Μιγαδικοί Αριθμοί

Εισαγωγή στους Μιγαδικούς Αριθμούς

Κ.Σπανάκης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχ/κών και Μηχ/κών Η/Υ

kspan@ics.forth.gr

Ιστορική Αναφορά

- **Cardano** (1545): τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών
- **Bombelli**(1572): πρώτος που εργάζεται με φανταστικούς αριθμούς
- **Euler(1740–1750), Gauss (1799-1831), Argand (1806)**: θεωρητική και γεωμετρική θεμελίωση
- **Hamilton (1833-1843)**: επέκταση στους quaternions

Χρήσεις στους Ηλεκτρολόγους Μηχανικούς

- Ανάλυση εναλλασσόμενου ρεύματος με χρήση μιγαδικών φορτίων
- Εκφράσεις εμπέδησης $Z = R + iX$ για κυκλώματα RLC.
- Φασική ανάλυση με αναπαράσταση μέσω $e^{i\omega t}$
- Υπολογισμός ενεργού και φαινομένου ρεύματος
- Ανάλυση συντονισμού και σταθερότητας σε συχνότητες

Χρήσεις στους Μηχανικούς Η/Υ

- Επεξεργασία σήματος: μετασχηματισμοί Fourier και Laplace.
- Ανάλυση συστημάτων επικοινωνίας (modulation/demodulation)
- Ανάπτυξη γραφικών και κινούμενων σχεδίων με fractals
- Προγραμματισμός 3Δ περιστροφών με quaternions
- Αλγόριθμοι τεχνητής νοημοσύνης με χρήση μιγαδικών μορφών σήματος

Ορισμός Μιγαδικού Αριθμού

- Οι μιγαδικοί αριθμοί είναι της μορρφής $z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1$
  - Πραγματικό μέρος: $\mathrm{Re}(z) = a$
  - Φανταστικό μέρος: $\mathrm{Im}(z) = b$
- Όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί ανήκουν σε ένα σύνολο, γνωστό ως σύνολο των μιγαδικών αριθμών και αναπαρίσταται με το σύμβολο $\mathbb{C}$.

Πράξεις μεταξύ Μιγαδικών

- Έστω 2 μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$
- Τότε μπορούν, όπως και με τους κανονικούς αριθμούς να οριστούν οι ακόλουθες πράξεις:
  - Πρόσθεση
  - Αφαίρεση
  - Πολλαπλασιασμός
  - Διαίρεση

Πρόσθεση

- Έστω 2 μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = a + bi, \;\; z_2 = c + di$
- Τότε, ορίζεται η πρόσθεση των δύο αυτών αριθμών θα δώσει έναν νέον αριθμό z για τον οποίο θα ισχύει:

$$z = z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

- Παράδειγμα: Έστω $z_1 = 3 + i, \;\; z_1 = 4 + 6i$.
  Τότε $z_1 + z_2 = (3 + 4) + (1 + 6)i$
  $= 7 + 7i$.

Ιδιότητες Προσθέσεως

- Αντιμεταθετική ιδιότητα: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \ \forall z_1, \ z_2 \in \mathbb{C}$
- Προσεταιριστική ιδιότητα: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \ \forall z_1, \ z_2, \ z_3 \in \mathbb{C}$.
- Νόμοςς της διαγραφής: $z_1 + z = z_2 + z \Rightarrow z_1 = z_2, \ \forall z_1, \ z_2 \in \mathbb{C}$.
- Ουδέτερο στοιχείο προσθέσεως: Είναι ο αριθμός $z^* = 0 + 0i$, για τον οποίο ισχύει $z + z^* = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$.
- Αντίθετο στοιχείο προσθέσεως: Για κάθε $z = a + bi$, υπάρχει ο αντίθετός του $z' = (-a) + (-b)i$ και θα ισχύει $z + z' = 0 + 0i$.

