Γραμμική Άλγεβρα

Πρώτη Διάλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σχετικά με το μάθημα

- Διδάσκων: Βασίλης Νάκος
- Γραφείο: B03
- eclass: https://eclass.uoa.gr/cources/D1583
- Ώρες διδασκαλίας:
  - Τετάρτη, 13.00- 15.00
  - Πέμπτη, 11.00 - 13.00 και 17.00-18.00 φροντιστήριο.

Βαθμολογικό Σχήμα και άλλα.

Δέκα Μονάδες τελική εξέταση!

1. Στο φροντιστήριο (17.00-18.00 τις Πέμπτες) θα λύνουμε ασκήσεις.
2. Στο τέλος κάποιων διαλέξεων θα αφιερώνουμε 5 λεπτά σε quiz το οποίο θα γίνεται διαθέσιμο στο e-class.

Βιβλιογραφία

Υπάρχουν διάφορες επιλογές στον Εύδοξο.

Βιβλιογραφία

Υπάρχουν διάφορες επιλογές στον Εύδοξο.

☛Προτείνεται το βιβλίο του Gilbert Strang.

Τι είναι η Γραμμική Άλγεβρα;

⋆ Άλγεβρα σημαίνει *σχέσεις*.

Τι είναι η Γραμμική Άλγεβρα;

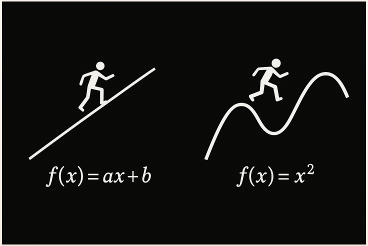
⋆ Άλγεβρα σημαίνει *σχέσεις*.

Γραμμική άλγεβρα σημαίνει σχέσεις που προσομοιάζουν σχέσεις ευθειών.

Τι είναι η Γραμμική Άλγεβρα;

⋆ Άλγεβρα σημαίνει *σχέσεις*.

Γραμμική άλγεβρα σημαίνει σχέσεις που προσομοιάζουν σχέσεις ευθειών.



Τι είναι η Γραμμική Άλγεβρα;

Οι γραμμικές σχέσεις είναι **πιο προβλέψιμες**, έχουν περισσότερη δομή.

Τι είναι η Γραμμική Άλγεβρα;

Οι γραμμικές σχέσεις είναι **πιο προβλέψιμες**, έχουν περισσότερη δομή.

Παράδειγμα: Σε μία βουνοπλαγιά, αν κινηθούμε 3 χλμ οριζόντια τότε ανεβαίνουμε κατά 1χλμ σε ύψος. Αν κινηθούμε 6 χλμ οριζόντια αναμένουμε να ανέβουμε κατά 2χλμ. Τι συμβαίνει αν η πλαγιά έχει σχήμα θόλου;

Τι είναι η Γραμμική Άλγεβρα;

Θα μελετήσουμε διάφορους τύπους γραμμικών σχέσεων με σκοπό να τις κατανοήσουμε και να ανακαλύψουμε την (συχνά κοινή) τους δομή.

Τι είναι η Γραμμική Άλγεβρα;

Θα μελετήσουμε διάφορους τύπους γραμμικών σχέσεων με σκοπό να τις κατανοήσουμε και να ανακαλύψουμε την (συχνά κοινή) τους δομή.

Αλγεβρική (συμβολική) αλλά και **γεωμετρική** αναπαράσταση.

Γιατί μελετάμε Γραμμική Άλγεβρα;

- Μοντελοποίηση πολλών προβλημάτων σε πληθώρα κλάδων.

Γιατί μελετάμε Γραμμική Άλγεβρα;

- Μοντελοποίηση πολλών προβλημάτων σε πληθώρα κλάδων.
- Το βασικό μαθηματικό εργαλείο σε
  1. Μηχανική Μάθηση/ Τεχνητή Νοημοσύνη
  2. Επεξεργασία σήματος
  3. Στατιστική
  4. Επιστήμη Δεδομένων
  5. Γραφικά
  6. Ρομποτική

Δύο παραδείγματα.

Ο πειρατής, ο οποίος βρίσκεται στο σημείο $(0, 0, 0)$ θέλει να βρει έναν θησαυρό, ο οποίος βρίσκεται σε ένα *γνωστό* σημείο του τρισδιάστατου χώρου.

