

# Εισαγωγή στην Γραμμική Άλγεβρα

Τί, πότε, πού, γιατί, ποιά, πώς·

Κ.Σπανάκης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχ/κών και Μηχ/κών Η/Υ

*kspan@ics.forth.gr*

- 1 Τί είναι η γραμμική Άλγεβρα
- 2 Πότε και Πού αναπτύχθηκε η γραμμική Άλγεβρα
- 3 Γιατί είναι χρήσιμη η γραμμική Άλγεβρα
- 4 Ποια είναι η διάρθρωση της ύλης
- 5 Πώς συμπεραίνεται η επιτυχία/αποτυχία

## Τί είναι η Γραμμική Άλγεβρα

- Γραμμική Άλγεβρα είναι ο κλάδος της Άλγεβρας που ασχολείται με την επίλυση γραμμικών εξισώσεων της μορφής

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = c_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = c_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = c_m$$

όπου  $n$  είναι ο αριθμός των αγνώστων τιμών  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  και  $m$  ο αριθμός των εξισώσεων.

## Πότε και Πού αναπτύχθηκε η γραμμική Άλγεβρα

- Αρχαιότητα – Αίγυπτος, Κίνα: Χρήση πίνακα για επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.

## Πότε και Πού αναπτύχθηκε η γραμμική Άλγεβρα

- Αρχαιότητα – Αίγυπτος, Κίνα: Χρήση πίνακα για επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.
- 17ος αιώνας – Ευρώπη: **René Descartes** και άλλοι-ανάπτυξη γεωμετρικών και αλγεβρικών μεθόδων για λύση γραμμικών εξισώσεων.

## Πότε και Πού αναπτύχθηκε η γραμμική Άλγεβρα

- Αρχαιότητα – Αίγυπτος, Κίνα: Χρήση πίνακα για επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.
- 17ος αιώνας – Ευρώπη: **René Descartes** και άλλοι-ανάπτυξη γεωμετρικών και αλγεβρικών μεθόδων για λύση γραμμικών εξισώσεων.
- 18ος αιώνας – Ευρώπη: **Euler, Lagrange**-πρώτες έννοιες πίνακα.

## Πότε και Πού αναπτύχθηκε η γραμμική Άλγεβρα

- Αρχαιότητα – Αίγυπτος, Κίνα: Χρήση πίνακα για επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.
- 17ος αιώνας – Ευρώπη: **René Descartes** και άλλοι-ανάπτυξη γεωμετρικών και αλγεβρικών μεθόδων για λύση γραμμικών εξισώσεων.
- 18ος αιώνας – Ευρώπη: **Euler, Lagrange**-πρώτες έννοιες πίνακα.
- Αρχές 19ου αιώνα – Γερμανία, Γαλλία: **Carl Friedrich Gauss** - μέθοδος **Gauss** για συστήματα γραμμικών εξισώσεων.

## Πότε και Πού αναπτύχθηκε η γραμμική Άλγεβρα

- Αρχαιότητα – Αίγυπτος, Κίνα: Χρήση πίνακα για επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.
- 17ος αιώνας – Ευρώπη: **René Descartes** και άλλοι-ανάπτυξη γεωμετρικών και αλγεβρικών μεθόδων για λύση γραμμικών εξισώσεων.
- 18ος αιώνας – Ευρώπη: **Euler, Lagrange**-πρώτες έννοιες πίνακα.
- Αρχές 19ου αιώνα – Γερμανία, Γαλλία: **Carl Friedrich Gauss** - μέθοδος **Gauss** για συστήματα γραμμικών εξισώσεων.
- 1820–1850 – Ιρλανδία: **William Rowan Hamilton**: εισαγωγή στα **Quaternions**.

## Πότε και Πού αναπτύχθηκε η γραμμική Άλγεβρα

- Αρχαιότητα – Αίγυπτος, Κίνα: Χρήση πίνακα για επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.
- 17ος αιώνας – Ευρώπη: **René Descartes** και άλλοι-ανάπτυξη γεωμετρικών και αλγεβρικών μεθόδων για λύση γραμμικών εξισώσεων.
- 18ος αιώνας – Ευρώπη: **Euler, Lagrange**-πρώτες έννοιες πίνακα.
- Αρχές 19ου αιώνα – Γερμανία, Γαλλία: **Carl Friedrich Gauss** - μέθοδος **Gauss** για συστήματα γραμμικών εξισώσεων.
- 1820–1850 – Ιρλανδία: **William Rowan Hamilton**: εισαγωγή στα **Quaternions**.
- 1820–1850 – Γαλλία: **Augustin-Louis Cauchy**: μελέτη ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.