Αφαίρεση

- Έστω 2 μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$
- Τότε, ορίζεται η αφαίρεση $z_1 - z_2$ ως εξής:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= z_1 + (-z_2) \\ &= (a + bi) + ((-c) + (-d)i) \\ &= (a + (-c)) + (b + (-d))i \\ &= (a - c) + (b - d)i \end{aligned}$$

Πολλαπλασιασμός

- Έστω 2 μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = a + bi,\ z_2 = c + di$
- Τότε, ορίζεται ο πολλαπλασιασμό των δύο αυτών αριθμών θα δώσει έναν νέον αριθμό z για τον οποίο θα ισχύει:

$$\begin{aligned} z &= (a+bi)(c+di) \\ &= a(c+di) + bi(c+di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2) \\ &= ac + adi + bci + bd(-1) \\ &= ac + adi + bci - bd \\ &= (ac-bd) + (ad+bc)i \end{aligned}$$

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού

- Αντιμεταθετική ιδιότητα: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \ \forall z_1, \ z_2 \in \mathbb{C}$
- Προσεταιριστική ιδιότητα: $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3, \ \forall z_1, \ z_2, \ z_3 \in \mathbb{C}$
- Επιμεριστική ιδιότητα: $z(z_1 + z_2) = z \cdot z_1 + z \cdot z_2, \ \forall z_1, \ z_2, \ z \in \mathbb{C}$
- Ουδέτερο στοιχείο πολλαπλασιασμού: Είναι ο αριθμός $z^* = 1 + 0i$, για τον οποίο ισχύει $z \cdot z^* = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$
- Αντίστροφο στοιχείο πολλαπλασιασμού: Για κάθε $z = a + bi$, υπάρχει ο αντίστροφός του z' και θα ισχύει $z \cdot z' = 1 + 0i$
- Βάσει του πολλαπλασιασμού ορίζεται και η δύναμη ενός μιγαδικού αριθμού:

$$z^n = z^{n-1} z, \ n \in \mathbb{Z}$$

- Ειδικά, ισχύει $z^1 = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$ και $z^0 = 1, \ \forall z \neq 0$.
- Επίσης, $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}, \ \forall z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0, \ n = 1, 2, \cdots$.

Διαίρεση

- Έστω 2 μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = a + bi, \; z_2 = c + di$
- Τότε, ορίζεται η διαίρεση $\frac{z_1}{z_2}$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= (a+bi)\frac{1}{c+di} \\
&= (a+bi)\frac{c-di}{(c+di)(c-di)} \\
&= (a+bi)\frac{c-di}{c(c-di)+di(c-di)} \\
&= (a+bi)\frac{c-di}{c^2-cdi+dci-(di)^2} \\
&= (a+bi)\frac{c-di}{c^2-cdi+dci-d^2i^2} \\
&= (a+bi)\frac{c-di}{c^2-cdi+dci-d^2(-1)} \\
&= (a+bi)\frac{c-di}{c^2-cdi+dci+d^2} \\
&= (a+bi)\frac{c-di}{c^2+d^2}
\end{aligned}$$

Συζυγής Μιγαδικός

- Έστω ένας μιγαδικός $z = a + bi$.
- Τότε ορίζεται ο συζυγής του $\overline{z} = a - bi$.

Ιδιότητες Συζυγών Μιγαδικών

- $\overline{-z} = -\overline{z}$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{z^n} = (\overline{z})^n, \ n = 1, 2, \cdots$
- $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}, \ z \neq 0$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \ z_2 \neq 0$
- $\overline{az} = a\overline{z_1}, \ a \in \mathbb{R}$
- Έστω $z = x + yi$ και ο συζυγής του $\overline{z} = x - y + i$. Τότε θα ισχύει:
  - $x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
  - $y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

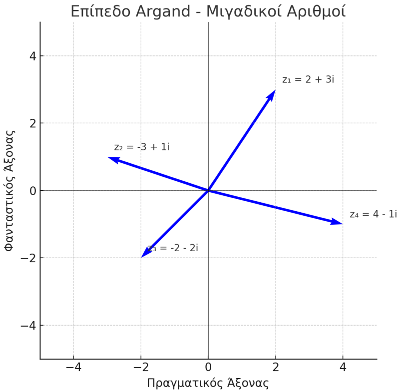
Μέτρο

- Έστω ένας μιγαδικός $z = a + bi$.
- Τότε ορίζονται ως Μέτρο ή Απόλυτη τιμή του z η ποσότητα:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Γεωμετρική Αναπαράσταση

$$z = x + yi \Rightarrow (\text{Διάνυσμα})\ (x, y) \text{ με μέτρο } \chi|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$



Επίπεδο *Argand* με μιγαδικά διανύσματα

Ιδιότητες Μέτρου

- Τριγωνική ιδιότητα: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- Γενικά ισχύει $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- $|z^n| = |z|^n, \ n = 1, 2, \cdots$
- $|z^{-1}| = |z|^{-1}, \ z \neq 0$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \ z_2 \neq 0$
- $|az| = |a||z|, \ a \in \mathbb{R}$
- $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