Λόγω ιδιορρυθμίας του νησιού στο οποίο βρίσκεται, ο πειρατής μπορεί να κινηθεί μόνο κατά μήκος κάποιων συγκεκριμένων δοθέντων *διευθύνσεων*.

Μπορεί να φτάσει στο θησαυρό του και αν ναι πως;

Σχήμα: Χαρούμενος πειρατής ατενίζει την περιπέτεια αναζήτησης θησαυρού με αισιοδοξία, αφότου παρακολούθησε ένα μάθημα Γραμμικής Άλγεβρας.

Δύο Παραδείγματα.

Ο Πανοραμίξ διαθέτει ένα σύνολο καζανιών, καθένα από τα οποία περιέχει ένα μίγμα που περιγράφεται από τέσσερις αριθμούς. Κάθε αριθμός αντιστοιχεί στην ποσότητα ενός από τα τέσσερα στοιχεία (και μπορεί να είναι ακόμα και αρνητικός). Θέλοντας να εξοικονομήσει χώρο στο σπίτι του, επιδιώκει να διατηρήσει τον ελάχιστο δυνατό αριθμό καζανιών, έτσι ώστε να μπορεί πάντα να παρασκευάζει όλους τους ζωμούς που θα μπορούσε να φτιάξει χρησιμοποιώντας το πλήρες σετ.

Σχήμα: Ο Πανοραμίξ ανακατεύει μερικά καζάνια.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0.12 \\ 2.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.33 \\ -1.3 \\ -2.7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.1 \\ -2.02 \\ 0.12 \\ 2.5 \end{bmatrix}, \ldots$$

Δύο παραδείγματα γραμμικών συστημάτων.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ x \qquad\quad - \ \ z = 1 \end{cases}$$

Δύο παραδείγματα γραμμικών συστημάτων.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ x \qquad\quad - \ \ z = 1 \end{cases}$$

Το $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ είναι μία πιθανή λύση - αλλά όχι η μόνη λύση.

Δύο παραδείγματα γραμμικών συστημάτων.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ x \qquad\quad - \ z = 1 \end{cases}$$

Το $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ είναι μία πιθανή λύση - αλλά όχι η μόνη λύση.
$\star$ Το σύνολο των τριάδων (x, y, z) που επαληθεύουν κάθε εξίσωση ονομάζεται ***λύση*** του συστήματος.

Δύο παραδείγματα γραμμικών συστημάτων.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 8z = 15 \\ x \qquad\quad - \ z = 1 \end{cases}$$

Το $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ είναι μία πιθανή λύση - αλλά όχι η μόνη λύση.
⋆ Το σύνολο των τριάδων (x, y, z) που επαληθεύουν κάθε εξίσωση ονομάζεται ***λύση*** του συστήματος.

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ -x - y = -7 \end{cases}$$

Καμία λύση!

Δύο συστήματα λέγονται ισοδύναμα όταν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

Δύο συστήματα λέγονται ισοδύναμα όταν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

Θεώρημα

Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να έχει μηδέν, μία ή άπειρες λύσεις!

Δύο συστήματα λέγονται ισοδύναμα όταν έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

Θεώρημα

Ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να έχει μηδέν, μία ή άπειρες λύσεις!

Γεωμετρική ερμηνεία ως τομή ευθείων ή επιπέδων!

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

Λύση του συστήματος τα σημεία τομής των **ευθειών** $x + y = 8, x - y = 9.$

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

Λύση του συστήματος τα σημεία τομής των **ευθειών**

$x + y = 8, x - y = 9.$

⋆ Μία ευθεία είναι όλα τα (x, y) που ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

Λύση του συστήματος τα σημεία τομής των **ευθειών** $x + y = 8, x - y = 9.$

$\star$ Μία ευθεία είναι όλα τα (x, y) που ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

$\star$ Ένα επίπεδο είναι όλα τα (x, y, z) που ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta.$$

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

Λύση του συστήματος τα σημεία τομής των **ευθειών** $x + y = 8, x - y = 9.$

$\star$ Μία ευθεία είναι όλα τα (x, y) που ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

$\star$ Ένα επίπεδο είναι όλα τα (x, y, z) που ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta.$$

$$\begin{cases} x + y + \ \ z = 8 \\ x - y + 3z = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=9 \end{cases}$$

Λύση του συστήματος τα σημεία τομής των **ευθειών**
$x+y=8, x-y=9.$

⋆ Μία ευθεία είναι όλα τα (x,y) που ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

⋆ Ένα επίπεδο είναι όλα τα (x,y,z) που ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta.$$

$$\begin{cases} x+y+\ \ z=8 \\ x-y+3z=9 \end{cases}$$

Λύση του συστήματος τα σημεία τομής των **επιπέδων**
$x+y+z=8, x-y+3z=9.$

Ερώτηση Κατανόησης.

