^v C_i (1 + r)^{v-i}$$

ΜΑ Ράντας

- ◆ Είναι το άθροισμα όλων των σταθερών χρηματικών ποσών συν τον ανατοκιζόμενο τόκο

ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΑ (ΜΑ) – ΜΗ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΡΑΝΤΑΣ (άνισες Ταμειακές ροές)

π.χ. Συνταξιοδοτικό Πρόγραμμα (pension fund) αναμένει την ακόλουθη ταμειακή ροή στο τέλος των 3 πρώτων ετών ύπαρξής του

<u>Έτος</u>	<u>Ποσό (€ εκ)</u>
1	100
2	50
3	75

Η αναμενόμενη απόδοση σε επενδύσεις είναι 10%. Ποια η αξία του προγράμματος στο τέλος της περιόδου;

$$MA = 100 (1 + 0,1)^{3-1} + 50 (1 + 0,1)^{3-2} + 75 (1 + 0,1)^{3-3}$$

$$\therefore MA = 121 + 55 + 75 = \text{€}251 \text{ εκ}$$

ΤΕΛΙΚΗ ΑΞΙΑ (ΜΑ) –ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΡΑΝΤΑΣ (ίσες Ταμειακές ροές)

- Αν οι όροι είναι **ίσοι** τότε:

- $MA = C \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ ληξιπρόθεσμη

$$MA = C \times (\Sigma MAP, i, n)$$

- $MA = C \times \frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}$ προκαταβλητέα

- Ή MA προκαταβλητέας = $C \times (\Sigma MAP, i, n)(1+i)$

Μέλλουσα Αξία (ΜΑ) σταθερής ράντας

Καταθέτομε σε τράπεζα **2000€** δόση στο τέλος κάθε χρόνου για **5** χρόνια με επιτόκιο **10%**.

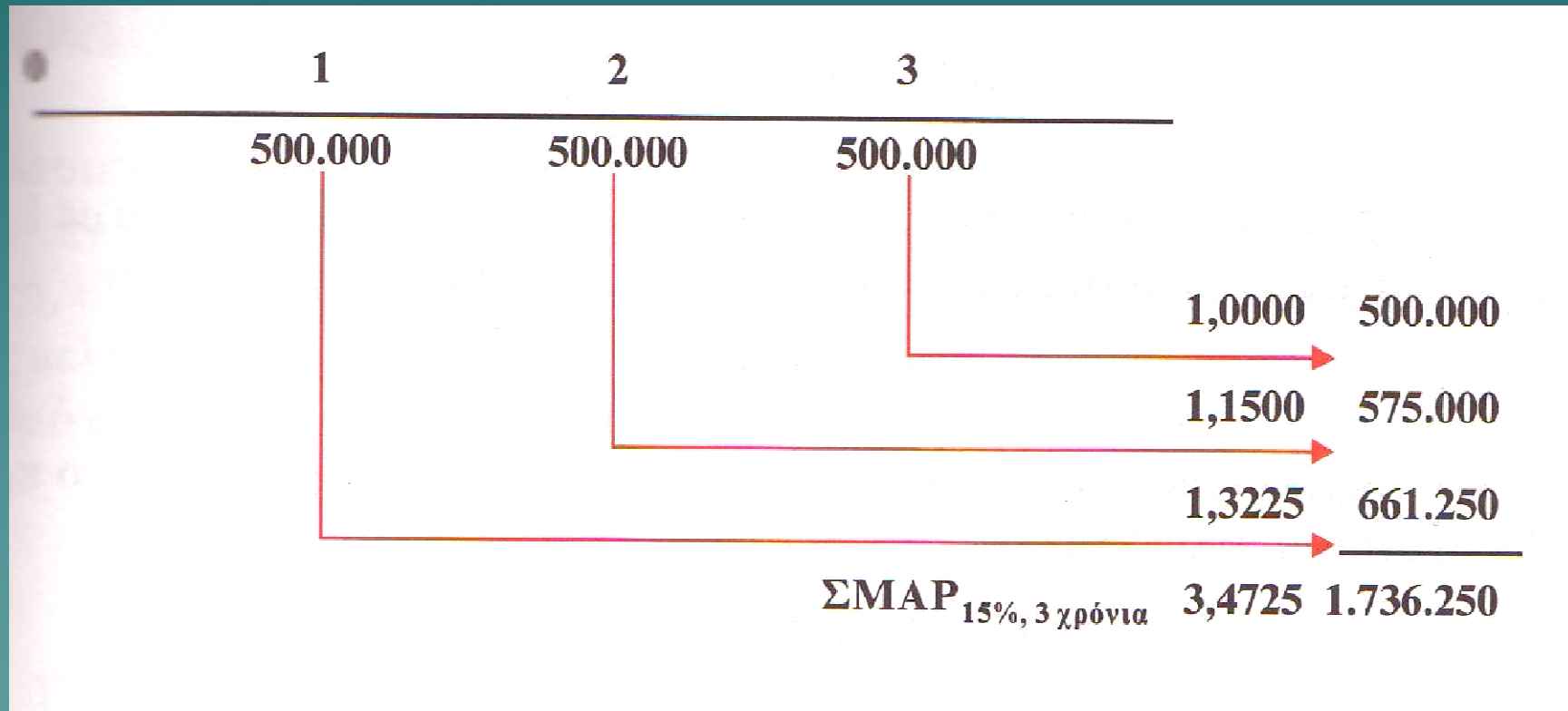
Τι ποσό θα έχει συγκεντρωθεί στο τέλος του 5ου έτους; ($C=2000$, $rate = 10\%$, $n=5$)