Άσκηση 1

- Δίνεται: $z = 3 - 4i$
- Να βρεθούν: $\overline{z}$ και $|z|$
- Λύση: $\overline{z} = 3 - (-4)i = 3 + 4i$, , $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

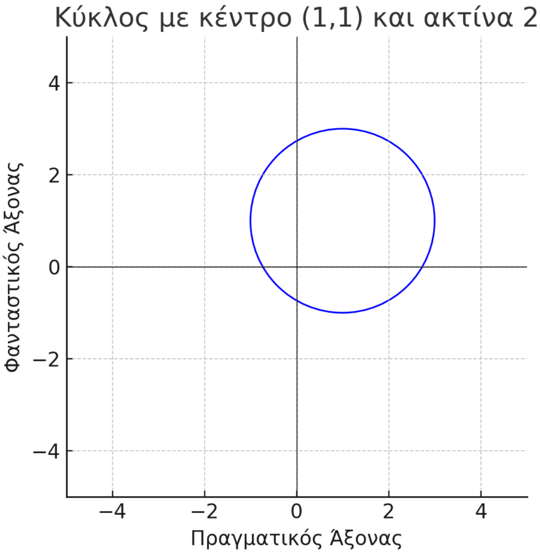
Άσκηση 2

Υπολογισμός: $(1 + 2i)(3 - i)$
Λύση: $(1 + 2i)(3 - i) = 1(3 - i) + 2i(3 - i) = 3 - i + 2 \cdot 3i - 2i^2 = 3 - i + 6i - 2(-1)$
$= 3 - i + 6i + 2 = 5 + 5i$

Άσκηση 3

- Να περιγραφεί ο γεωμετρικός τόπος: $|z-(1+i)|=2$
- Ιδέα: Έστω $z=x+yi$. Τότε αντικαθιστώντας όπου z με $x+yi$, προσπαθούμε να βρούμε την σχέση μεταξύ των x, y.
- Λύση: $|z-(1+i)|=2 \Rightarrow |z-(1+i)|^2=2^2$
  $\Rightarrow |x+yi-(1+i)|^2=2^2$
  $\Rightarrow |(x-1)+(y-1)i|^2=4$
  $\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=4$
- Άρα ο γεωμετρικός τόπος των μιγαδικών αριθμών που ικανοποιούν την αρχική ισότητα είναι ένα κύκλος με κέντρο (1,1) και ακτίνα 2.

Άσκηση 3(Συν.)

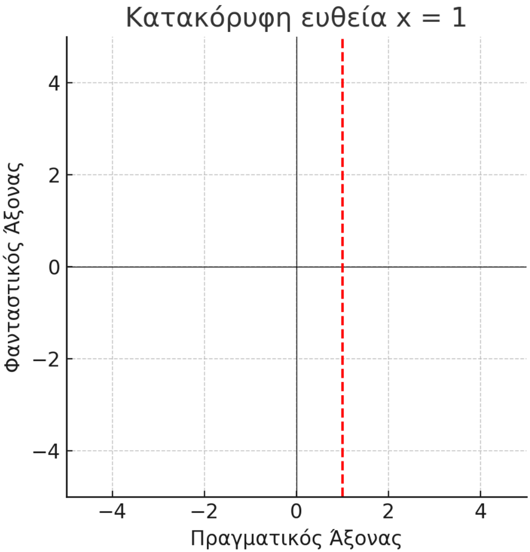


Κύκλος με κέντρο (1,1) και ακτίνα 2
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4
Φανταστικός Άξονας
Πραγματικός Άξονας

Άσκηση 4

- Να περιγραφεί ο γεωμετρικός τόπος: $Re(z) = 1$
- Ιδέα: Έστω $z = x + yi$. Τότε αντικαθιστώντας όπου z με $x + yi$, θα ισχύει $Re(z) = 1$ $x = 1$
- Συμπεραίνομε ότι είναι όλοι οι μιγαδικοί επί της ευθείας $x = 1$

Άσκηση 4 (Συν.)