## Πότε και Πού αναπτύχθηκε η γραμμική Άλγεβρα

- Αρχαιότητα – Αίγυπτος, Κίνα: Χρήση πίνακα για επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.
- 17ος αιώνας – Ευρώπη: **René Descartes** και άλλοι-ανάπτυξη γεωμετρικών και αλγεβρικών μεθόδων για λύση γραμμικών εξισώσεων.
- 18ος αιώνας – Ευρώπη: **Euler, Lagrange**-πρώτες έννοιες πίνακα.
- Αρχές 19ου αιώνα – Γερμανία, Γαλλία: **Carl Friedrich Gauss** - μέθοδος **Gauss** για συστήματα γραμμικών εξισώσεων.
- 1820–1850 – Ιρλανδία: **William Rowan Hamilton**: εισαγωγή στα **Quaternions**.
- 1820–1850 – Γαλλία: **Augustin-Louis Cauchy**: μελέτη ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.
- Τέλος 19ου αιώνα – Γερμανία: **Hermann Grassmann**-θεμελίωση θεωρίας διανυσματικών χώρων.

## Πότε και Πού αναπτύχθηκε η γραμμική Άλγεβρα

- Αρχαιότητα – Αίγυπτος, Κίνα: Χρήση πίνακα για επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων.
- 17ος αιώνας – Ευρώπη: **René Descartes** και άλλοι-ανάπτυξη γεωμετρικών και αλγεβρικών μεθόδων για λύση γραμμικών εξισώσεων.
- 18ος αιώνας – Ευρώπη: **Euler, Lagrange**-πρώτες έννοιες πίνακα.
- Αρχές 19ου αιώνα – Γερμανία, Γαλλία: **Carl Friedrich Gauss** - μέθοδος **Gauss** για συστήματα γραμμικών εξισώσεων.
- 1820–1850 – Ιρλανδία: **William Rowan Hamilton**: εισαγωγή στα **Quaternions**.
- 1820–1850 – Γαλλία: **Augustin-Louis Cauchy**: μελέτη ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.
- Τέλος 19ου αιώνα – Γερμανία: **Hermann Grassmann**-θεμελίωση θεωρίας διανυσματικών χώρων.
- 20ός αιώνας – Διεθνής: Ενοποίηση θεωρίας πίνακα, διανυσμάτων, ιδιοτιμών και εφαρμογές σε φυσική, μηχανική, ηλεκτρολογία και υπολογιστές.

## Γιατί είναι χρήσιμη η γραμμική Άλγεβρα

- Η Γραμμική Άλγεβρα είναι χρήσιμη εξίσου και για τις 2 κατευθύνσεις της σχολής:

## Γιατί είναι χρήσιμη η γραμμική Άλγεβρα

- Η Γραμμική Άλγεβρα είναι χρήσιμη εξίσου και για τις 2 κατευθύνσεις της σχολής:
  - ▶ Ηλεκτρολόγος Μηχανικός

# Γιατί είναι χρήσιμη η γραμμική Άλγεβρα

- Η Γραμμική Άλγεβρα είναι χρήσιμη εξίσου και για τις 2 κατευθύνσεις της σχολής:
  - ▶ Ηλεκτρολόγος Μηχανικός
  - ▶ Μηχανικός Η/Υ

- Ανάλυση Κυκλωμάτων

# Εφαρμογές Γραμμικής Άλγεβρας για Ηλεκτρολόγους Μηχανικούς

- Ανάλυση Κυκλωμάτων
- Συστήματα Ελέγχου

# Εφαρμογές Γραμμικής Άλγεβρας για Ηλεκτρολόγους Μηχανικούς

- Ανάλυση Κυκλωμάτων
- Συστήματα Ελέγχου
- Συστήματα **AC**

- Ανάλυση Κυκλωμάτων
- Συστήματα Ελέγχου
- Συστήματα **AC**
- Δίκτυα και Ενέργεια

- Ανάλυση Κυκλωμάτων
- Συστήματα Ελέγχου
- Συστήματα **AC**
- Δίκτυα και Ενέργεια
- Φίλτρα και Σήματα

- Τα ηλεκτρικά κυκλώματα με πολλαπλά στοιχεία (αντιστάσεις, επαγωγείς, πυκνωτές) συχνά περιγράφονται με συστήματα γραμμικών εξισώσεων.