Η εξίσωση $x = 2$ εκφράζει

Ερώτηση Κατανόησης.

Η εξίσωση $x = 2$ εκφράζει

1. μία ευθεία στο επίπεδο,
2. ένα επίπεδο στον χώρο
3. τίποτα από τα παραπάνω
4. εξαρτάται, δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι όπως τίθεται το ερώτημα.

Ερώτηση Κατανόησης.

Η εξίσωση $x = 2$ εκφράζει

1. μία ευθεία στο επίπεδο,
2. ένα επίπεδο στον χώρο
3. τίποτα από τα παραπάνω
4. εξαρτάται, δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι όπως τίθεται το ερώτημα.

Σωστή απάντηση το (4).

Κατηγοριοποιήσεις συστημάτων.

Όταν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει

- Καμία λύση $\Rightarrow$ Ασύμβατο

Κατηγοριοποιήσεις συστημάτων.

Όταν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει

- Καμία λύση $\Rightarrow$ Ασύμβατο
- Ακριβώς μία λύση $\Rightarrow$ Συμβατό

Κατηγοριοποιήσεις συστημάτων.

Όταν ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει

- Καμία λύση $\Rightarrow$ Ασύμβατο
- Ακριβώς μία λύση $\Rightarrow$ Συμβατό
- Άπειρες λύσεις $\Rightarrow$ Υπερκαθορισμένο

Γεωμετρική Ερμηνεία.

- Ασύμβατο $\Rightarrow$ Οι ευθείες, επίπεδα (και υπερεπίπεδα) **δεν** τέμνονται!

Γεωμετρική Ερμηνεία.

- Ασύμβατο $\Rightarrow$ Οι ευθείες, επίπεδα (και υπερεπίπεδα) **δεν** τέμνονται!
- Συμβατό $\Rightarrow$ Οι ευθείες, επίπεδα (και υπερεπίπεδα) **τέμνονται** σε **ακριβώς ένα** σημείο.

Γεωμετρική Ερμηνεία.

- Ασύμβατο ⇒ Οι ευθείες, επίπεδα (και υπερεπίπεδα) **δεν** τέμνονται!
- Συμβατό ⇒ Οι ευθείες, επίπεδα (και υπερεπίπεδα) **τέμνονται** σε **ακριβώς ένα** σημείο.
- Υπερκαθορισμένο ⇒ Οι ευθείες, επίπεδα (και υπερεπίπεδα) τέμνονται σε **άπειρα** σημεία!

Παραδείγματα.

Καμία λύση

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$$

Παραδείγματα.

Καμία λύση

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$$

Άπειρες λύσεις

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Παραδείγματα.

Καμία λύση

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ 2x + 2y = -1 \end{cases}$$

Άπειρες λύσεις

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Μοναδική λύση

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

Πως λύνουμε ένα γραμμικό σύστημα; Υπενθύμιση.

Ξέρουμε δύο βασικές πράξεις.

- **Προσθέτουμε** σε μια εξίσωση το πολλαπλάσιο κάποιας άλλης.

Πως λύνουμε ένα γραμμικό σύστημα; Υπενθύμιση.

Ξέρουμε δύο βασικές πράξεις.

- **Προσθέτουμε** σε μια εξίσωση το πολλαπλάσιο κάποιας άλλης.
- **Πολλαπλασιάζουμε** τους όρους μιας εξίσωσης με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

Παράδειγμα.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ \phantom{-4x + {}} 2y - 8z = 8 \\ -4x + 5y + 9z = -9 \end{cases}$$

Παράδειγμα.

$$\begin{cases} x - 2y + \quad z = 0 \\ \qquad 2y - 8z = 8 \\ -4x + 5y + 9z = -9 \end{cases}$$

⋆ Προσθέτω στην τρίτη εξίσωση 4 φορές την πρώτη και παίρνω

$$\begin{cases} x - 2y + \quad z = 0 \\ \qquad 2y - \ 8z = 8 \\ \quad - 3y + 13z = -9 \end{cases}$$

Παράδειγμα, συνέχεια.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ \phantom{x - {}} 2y - 8z = 8 \\ - 3y + 13z = -9 \end{cases}$$

Παράδειγμα, συνέχεια.

$$\begin{cases} x - 2y + \quad z = 0 \\ \quad\;\; 2y - \;\; 8z = 8 \\ \quad - 3y + 13z = -9 \end{cases}$$

⋆ Διαιρώ την 2η εξίσωση με δύο και προσθέτω στην 3η εξίσωση 3 φορές την 2η.

$$\begin{cases} x - 2y + \; z = 0 \\ \qquad\quad y - 4z = 4 \\ \qquad\qquad\quad z = 3 \end{cases}$$

Αναπαράσταση Γραμμικών Συστημάτων.