Κατακόρυφη ευθεία x = 1
Φανταστικός Άξονας
Πραγματικός Άξονας
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4

Άσκηση 5

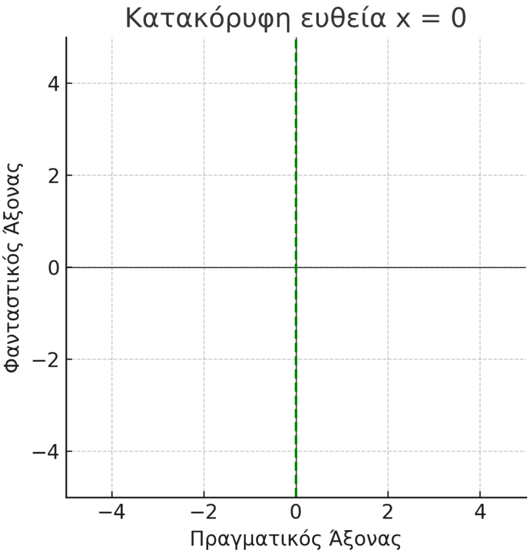
- Να αποδειχθεί ότι: $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ για $z = 2 + 2i$
- Λύση: $\overline{z} = 2 - 2i$, $z \cdot \overline{z} = (2 + i)(2 - 2i)$
  $= 2^2 - (2i)^2$
  $= 4 - 2^2 i^2$
  $= 4 - 4(-1)$
  $= 4 + 4$
  $= 8$
- Το μέτρο του z είναι $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$
  $\Rightarrow |z|^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2 = 8.$

Άσκηση 6

- Να προσδιοριστεί ο γεωμετρικός τόπος: $|z-1| = |z+1|$
- Λύση: Έστω $z = x + yi$. Τότε $|z-1| = |z+1|$
  $\Rightarrow |x+yi-1| = |x+yi+1|$
  $\Rightarrow |(x-1)+yi| = |(x+1)+yi|$
  $\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$
  $\Rightarrow (x-1)^2+y^2 = (x+1)^2+y^2$
  $\Rightarrow (x-1)^2 = (x+1)^2$
  $\Rightarrow x-1 = x+1$ ή $x-1 = -(x+1)$
  $\Rightarrow -1 = 1$ (άτοπο) ή $x-1 = -x-1$
  $\Rightarrow x = -x$
  $\Rightarrow x+x = 0$
  $\Rightarrow 2x = 0$
  $\Rightarrow x = 0$

Άσκηση 6 (Συν.)

Λύση: Ευθεία Ρε$(z) = 0$ (κατακόρυφη στον άξονα y)



Άσκηση 7

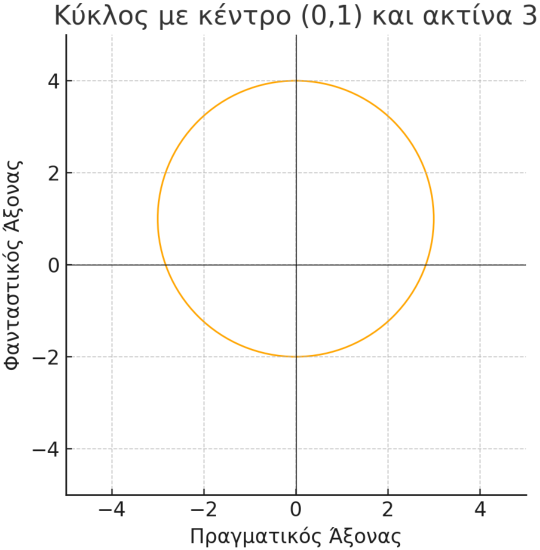
- Να αποδειχθεί η τριγωνική ανισότητα:
  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- Λύση: Απεικονίζομε στο επίπεδο Argand 2 τυχαίους μιγαδικούς z_1, z_2 και το άθροισμά τους z_3 με την μορφή διανυσμάτων.

- Εν συνεχεία, απεικονίζομε και ένα νέο διάνυσμα $z_{2b} = z_2$ το οποίο όμως έχει αρχή το τέλος του z_1.
- Έτσι προκύπτει ένα τρίγωνο με πλευρές μηκών $|z_1|$, $|z_{2b}| = |z_2|$, και $|z_3| = |z_1 + z_2|$.

Άσκηση 8

Να περιγραφεί ο γεωμετρικός τόπος: $|z - i| = 3$

Λύση: Κύκλος με κέντρο $(0, 1)$ και ακτίνα 3



Σύνοψη Θεωρίας

- Ο μιγαδικός αριθμός έχει τη μορφή $z = a + bi$
- Το μέτρο είναι $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Ο συζυγής είναι $\bar{z} = a - bi$
- Πράξεις: πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση
- Ιδιότητες μέτρου και συζυγούς: $|z|^2 = z\bar{z}$
- Αναπαριστώνται ως σημεία/διανύσματα στο επίπεδο Argand

Quiz – Ερώτηση 1

Τι είναι ο συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$·

1. $a + bi$
2. $a - bi$
3. $-a + bi$
4. $-a - bi$

Δες απάντηση

Απάντηση Ερώτησης 1

Ο συζυγής ενός μιγαδικού $z = a + bi$ είναι $\bar{z} = a - bi$, δηλαδή διατηρείται το πραγματικό μέρος και αλλάζει το πρόσημο του φανταστικού μέρους.