## Ανάλυση κυκλωμάτων

- Τα ηλεκτρικά κυκλώματα με πολλαπλά στοιχεία (αντιστάσεις, επαγωγείς, πυκνωτές) συχνά περιγράφονται με συστήματα γραμμικών εξισώσεων.
- Η μέθοδος των κόμβων ή των βρόχων οδηγεί σε πίνακες που λύνει κανείς με τεχνικές γραμμικής άλγεβρας (π.χ. μέθοδος **Gauss**, αντίστροφος πίνακας)

- Στα γραμμικά δυναμικά συστήματα, η συμπεριφορά του συστήματος περιγράφεται με πίνακες κατάστασης (στατε-σπασε ματρίτσες).

## Συστήματα Ελέγχου

- Στα γραμμικά δυναμικά συστήματα, η συμπεριφορά του συστήματος περιγράφεται με πίνακες κατάστασης (στατε-σπασε ματρίτσες).
- Η ανάλυση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων χρησιμοποιείται για να προσδιοριστεί η σταθερότητα και η δυναμική των συστημάτων ελέγχου.

# Συστήματα Ελέγχου

- Στα γραμμικά δυναμικά συστήματα, η συμπεριφορά του συστήματος περιγράφεται με πίνακες κατάστασης (στατε-σπασε ματρίτσες).
- Η ανάλυση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων χρησιμοποιείται για να προσδιοριστεί η σταθερότητα και η δυναμική των συστημάτων ελέγχου.
- Η γραμμική άλγεβρα είναι θεμελιώδης για τον σχεδιασμό ελεγκτών και την ανάλυση συστημάτων πολλαπλών εισόδων/εξόδων.

## Ανάλυση συστημάτων εναλλασσόμενου ρεύματος

- Στην ανάλυση **AC** κυκλωμάτων, τα ρεύματα και οι τάσεις συχνά αναπαριστώνται ως μιγαδικοί αριθμοί (για φάση και πλάτος).

## Ανάλυση συστημάτων εναλλασσόμενου ρεύματος

- Στην ανάλυση **AC** κυκλωμάτων, τα ρεύματα και οι τάσεις συχνά αναπαριστώνται ως μιγαδικοί αριθμοί (για φάση και πλάτος).
- Οι πίνακες χρησιμοποιούνται για την επίλυση συστημάτων **AC** με πολλαπλές συνιστώσες (πηρασορ αναλψις).

- Στην κατανομή ενέργειας και ηλεκτρικών δικτύων, η γραμμική άλγεβρα επιτρέπει:

- Στην κατανομή ενέργειας και ηλεκτρικών δικτύων, η γραμμική άλγεβρα επιτρέπει:
  - ▶ Ανάλυση ροής ισχύος.

- Στην κατανομή ενέργειας και ηλεκτρικών δικτύων, η γραμμική άλγεβρα επιτρέπει:
  - ▶ Ανάλυση ροής ισχύος.
  - ▶ Λύση μεγάλων συστημάτων τάσεων και ρευμάτων.

- Στην κατανομή ενέργειας και ηλεκτρικών δικτύων, η γραμμική άλγεβρα επιτρέπει:
  - ▶ Ανάλυση ροής ισχύος.
  - ▶ Λύση μεγάλων συστημάτων τάσεων και ρευμάτων.
  - ▶ Βελτιστοποίηση δικτύων με πολλαπλά σημεία μέτρησης.

- Οι πίνακες και οι γραμμικοί μετασχηματισμοί χρησιμοποιούνται στην ανάλυση ηλεκτρονικών φίλτρων, στην επεξεργασία σημάτων και στην ανάλυση συστημάτων επικοινωνίας.