Απάντηση:

$$MA = C \cdot (\Sigma MAP, i, n)$$

$$\begin{aligned} MA &= 2000 \cdot (\text{συντ. Μ.Α. ράντας}) = \\ &= 2000 \cdot (6,1061) = 12.212 \text{ €} \end{aligned}$$

Μέλλουσα Αξία μεταβλητής ράντας



ΜΕΛΛΟΥΣΑ ΑΞΙΑ ΠΡΟΣΚΑΙΡΗΣ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΡΑΝΤΑΣ

Μελλοντική Αξία Σειράς Πληρωμών 1 Ευρώ κάθε περίοδο λαμβανομένων στο τέλος ν περιόδων:										MA= $((1+r)^n - 1)/r$		
Περίοδος, ν											Επιτόκιο, r%	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	
2	2,0100	2,0200	2,0300	2,0400	2,0500	2,0600	2,0700	2,0800	2,0900	2,1000	2,1100	
3	3,0301	3,0604	3,0909	3,1216	3,1525	3,1836	3,2149	3,2464	3,2781	3,3100	3,3421	
4	4,0604	4,1216	4,1836	4,2465	4,3101	4,3746	4,4399	4,5061	4,5731	4,6410	4,7097	
5	5,1010	5,2040	5,3091	5,4163	5,5256	5,6371	5,7507	5,8666	5,9847	6,1051	6,2278	
6	6,1520	6,3081	6,4684	6,6330	6,8019	6,9753	7,1533	7,3359	7,5233	7,7156	7,9129	
7	7,2135	7,4343	7,6625	7,8983	8,1420	8,3938	8,6540	8,9228	9,2004	9,4872	9,7833	
8	8,2857	8,5830	8,8923	9,2142	9,5491	9,8975	10,2598	10,6366	11,0285	11,4359	11,8594	
9	9,3685	9,7546	10,1591	10,5828	11,0266	11,4913	11,9780	12,4876	13,0210	13,5795	14,1640	
10	10,4622	10,9497	11,4639	12,0061	12,5779	13,1808	13,8164	14,4866	15,1929	15,9374	16,7220	
11	11,5668	12,1687	12,8078	13,4864	14,2068	14,9718	15,7836	16,6455	17,5603	18,5312	19,5614	
12	12,6825	13,4121	14,1920	15,0258	15,9171	16,8699	17,8885	18,9771	20,1407	21,3843	22,7132	
13	13,8093	14,6803	15,6178	16,6268	17,7130	18,8821	20,1406	21,4953	22,9534	24,5227	26,2116	
14	14,9474	15,9739	17,0663	18,2919	19,5986	21,0151	22,5505	24,2149	26,0192	27,9750	30,0949	
15	16,0969	17,2934	18,5989	20,0236	21,5786	23,2760	25,1290	27,1521	29,3609	31,7725	34,4054	
16	17,2579	18,6393	20,1569	21,8245	23,6575	25,6725	27,8881	30,3243	33,0034	35,9497	39,1899	
17	18,4304	20,0121	21,7616	23,6975	25,8404	28,2129	30,8402	33,7502	36,9737	40,5447	44,5008	
18	19,6147	21,4123	23,4144	25,6454	28,1324	30,9057	33,9990	37,4502	41,3013	45,5992	50,3959	
19	20,8109	22,8406	25,1169	27,6712	30,5390	33,7800	37,3790	41,4463	46,0185	51,1591	56,9395	
20	22,0190	24,2974	26,8704	29,7781	33,0660	36,7856	40,9955	45,7620	51,1601	57,2750	64,2028	
21	23,2392	25,7833	28,6765	31,9692	35,7193	39,9927	44,8652	50,4229	56,7645	64,0025	72,2651	
22	24,4716	27,2990	30,5368	34,2480	38,5052	43,3923	49,0057	55,4568	62,8733	71,4027	81,2143	
23	25,7163	28,8450	32,4529	36,6179	41,4305	46,9958	53,4361	60,8933	69,5319	79,5430	91,1479	
24	26,9735	30,4219	34,4265	39,0826	44,5020	50,8156	58,1767	66,7648	76,7898	88,4973	102,1742	
25	28,2432	32,0303	36,4593	41,6459	47,7271	54,8645	63,2490	73,1059	84,7009	98,3471	114,4133	

ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ – ΜΗ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΡΑΝΤΕΣ (ΑΝΙΣΟΠΟΣΕΣ ΤΑΜΕΙΑΚΕΣ ΡΟΕΣ)

Την περίοδο 0:

ΠΑ του C_1 είναι

$$\frac{C_1}{(1+r)}$$

ΠΑ του C_2 είναι

$$\frac{C_2}{(1+r)^2}$$

⋮

⋮

ΠΑ του C_v είναι

$$\frac{C_v}{(1+r)^v}$$

$$\therefore \text{ΠΑ} = \sum_{i=1}^v \frac{C_i}{(1+r)^i}$$

ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ – ΜΗ ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΡΑΝΤΕΣ (ΑΝΙΣΟΠΟΣΕΣ ΤΑΜΕΙΑΚΕΣ ΡΟΕΣ)

πχ. Προσφέρεται σε επενδυτή η δυνατότητα να πληρώσει €200εκ σε αντάλλαγμα της ακόλουθης ταμειακής ροής

Έτος Ποσό (€εκ)

1 100

2 50

3 75

Εκτιμείστε την προσφορά γνωρίζοντας ότι εναλλακτικές επενδύσεις έχουν 10% απόδοση.

ΠΑ των ταμειακών ροών:

$$\begin{aligned} \text{ΠΑ} &= \frac{100}{(1 + 0,1)} + \frac{50}{(1 + 0,1)^2} + \frac{75}{(1 + 0,1)^3} \\ &= 90,9 + 41,3 + 56,3 = \text{€}188,5 \end{aligned}$$

Το ποσό αυτό είναι < €200.

Συμπέρασμα: Η πρόταση δε συμφέρει τον επενδυτή.

ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ – ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΡΑΝΤΕΣ (ΙΣΟΠΟΣΕΣ ΤΑΜΕΙΑΚΕΣ ΡΟΕΣ)

Ληξιπρόθεσμη

$$ΠΑ = C \cdot \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$ΠΑ = C \cdot (\Sigma ΠΑΡ i^n)$$

Προκαταβλητέα

$$ΠΑ = C \left[1 + \frac{1 - (1 + i)^{-(n-1)}}{i} \right]$$

$$ΠΑ = C \cdot (\Sigma ΠΑΡ i^n)(1 + i)$$

ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ –ΡΑΝΤΕΣ

Συμπεράσματα:

Η Παρούσα Αξία της επένδυσης επηρεάζεται:

- a) αναλόγως από τις μελλοντικές ταμειακές ροές, C_i
- b) αντιστρόφως ανάλογα από το επιτόκιο προεξόφλησης, r .

ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ – ΣΤΑΘΕΡΕΣ ΡΑΝΤΕΣ (ΙΣΟΠΟΣΕΣ ΤΑΜΕΙΑΚΕΣ ΡΟΕΣ)

Τι ποσό θα πρέπει να βάλουμε σήμερα στην Τράπεζα ώστε να μπορούμε να εισπράττουμε 2000 € στο τέλος κάθε έτους επί 5 έτη και να έχουμε υπόλοιπο 0 στο τέλος του 5ου έτους; Ο ανατοκισμός θα είναι ετήσιος και το επιτόκιο 15%.

Απάντηση:

$$\begin{aligned} \text{ΠΑ} &= C * \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} = 2000 * \left[\frac{1 - (1+0,15)^{-5}}{0,15} \right] = 2000 * \\ (3,6959) &= \\ 7391,8 \end{aligned}$$

ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ ΠΡΟΣΚΑΙΡΗΣ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΡΑΝΤΑΣ

Παρούσα Αξία n Ταμειακών Ροών 1 Ευρώ για κάθε περίοδο, λαμβανομένων στο τέλος κάθε περιόδου $PA = 1 - (1/(1+r)^n)/r$

Περίοδος, n	Επιτόκιο, $r\%$										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0,9901	0,9804	0,9709	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091	0,9009
2	1,9704	1,9416	1,9135	1,8861	1,8594	1,8334	1,8080	1,7833	1,7591	1,7355	1,7125
3	2,9410	2,8839	2,8286	2,7751	2,7232	2,6730	2,6243	2,5771	2,5313	2,4869	2,4437
4	3,9020	3,8077	3,7171	3,6299	3,5460	3,4651	3,3872	3,3121	3,2397	3,1699	3,1024
5	4,8534	4,7135	4,5797	4,4518	4,3295	4,2124	4,1002	3,9927	3,8897	3,7908	3,6959
6	5,7955	5,6014	5,4172	5,2421	5,0757	4,9173	4,7665	4,6229	4,4859	4,3553	4,2305
7	6,7282	6,4720	6,2303	6,0021	5,7864	5,5824	5,3893	5,2064	5,0330	4,8684	4,7122
8	7,6517	7,3255	7,0197	6,7327	6,4632	6,2098	5,9713	5,7466	5,5348	5,3349	5,1461
9	8,5660	8,1822	7,7881	7,4353	7,1078	6,8017	6,5152	6,2489	5,9952	5,7590	5,5370
10	9,4713	8,9826	8,5302	8,1109	7,7217	7,3601	7,0236	6,7101	6,4177	6,1446	5,8892
11	10,3676	9,7868	9,2526	8,7605	8,3064	7,8869	7,4987	7,1390	6,8052	6,4951	6,2085
12	11,2551	10,5753	9,9540	9,3851	8,8633	8,3838	7,9427	7,5361	7,1607	6,8137	6,4924
13	12,1337	11,3484	10,6350	9,9856	9,3936	8,8527	8,3577	7,9038	7,4869	7,1034	6,7499
14	13,0037	12,1062	11,2961	10,5631	9,8966	9,2950	8,7455	8,2442	7,7862	7,3667	6,9819
15	13,8651	12,8493	11,9379	11,1184	10,3797	9,7122	9,1079	8,5595	8,0607	7,6061	7,1909
16	14,7179	13,5777	12,5811	11,6523	10,8378	10,1059	9,4466	8,8514	8,3126	7,8237	7,3792
17	15,5623	14,2919	13,1661	12,1657	11,2741	10,4773	9,7632	9,1216	8,5436	8,0216	7,5488
18	16,3983	14,9920	13,7535	12,6593	11,6896	10,8276	10,0591	9,3719	8,7566	8,2014	7,7016
19	17,2260	15,6785	14,3238	13,1339	12,0853	11,1581	10,3356	9,6036	8,9501	8,3649	7,8393
20	18,0456	16,3514	14,8775	13,5903	12,4622	11,4689	10,5940	9,8181	9,1285	8,5136	7,9633
21	18,8570	17,0112	15,4150	14,0292	12,8212	11,7641	10,8355	10,0168	9,2922	8,6487	8,0751
22	19,6604	17,6580	15,9369	14,4511	13,1630	12,0416	11,0612	10,2007	9,4424	8,7715	8,1757
23	20,4558	18,2922	16,4436	14,8568	13,4896	12,3034	11,2722	10,3711	9,5802	8,8832	8,2664
24	21,2434	18,9139	16,9355	15,2470	13,7986	12,5504	11,4693	10,5288	9,7066	8,9847	8,3481
25	22,0232	19,5235	17,4131	15,6221	14,0939	12,7834	11,6536	10,6748	9,8226	9,0770	8,4217