▸ Επιστροφή στην ερώτηση

Quiz – Ερώτηση 2

Ποιο είναι το μέτρο του $z = 3 + 4i$·

1. 7
2. 5
3. 3
4. $\sqrt{7}$

▸ Δες απάντηση

Απάντηση Ερώτησης 2

Το μέτρο ορίζεται ως $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Για $z = 3 + 4i$:

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

▸ Επιστροφή στην ερώτηση

Quiz – Ερώτηση 3

Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστός·

1. $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ πάντα
2. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
3. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
4. $|z| = a + b$

▸ Δες απάντηση

Απάντηση Ερώτησης 3

Η σχέση $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ ισχύει για κάθε μιγαδικό αριθμό και χρησιμοποιείται για υπολογισμό του μέτρου. Οι άλλες προτάσεις είναι λανθασμένες ή ισχύουν υπό προϋποθέσεις.

▸ Επιστροφή στην ερώτηση

Quiz – Ερώτηση 4

Ποιο από τα παρακάτω ισούται με i^4·

1. -1
2. 1
3. i
4. $-i$

▸ Δες απάντηση

Απάντηση Ερώτησης 4

Ισχύει ότι:

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

Άρα $i^4 = 1$.

▸ Επιστροφή στην ερώτηση

Quiz – Ερώτηση 5

Αν $z = 2 - 5i$, τότε ο συζυγής του είναι:

1. $-2 + 5i$
2. $2 + 5i$
3. $-2 - 5i$
4. $2 - 5i$

▸ Δες απάντηση

Απάντηση Ερώτησης 5

Ο συζυγής είναι $\overline{z} = 2 + 5i$, δηλαδή το φανταστικό μέρος αλλάζει πρόσημο.

Επιστροφή στην ερώτηση

Quiz – Ερώτηση 6

Ποιο σημείο στο επίπεδο Argand αντιστοιχεί στο $z = -3 + 2i$·

1. $(3, -2)$
2. $(-3, 2)$
3. $(2, -3)$
4. $(-2, 3)$

▸ Δες απάντηση

Απάντηση Ερώτησης 6

Στο επίπεδο Αργανδ, ο μιγαδικός $z = a + bi$ παριστάνεται ως σημείο (a, b). Άρα $(-3, 2)$.

Επιστροφή στην ερώτηση

Quiz – Ερώτηση 7

Ποιο είναι το μέτρο του $\dfrac{1+3i}{2+i}$.

1. 2
2. $\sqrt{7}$
3. 1
4. $\sqrt{2}$

▸ Δες απάντηση

Απάντηση Ερώτησης 7

Από ιδιότητας μέτρου μιγαδικών αριθμών ισχύει:

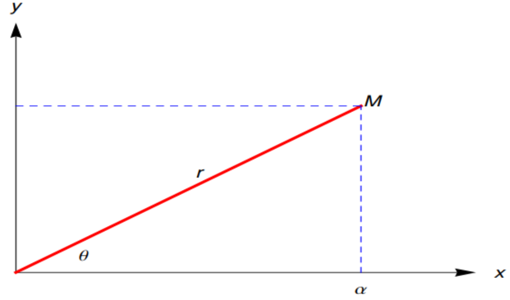
$$\left|\frac{1+3i}{2+i}\right| = \frac{|1+3i|}{|2+i|} = \frac{\sqrt{1^2+3^2}}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{1+9}}{\sqrt{4+1}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$$

Μορφές μιγαδικού αριθμού

- Υπάρχουν κάθε μιγαδικός έχεις 3 ισοδύναμες μορφές
  - Καρτεσιανή: η γνωστή $z = x + iy$
  - Τριγωνομετρική
  - Πολική
  - Εκθετική

Τριγωνομετρική μορφή

- Έστω μιγαδικόςς αριθμός $z = \alpha + i\beta,\ z \neq 0$ του οποίου η διανυσματική μορφή είναι η ακόλουθη:



- Τότε ισχύουν τα κάτωθι:

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |z| \tag{1}$$

$$\cos\theta = \frac{\alpha}{|z|},\ \sin\theta = \frac{\beta}{|z|},\ \theta \in [0, 2\pi) \tag{2}$$

- Από (1),(2) προκύπτει ότι $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ οπότε το ζεύγος $(r,\ \theta)$ στο τριγωνομετρικό σύστημα είναι το ζεύγοςς $(\alpha,\ \beta)$ με το θ να αποκαλείται όρισμα του z (ή αλλιώς $arg\ z$).