Έστω m γραμμικές εξισώσεις με n αγνώστους.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= \beta_2 \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= \beta_m \end{aligned}$$

Αναπαράσταση Γραμμικών Συστημάτων.

Έστω m γραμμικές εξισώσεις με n αγνώστους.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= \beta_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= \beta_2 \\
&\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= \beta_m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 + \ldots - 2x_n &= -1 \\
-3x_1 + 6x_2 + \ldots + 8x_n &= -2 \\
&\ldots \\
4x_1 + 5x_2 + \ldots + 8x_n &= -2
\end{aligned}
$$

Έστω m γραμμικές εξισώσεις με n αγνώστους.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= \beta_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= \beta_2 \\
&\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= \beta_m
\end{aligned}
$$

Έστω m γραμμικές εξισώσεις με n αγνώστους.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= \beta_2 \\ &\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= \beta_m \end{aligned}$$

Πίνακας συντελεστών:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Αναπαράσταση Γραμμικών Συστημάτων.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Αναπαράσταση Γραμμικών Συστημάτων.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ο συμβολισμός $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ θα χρησιμοποιείται για να υποδείξουμε ότι ο πίνακας έχει m γραμμές, n στήλες και έχει στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

Αναπαράσταση συστήματος: Ο επαυξημένος πίνακας

Βάζουμε τους συντελεστές των μεταβλητών και τους σταθερούς όρους σε μια κοινή αναπαράσταση.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & \beta_m \end{array}\right]$$

Αναπαράσταση συστήματος: Ο επαυξημένος πίνακας

Βάζουμε τους συντελεστές των μεταβλητών και τους σταθερούς όρους σε μια κοινή αναπαράσταση.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & \beta_m \end{array}\right]$$

⋆ Κάθε στήλη πλην της τελευταίας αντιστοιχεί σε μία *μεταβλητή* και κάθε γραμμή σε μία *εξίσωση*.

Αναπαράσταση συστήματος: Ο επαυξημένος πίνακας

Βάζουμε τους συντελεστές των μεταβλητών και τους σταθερούς όρους σε μια κοινή αναπαράσταση.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & \beta_m \end{array}\right]$$

⋆ Κάθε στήλη πλην της τελευταίας αντιστοιχεί σε μία *μεταβλητή* και κάθε γραμμή σε μία *εξίσωση*.

⋆ Η τελευταία στήλη αντιστοιχεί στους *σταθερούς* όρους.

Παραδείγματα.

Σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & -9 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

Παραδείγματα.

Σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \phantom{-4x_1 + {}} 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

Σύστημα 2 εξισώσεων με 3 αγνώστους.

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

Τρεις κανόνες για να δουλέψουμε πάνω στον επαυξημένο πίνακα:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

Τρεις κανόνες για να δουλέψουμε πάνω στον επαυξημένο πίνακα:

1. **Προσθέτουμε** σε μια γραμμή (εξίσωση) το πολλαπλάσιο κάποιας άλλης.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

Τρεις κανόνες για να δουλέψουμε πάνω στον επαυξημένο πίνακα:

1. **Προσθέτουμε** σε μια γραμμή (εξίσωση) το πολλαπλάσιο κάποιας άλλης.
2. **Ανταλλάσουμε** θέσεις δύο γραμμών (εξισώσεων).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

Τρεις κανόνες για να δουλέψουμε πάνω στον επαυξημένο πίνακα:

1. **Προσθέτουμε** σε μια γραμμή (εξίσωση) το πολλαπλάσιο κάποιας άλλης.
2. **Ανταλλάσουμε** θέσεις δύο γραμμών (εξισώσεων).
3. **Πολλαπλασιάζουμε** τους όρους της γραμμής (εξίσωσης) με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

⋆ Προσθέτω στην τρίτη εξίσωση 4 φορές την πρώτη.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

⋆ Προσθέτω στην τρίτη εξίσωση 4 φορές την πρώτη.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right]$$