ΠΑ διηνεκούς ράντας

- ◆ $ΠΑ = \frac{C}{i}$
- ◆ Ομολογία αορίστου διάρκειας δίδει ετήσιο τόκο 80 €, το δε προεξοφλητικό επιτόκιο είναι 10%. Ποια είναι η τρέχουσα αξία της ομολογίας;
- ◆ **Απάντηση:**
- ◆ $PV = Π.Α. = \frac{80}{0,10} = 800€$

Μετοχή δίδει ετήσιο σταθερό μέρισμα 2 €.
Αν οι αποδόσεις για μετοχές ίσου κινδύνου
είναι 12%, να ευρεθεί η αξία της μετοχής
σήμερα.

Λύση:

$$\frac{2}{0,12} = 16.67$$

Υπολογισμός όρου σταθερής ράντας

Από τον τύπο της ΠΑ ράντας:

$$ΠΑ = C \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Λύνομε ως προς C :

$$C = ΠΑ / ΣΠΑΡ$$

Όπου ΣΠΑΡ = Συντελ. Αναγωγής Ράντας =

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Υπολογισμός όρου σταθερής ράντας

Παράδειγμα:

Δανείτε 20.000€ για 5 έτη με επιτόκιο 10%.
Πόσα χρήματα πρέπει να καταβάλετε κάθε χρόνο
στην Τράπεζα για να εξοφλήσετε το δάνειο με τους
τόκους του στο τέλος των 5 ετών;

Απάντηση:

Το ζητούμενο εδώ είναι το τοκοχρεολύσιο.

$$\begin{aligned} C &= PA / \text{συντελ. αναγωγής ράντας} \\ &= 20.000 / 3,7908 = 5.270 = \text{η δόση του} \\ &\text{δανείου} \end{aligned}$$

Υπολογισμός επιτοκίου σε σταθερή ράντα

Από τον τύπο Π.Α. Ράντας, λύνουμε ως προς το συντελεστή Π.Α. ράντας $\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$

και από τους πίνακες βρίσκουμε το επιτόκιο για n χρονικές περιόδους.

Αν το επιτόκιο δεν βρίσκεται στους πίνακες, χρησιμοποιούμε γραμμική παρεμβολή.

Υπολογισμός επιτοκίου σε σταθερή ράντα

Παράδειγμα:

Μας δίδεται δάνειο 5 εκ. με ετήσια τοκοχρεολυτική δόση 1,5 εκ. για περίοδο 5 ετών. Με τι επιτόκιο μας χρεώνει η τράπεζα;

Απάντηση

Από τον τύπο της ΠΑ ράντας:

$$ΠΑ = C \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Λύνομε ως προς τον συντ.αναγωγής ράντας

Υπολογισμός επιτοκίου σε σταθερή ράντα

Δηλ.