Σημαντική Σημείωση

- Κάθε μιγαδικός αριθμός $z = a + ib$ δεν έχει μοναδική τριγωνομετρική μορφή.
- Ο λόγος βρίσκεται στις ακόλουθες τριγωνομετρικές ταυτότητες:
  - $\sin x = \sin\theta \Rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \theta \\ 2k\pi + \pi - \theta \end{cases}$
  - $\cos x = \cos\theta \Rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \theta \\ 2k\pi - \theta \end{cases}$ όπου $k \in \mathbb{Z}$
- Άρα κάθε ζεύγος της μορφής $(r, 2k\pi + \theta)$, $r = |z|$, αναπαριστά σε τριγωνομετρική μορφή οποιοήποτε μιγαδικό αριθμό.

Παράδειγμα

- Βρείτε την τριγωνομετρική μορφή του $z = 1 + i\sqrt{3}$
- Αρχικά βρίσκομε το μέτρο $|z|$.
- $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3}$
  $= \sqrt{4} = 2.$
- Τώρα μένει να βρούμε το $\theta = argz$.
- $\begin{cases} \cos\theta = \frac{\alpha}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{\beta}{|z|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$
- Άρα $z = |z| \left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

Θεωρήματα

1. Έστω $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Τότε, θα ισχύει $z_1 = z_2$, αν και μόνο αν ισχύουν τα κάτωθι
   - $|z_1| = |z_2|$
   - $\theta_1 = 2k\pi + \theta_2,\ k \in \mathbb{Z}$.
2. Θεώρημα de Moivre : Έστω $z_k = |z_k|(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, $k = 1, \cdots, \nu$. Τότε $z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_\nu = |z_1||z_2| \ldots |z_\nu| \left(\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_\nu) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_\nu)\right)$

Πορίσματα

- Έστω $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.
- Τότε, θα ισχύει
$$z^{\nu} = |z|^{\nu}(\cos(\nu\theta) + i\sin(\nu\theta))$$
$$z^{-1} = |z|^{-1}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$
$$z^{-\nu} = |z|^{-\nu}(\cos(-\nu\theta) + i\sin(-\nu\theta))$$
- Κατά συνέπειαν, θα ισχύει για $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ ότι
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

Παράδειγμα

- Έστω $z_1 = 2(1+i),\ z_2 = \sqrt{5}(\sqrt{3}+i)$.
- Να βρεθούν τα κάτωθι:
  1. Οι τριγωνομετρικές μορφές τους.
  2. Το γινόμενο $z_1 z_2$.
  3. Οι δυνάμεις z_1^{10}, z_1^{9}
  4. Το πηλίκο $\dfrac{z_1}{z_2}$

Παράδειγμα: 1ο ερώτημα

- $z_1 = 2(1+i) \Rightarrow z_1 = 2 + 2i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow z_1 = |z_1|\frac{z_1}{|z_1|} = 2\sqrt{2}\frac{2(i+1)}{2\sqrt{2}}$$

$$= 2\sqrt{2}\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

- $z_2 = \sqrt{5}(\sqrt{3}+i) \Rightarrow z_2 = \sqrt{5}\sqrt{3} + \sqrt{5}i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{5}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2}$

$$= \sqrt{5\cdot 3 + 5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow z_2 = |z_2|\frac{z_2}{|z_2|} = 2\sqrt{5}\frac{\sqrt{5}(\sqrt{3}+i)}{2\sqrt{5}}$$

$$= 2\sqrt{5}\frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

$$= 2\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

Παράδειγμα: 2ο ερώτημα

- Από το 1ο ερώτημα προέκυψε ότι $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ και $z_2 = 2\sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
- Άρα $z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right)$
  $= 2\sqrt{2}2\sqrt{5}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12}\right)\right)$
  $= 4\sqrt{10}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

Παράδειγμα: 3ο ερώτημα

- $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow z_1^{10} = \left(2\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right)$$
$$= 2^{10}\left(\sqrt{2}\right)^{10}\left(\cos\left(\frac{8\pi+2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi+2\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 2^{10}2^{5}\left(\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 2^{10}2^{5}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)\right)$$
$$= 2^{10+5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= 2^{15}(0+i)$$
$$= 2^{15}i$$