- Ανάλυση και Επεξεργασία Δεδομένων

# Εφαρμογές Γραμμικής Άλγεβρας για Μηχανικούς Η/Υ

- Ανάλυση και Επεξεργασία Δεδομένων
- Μηχανική Μάθηση και Τεχνητή Νοημοσύνη

# Εφαρμογές Γραμμικής Άλγεβρας για Μηχανικούς Η/Υ

- Ανάλυση και Επεξεργασία Δεδομένων
- Μηχανική Μάθηση και Τεχνητή Νοημοσύνη
- Γραφικά Υπολογιστών και Προσομοιώσεις

- Ανάλυση και Επεξεργασία Δεδομένων
- Μηχανική Μάθηση και Τεχνητή Νοημοσύνη
- Γραφικά Υπολογιστών και Προσομοιώσεις
- Αλγόριθμοι και Υπολογιστικά Συστήματα

- Ανάλυση και Επεξεργασία Δεδομένων
- Μηχανική Μάθηση και Τεχνητή Νοημοσύνη
- Γραφικά Υπολογιστών και Προσομοιώσεις
- Αλγόριθμοι και Υπολογιστικά Συστήματα
- Επεξεργασία Σήματος και Επικοινωνία

- Η γραμμική άλγεβρα επιτρέπει την αναπαράσταση μεγάλων συνόλων δεδομένων ως πίνακες και διανύσματα.

## Ανάλυση και Επεξεργασία Δεδομένων

- Η γραμμική άλγεβρα επιτρέπει την αναπαράσταση μεγάλων συνόλων δεδομένων ως πίνακες και διανύσματα.
- Χρησιμοποιείται για ανάλυση δεδομένων, μείωση διαστάσεων (PCA) και στατιστική επεξεργασία.

- Πολλά μοντέλα μηχανικής μάθησης (π.χ. γραμμικά μοντέλα, νευρωνικά δίκτυα) βασίζονται σε πίνακες και διανύσματα για αναπαράσταση εισόδων, βαρών και εξόδων.

# Μηχανική Μάθηση και Τεχνητή Νοημοσύνη

- Πολλά μοντέλα μηχανικής μάθησης (π.χ. γραμμικά μοντέλα, νευρωνικά δίκτυα) βασίζονται σε πίνακες και διανύσματα για αναπαράσταση εισόδων, βαρών και εξόδων.
- Η γραμμική άλγεβρα επιτρέπει επιτάχυνση υπολογισμών και βελτιστοποίηση αλγορίθμων

- Ανάλυση διανυσμάτων και πινάκων χρησιμοποιείται για τρισδιάστατα γραφικά, μετασχηματισμούς και περιστροφές αντικειμένων.

- Ανάλυση διανυσμάτων και πινάκων χρησιμοποιείται για τρισδιάστατα γραφικά, μετασχηματισμούς και περιστροφές αντικειμένων.
- Στη φυσική προσομοίωση, η γραμμική άλγεβρα βοηθά στην επίλυση συστημάτων δυνάμεων και κίνησης.

- Η επίλυση γραμμικών συστημάτων είναι βασικό βήμα σε πολλά υπολογιστικά προβλήματα (π.χ. αναζήτηση λύσεων, βελτιστοποίηση).

# Αλγόριθμοι και Υπολογιστικά Συστήματα

- Η επίλυση γραμμικών συστημάτων είναι βασικό βήμα σε πολλά υπολογιστικά προβλήματα (π.χ. αναζήτηση λύσεων, βελτιστοποίηση).
- Χρήση πινάκων για κατάλληλη οργάνωση δεδομένων και αποτελεσματικούς υπολογισμούς.

- Πίνακες και γραμμικοί μετασχηματισμοί χρησιμοποιούνται για κωδικοποίηση, συμπίεση και ανάλυση σήματος.

- Πίνακες και γραμμικοί μετασχηματισμοί χρησιμοποιούνται για κωδικοποίηση, συμπίεση και ανάλυση σήματος.
- Στα δίκτυα και στην επεξεργασία εικόνας/ήχου, η γραμμική άλγεβρα επιτρέπει ταχύτερους και ακριβέστερους υπολογισμούς.