συντελ. αναγωγής ράντας = $\text{ΠΑ} / \text{όρος της ράντας}$

= δάνειο / δόση δανείου

= $5 / 1,5 = 3,333$

$3,333 =$ συντελ. αναγωγής για 5 έτη και άγνωστο επιτόκιο

Από τους πίνακες ευρίσκομε το επιτόκιο

Υπολογισμός επιτοκίου σε σταθερή ράντα

Σε περίπτωση που το επιτόκιο δεν ευρίσκεται στους πίνακες αλλά μεταξύ δύο επιτοκίων, κάνουμε γραμμική παρεμβολή:

από τους πίνακες:

$$(i=16\%) \quad 3,2743 < 3,333 < 3,3522 \quad (i = 15\%)$$

$$\frac{1\%}{x} = \frac{3,3522 - 3,2743}{3,3522 - 3,333} = 0,2464 \Rightarrow i = 15,25\%$$

Πίνακας απόσβεσης δανείου

Δάνειο 2.000 € πρέπει να πληρωθεί σε 3 ετήσιες τοκοχρεολυτικές δόσεις. Το επιτόκιο είναι 12%. Να καταρτισθεί ο πίνακας αποπληρωμής του δανείου.

Λύση:

Ευρίσκομε τη δόση του δανείου από τον τύπο της ΠΑ ράντας : $ΠΑ = C * ΣΠΑΡ$

Δόση = όρος ράντας = $C = ΠΑ / ΣΠΑΡ =$

$$C = 2000 / 2,4018 = 832,7€$$

Πίνακας απόσβεσης δανείου

έτη	Δόση	Τόκος	Χρεολύσιο	Υπόλ. Δανείου
0		-	-	2000
1	832,7	240,0	592,7	1407,3
2	832,7	168,8	663,8	743,4
3	832,7	89,2	743,5	0

Πίνακας απόσβεσης δανείου

Τόκος 1ου έτους : $2000 \times 12\% = 240$

Τόκος 2ου έτους : $1407 \times 12\% =$
 $168,8$

Χρεολύσια : $832,7 - 240 = 592,7$

$832,7 - 168,8 = 663,8$

$832,7 - 89,2 = 743,5$

- Επενδυτής δανείζεται σήμερα 1000000 € και συμφωνεί να το αποπληρώσει στο τέλος του 8^{ου} έτους πληρώνοντας 1.594.000 €. Με ποιο επιτόκιο δανείζεται;
- Απάντηση

$$1. \text{ΠΑ} = 1594000 \times \frac{1}{(1+i)^8} = 1000000$$

- Από πίνακες για ΣΠΑ = 0,6274 και για 8 έτη, ευρίσκομε $i = 6\%$

- 2^{ος} τρόπος
- $ΜΑ = ΠΑ \times (\SigmaΜΑ, i,8)$
- $(\SigmaΜΑ, i,8) = ΜΑ/ΠΑ = 1594000/1000000 = 1,594$
- Πίνακες $\SigmaΜΑ = 1,594$ αντιστοιχεί σε επιτόκιο = 6%

- ◆ Τράπεζα χορηγεί δάνειο ύψους 1.000.000 με ετήσιο επιτόκιο 12% και εξαμηνιαίο ανατοκισμό. Το δάνειο πρέπει να εξοφληθεί σε 10 έτη με ισόποσες εξαμηνιαίες δόσεις. Χορηγείται περίοδος χάριτος ίση με 5 εξαμ. δόσεις. Να υπολογιστεί η εξαμηνιαία πληρωμή

- ◆ Λύση
- ◆ Βρίσκουμε τη ΜΑ των 1.000.000 στο 5^ο εξάμηνο

$$1.000.000 X (1 + 0,06)^5 = 1338226$$

- ◆ Στη συνέχεια βρίσκουμε τον όρο της ράντας για 15 εξαμηνιαίες περιόδους:

- ◆ $1338200 = A X (\text{ΣΠΑΡ}, 6\%, 15) = AX9,7122$

- ◆ $A = 137788 = \eta \text{ εξαμηνιαία δόση}$