- $z_2 = 2\sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Rightarrow z_2^{9} = \left(2\sqrt{5}\right)^{9}\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6}\right) = 2^{9}\left(\sqrt{5}\right)^{9}\left(\cos\left(3\pi/2\right) + i\sin\left(3\pi/2\right)\right)$$
$$== 2^{9}\left(\sqrt{5}\right)^{9}(0+i(-1))$$
$$== -2^{9}\left(\sqrt{5}\right)^{9} i$$

Παράδειγμα: 4ο ερώτημα

- Από το 1ο ερώτημα προέκυψε ότι $z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ και $z_2 = 2\sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
- Άρα $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right)$
$= \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12}\right)\right)$
$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

Πολική μορφή

- Έστω $z = a + bi$ του οποίου η τριγωνομετρική μορφή είναι $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.
- Τότε η πολική μορφή του ορίζεται από την σχέση

$$z = |z|^{\llcorner\theta}$$

όταν η γωνία εκφράζεται σε μοίρες.

Παράδειγμα

- Έστω $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
- Τότε η πολική μορφή του είναι $z = 2\sqrt{2}^{\lfloor 45^o}$

Εκθετική μορφή

- Η ταυτότητα του Euler είναι η εξής:

$$e^{i\theta} = cos\theta + i\sin\theta$$

- Άρα ο αριθμός $z = |z|(cos\theta + i\sin\theta)$ έχει εκθετική μορφή

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Παράδειγμα

- Έστω $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
- Τότε η εκθετική μορφή του είναι $z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Ρίζα μιγαδικού αριθμού

- Έστω $z = \alpha + i\beta$.
- Τότε ορίζεται ως ν-τής τάξεως ρίζα του z κάθε αριθμός της μορφής $x + iy$, για τον οποίο θα ισχύει:

$$(x + iy)^{\nu} = \alpha + i\beta$$

Θεώρημα

Δεδομένου ενός μη μηδενικού μιγαδικού $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής

$$z_k = \sqrt[\nu]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{\nu} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{\nu}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, \nu - 1$$

είναι ρίζες της εξίσωσης $w^{\nu} = z$

Παράδειγμα

- Να υπολογιστεί η παράσταση $(1+i)^{2/3}$.
- Λύση: αρχικά μετατρέπομε τον $z = 1 + i$ στην τριγωνομετρική μορφή του.
- $z = 1 + i \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + 1^2}$
  $= \sqrt{2}$
  $\Rightarrow z = |z| \dfrac{1+i}{|z|}$
  $= \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$
  $= \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$
- $(1+i)^{2/3} = \left[(1+i)^2\right]^{1/3}$
  $= \left[\left(\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right)^2\right]^{1/3}$
  $= \left[\left(\sqrt{2}\right)^2\left(\cos\dfrac{2\pi}{4} + i\sin\dfrac{2\pi}{4}\right)\right]^{1/3}$
  $= \left[2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)\right]^{1/3}$
  $= \sqrt[3]{2}\left(\cos\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right), \; k = 0,\; 1,\; 2$

Παράδειγμα 2ο

- Βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς που ικανοποιούν την παρακάτω σχέση:

$$z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$$

Λύση 2ου Παραδείγματος I

- Η ισότητα
$$z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$$
θυμίζει δευτεροβάθμια εξίσωση της μορφής:
$$az^2 + bz + c = 0$$
όπου $a = 1,\ b = 2i - 3,\ c = 5 - i$
- Υπολογίζομε την διακρίνουσα

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= (2i - 3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5 - i) \\
&= (2i)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2i + 3^2 - 4(5 - i) \\
&= 2^2 i^2 - 12i + 3^2 - 20 + 4i) \\
&= 4(-1) - 12i + 9 - 20 + 4i) \\
&= -4 - 12i + 9 - 20 + 4i) \\
&= -15 - 8i
\end{aligned}$$

- Ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας μπορεί να γίνει με 2 τρόπους:
  - Πρώτος τρόπος:

Λύση 2ου Παραδείγματος II

1. Βρίσκομε την τριγωνομετρική μορφή του:

$$
\begin{aligned}
-15-8i &= |-15-8i|(\cos\theta + i\sin\theta)\\
&= \sqrt{(-15)^2+(-8)^2}(\cos\theta + i\sin\theta)\\
&= \sqrt{225+64}(\cos\theta + i\sin\theta)\\
&= \sqrt{289}(\cos\theta + i\sin\theta)\\
&= 17(\cos\theta + i\sin\theta)
\end{aligned}
$$

όπου $\cos\theta = \dfrac{-15}{17} = -\dfrac{15}{17}$ και $\sin\theta = \dfrac{-8}{17} = -\dfrac{8}{17}$. Δεδομένου ότι $\cos\theta,\ \sin\theta < 0$, συνεπάγεται ότι $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$.