## Ποια είναι η διάρθρωση της ύλης

- Η ύλη διαρθρώνεται στα κάτωθι μέρη:

## Ποια είναι η διάρθρωση της ύλης

- Η ύλη διαρθρώνεται στα κάτωθι μέρη:
  - ▶ Μιγαδικοί Αριθμοί και πράξεις

## Ποια είναι η διάρθρωση της ύλης

- Η ύλη διαρθρώνεται στα κάτωθι μέρη:
  - ▶ Μιγαδικοί Αριθμοί και πράξεις
  - ▶ Πίνακες και απαλοιφή Gauss.

## Ποια είναι η διάρθρωση της ύλης

- Η ύλη διαρθρώνεται στα κάτωθι μέρη:
  - ▶ Μιγαδικοί Αριθμοί και πράξεις
  - ▶ Πίνακες και απαλοιφή Gauss.
  - ▶ Διανυσματικοί χώροι.

## Ποια είναι η διάρθρωση της ύλης

- Η ύλη διαρθρώνεται στα κάτωθι μέρη:
  - ▶ Μιγαδικοί Αριθμοί και πράξεις
  - ▶ Πίνακες και απαλοιφή Gauss.
  - ▶ Διανυσματικοί χώροι.
  - ▶ Ορθογωνιότητα.

## Ποια είναι η διάρθρωση της ύλης

- Η ύλη διαρθρώνεται στα κάτωθι μέρη:
  - ▶ Μιγαδικοί Αριθμοί και πράξεις
  - ▶ Πίνακες και απαλοιφή Gauss.
  - ▶ Διανυσματικοί χώροι.
  - ▶ Ορθογωνιότητα.
  - ▶ Ορίζουσα.

# Ποια είναι η διάρθρωση της ύλης

- Η ύλη διαρθρώνεται στα κάτωθι μέρη:
  - ▶ Μιγαδικοί Αριθμοί και πράξεις
  - ▶ Πίνακες και απαλοιφή Gauss.
  - ▶ Διανυσματικοί χώροι.
  - ▶ Ορθογωνιότητα.
  - ▶ Ορίζουσα.
  - ▶ Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων.

# Ποια είναι η διάρθρωση της ύλης

- Η ύλη διαρθρώνεται στα κάτωθι μέρη:
  - ▶ Μιγαδικοί Αριθμοί και πράξεις
  - ▶ Πίνακες και απαλοιφή Gauss.
  - ▶ Διανυσματικοί χώροι.
  - ▶ Ορθογωνιότητα.
  - ▶ Ορίζουσα.
  - ▶ Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων.
  - ▶ Θετικώς ορισμένοι πίνακες

# Ποια είναι η διάρθρωση της ύλης

- Η ύλη διαρθρώνεται στα κάτωθι μέρη:
  - ▶ Μιγαδικοί Αριθμοί και πράξεις
  - ▶ Πίνακες και απαλοιφή Gauss.
  - ▶ Διανυσματικοί χώροι.
  - ▶ Ορθογωνιότητα.
  - ▶ Ορίζουσα.
  - ▶ Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων.
  - ▶ Θετικώς ορισμένοι πίνακες
  - ▶ Υπολογισμοί με πίνακες.

- Ο βαθμός προκύπτει από τα εξής:

# Βαθμολόγηση

- Ο βαθμός προκύπτει από τα εξής:
  - ▶ Εργασίες (3 στο σύνολο)

# Βαθμολόγηση

- Ο βαθμός προκύπτει από τα εξής:
  - ▶ Εργασίες (3 στο σύνολο)
  - ▶ Τελική εξέταση (TE)

# Βαθμολόγηση

- Ο βαθμός προκύπτει από τα εξής:
  - ▶ Εργασίες (3 στο σύνολο)
  - ▶ Τελική εξέταση (TE)
- Ο τελικός βαθμός θα είναι:

$$B = \begin{cases} TE, & \text{αν } TE < 4 \text{ ή δεν παραδόθηκαν όλες οι εργασίες} \\ \max(TE, 0.4TE + 0.2E_1 + 0.2E_2 + 0.2E_3), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$