⋆ Πολλαπλασιάζω την δεύτερη εξίσωση με $1/2$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right]$$

⋆ Προσθέτω στην τρίτη εξίσωση 3 φορές τη δεύτερη.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right]$$

⋆ Προσθέτω στην τρίτη εξίσωση 3 φορές τη δεύτερη.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$\star x_3 = 3.$ Προσθέτω στην δεύτερη εξίσωση 4 φορές την 3η.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$\star x_3 = 3.$ Προσθέτω στην πρώτη εξίσωση 2 φορές την 2η.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$\star x_3 = 3$. Προσθέτω στην πρώτη εξίσωση 2 φορές την 2η.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$\star x_1 = 29, x_2 = 16, x_3 = 3.$

Στοιχειώδεις γραμμοπράξεις σε πίνακες.

1. **Αντικατάσταση** μιας γραμμής από το άθροισμα του εαυτού της και ενός πολλαπλάσιου μια γραμμής.
2. **Ανταλλαγή** δύο γραμμών μεταξύ τους.
3. **Πολλαπλασιασμός** όλων των στοιχείων μιας γραμμής με μη μηδενική σταθερά.

Γραμμοϊσοδύναμοι πίνακες: Ο ένας μετασχηματίζεται στον άλλον μέσω γραμμοπράξεων.

Κλιμακωτή μορφή πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \underline{2} & -3 & 2 & 1 \\ 0 & \underline{1} & -4 & 8 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 5/2 \end{array}\right]$$

Τα αριστερότερα μη μηδενικά στοιχεία κάθε γραμμής δημιουργούν μια σκάλα.

Κλιμακωτή μορφή πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \underline{2} & -3 & 2 & 1 \\ 0 & \underline{1} & -4 & 8 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 5/2 \end{array}\right]$$

Τα αριστερότερα μη μηδενικά στοιχεία κάθε γραμμής δημιουργούν μια σκάλα.

⋆ Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής αποκαλείται οδηγός.

Κλιμακωτή μορφή πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \underline{2} & -3 & 2 & 1 \\ 0 & \underline{1} & -4 & 8 \\ 0 & 0 & \underline{3} & 5/2 \end{array}\right]$$

Τα αριστερότερα μη μηδενικά στοιχεία κάθε γραμμής δημιουργούν μια σκάλα.

⋆ Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής αποκαλείται οδηγός.

- Αν υπάρχουν γραμμές που έχουν μόνο μηδενικά, αυτές έρχονται τελευταίες.
- Ο οδηγός κάθε γραμμής βρίσκεται τουλάχιστον μια στήλη πιο δεξιά από τον οδηγό της προηγούμενης γραμμής.

Κλιμακωτή μορφή πίνακα

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \underline{2} & -3 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{3} & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{array}\right]$$

Κλιμακωτή μορφή πίνακα

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \underline{2} & -3 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{3} & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{array}\right]$$

Αυτός ο επαυξημένος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφής.

Κλιμακωτή μορφή πίνακα

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \underline{2} & -3 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{3} & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{array}\right]$$

Αυτός ο επαυξημένος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφής. Λόγω της τελευταίας εξίσωσης το σύστημα στο οποίο αντιστοιχεί είναι αδύνατο.

Κλιμακωτή μορφή πίνακα

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \underline{2} & -3 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{3} & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{array}\right]$$

Αυτός ο επαυξημένος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφής. Λόγω της τελευταίας εξίσωσης το σύστημα στο οποίο αντιστοιχεί είναι αδύνατο.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \underline{2} & -3 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{3} & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Αυτό όμως είναι συμβατό.

Ανηγμένη κλιμακωτή μορφή πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 \end{array}\right]$$

Ανηγμένη κλιμακωτή μορφή πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 \end{array}\right]$$

- Κάθε οδηγός ισούται με 1.
- Κάθε οδηγός είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει.

Παραδείγματα.

Κλιμακωτή ✓ αλλά όχι ανηγμένη κλιμακωτή ✗.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \color{red}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Παραδείγματα.

Κλιμακωτή ✓ αλλά όχι ανηγμένη κλιμακωτή ✗.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & {\color{red}2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Όχι κλιμακωτή ✗.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ {\color{red}1} & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Παραδείγματα.

Κλιμακωτή ✓ αλλά όχι ανηγμένη κλιμακωτή ✗.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Όχι κλιμακωτή ✗.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

Ανηγμένη κλιμακωτή ✓✓.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!