2. Άρα οι ρίζες της διακρίνουσας είναι:

$$
x_k = \sqrt{17}\left(\cos\frac{2k\pi+\theta}{2} + i\sin\frac{2k\pi+\theta}{2}\right),\quad k=0,\ 1
$$

δηλαδή οι ρίζες είναι

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \sqrt{17}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)\\
x_1 &= \sqrt{17}\left(\cos\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\pi\frac{\theta}{2}\right)\right)
\end{aligned}
$$

και ισχύει $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{3\pi}{4}$

Λύση 2ου Παραδείγματος III

3. Από τριγωνομετρικών ιδιότητων ισχύει

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

Άρα προκύπτει ότι

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

4. Τέλος στην σχέση

$$z = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

αντικαθιστούμε όπου $\sqrt{\Delta}$ με τις παραπάνω ρίζες προκύπτει ότι

$$z = -1+4i \text{ ή } z = 1-4i$$

- Δεύτερος τρόπος:

Λύση 2ου Παραδείγματος IV

1. Οι ρίζες $x + iy$ της Διακρίνουσας θα ικανοποιούν την σχέση:

$$(x + iy)^2 = -15 - 8i$$

ή αλλιώς

$$x^2 - y^2 + 2xyi = -15 - 8i$$

Για να ισχύει η ισότητα πρέπει τα φανταστικά και τα πραγματικά μέρη εκατέρωθεν της ισότητας να είναι ίσα: $\begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ 2xy = -8 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ xy = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -15 \\ y = -\frac{4}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = -15 \\ y = -\frac{4}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{16}{x^2} = -15 \\ y = -\frac{4}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^4 - 16 = -15x^2 \\ y = -\frac{4}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^4 + 15x^2 - 16 = 0 \\ y = -\frac{4}{x} \end{cases}$$

Λύση 2ου Παραδείγματος V

2. Προκύπτει ένα μη γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους όπου η πρώτη εξίσωση είναι διτετραγωνική εξίσωση, όπου αντικαθίσταται ο όρος x^2 με w και μετασχήματίζεται στην ακόλουθη μορφή:

$$w^2 + 15w - 16 = 0$$

της οποίας η διακρίνουσα είναι

$$\Delta = 15^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 225 + 64 = 289 > 0$$

Άρα $w = \dfrac{-15 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{-15 \pm 17}{2} \Rightarrow w = -16$ (απορρίπτεται) ή $w = 1$ (δεκτή)

3. Άρα $x = \pm\sqrt{w} = \pm\sqrt{1}$ οπότε προκύπτουν 2 λύσεις:
$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow z = 1 - 4i \\ x = -1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow z = -1 + 4i \end{cases}$$

Λογάριθμος μιγαδικού αριθμού

- Έστω $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Τότε υπάρχει αριθμός $w \in \mathbb{C}$, τέτοιος ώστε

$$e^w = z$$

- Αυτός θα είναι της μορφής

$$w = \ln|z| + i(\arg(z) + 2k\pi), \;\; k \in \mathbb{Z}$$

όπου για $k = 0$ έχομε την Αρχική Τιμή

$$w = Lnz = \ln|z| + i \arg z$$

Παράδειγμα

- Έστω $z = 1 + i$, ο οποίος έχει την τριγωνομετρική μορφή $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
- Τότε, ο λογάριθμός του είναι

$$w = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$$

Παράδειγμα 1ο

- Να λυθεί η εξίσωση $(z+1)^2 + (z-1)^2 = 0$
- $(z+1)^2 + (z-1)^2 = 0$
  $\Rightarrow (z^2 + 2z + 1) + (z^2 - 2z + 1) = 0$
  $\Rightarrow z^2 + 2z + 1 + z^2 - 2z + 1 = 0$
  $\Rightarrow 2z^2 + 2 = 0$
  $\Rightarrow 2(z^2 + 1) = 0$
  $\Rightarrow z^2 + 1 = 0$
  $\Rightarrow z^2 = -1$
  $\Rightarrow z = \pm 1$