

Γραμμική Άλγεβρα

Δέκατη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Υπενθύμιση για ορίζουσες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω A_{jk} ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον A την j -οστή γραμμή και την k -οστή στήλη.

Υπενθύμιση για ορίζουσες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω A_{jk} ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον A την j -οστή γραμμή και την k -οστή στήλη.

Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} \det(A_{jk})$.

Υπενθύμιση για ορίζουσες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω A_{jk} ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον A την j -οστή γραμμή και την k -οστή στήλη. Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} \det(A_{jk})$. Τότε η ορίζουσα $\det(A)$ ισούται για οποιοδήποτε i με (ανάπτυγμα κατά i -οστή γραμμή):

Υπενθύμιση για ορίζουσες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω A_{jk} ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον A την j -οστή γραμμή και την k -οστή στήλη. Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} \det(A_{jk})$. Τότε η ορίζουσα $\det(A)$ ισούται για οποιοδήποτε i με (ανάπτυγμα κατά i -οστή γραμμή):

$$\det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots + a_{in} C_{in}$$

και με (ανάπτυγμα κατά i -οστή στήλη):

Υπενθύμιση για ορίζουσες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω A_{jk} ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τον A την j -οστή γραμμή και την k -οστή στήλη. Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} \det(A_{jk})$. Τότε η ορίζουσα $\det(A)$ ισούται για οποιοδήποτε i με (ανάπτυγμα κατά i -οστή γραμμή):

$$\det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots + a_{in} C_{in}$$

και με (ανάπτυγμα κατά i -οστή στήλη):

$$\det(A) = a_{1i} \cdot C_{1i} + a_{2i} C_{2i} + \dots + a_{ni} C_{ni}$$

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω ο πίνακας B που προκύπτει αν ανταλλάξουμε δύο γραμμές του A . Τότε $\det(A) = -\det(B)$.

Ιδιότητες Ορίζουσας: Ανταλλαγή Γραμμών.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω ο πίνακας B που προκύπτει αν ανταλλάξουμε δύο γραμμές του A . Τότε $\det(A) = -\det(B)$.

Απόδειξη για 2×2 πίνακες:

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω ο πίνακας B που προκύπτει αν ανταλλάξουμε δύο γραμμές του A . Τότε $\det(A) = -\det(B)$.

Απόδειξη για 2×2 πίνακες: Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

Ιδιότητες Ορίζουσας: Ανταλλαγή Γραμμών.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω ο πίνακας B που προκύπτει αν ανταλλάξουμε δύο γραμμές του A . Τότε $\det(A) = -\det(B)$.

Απόδειξη για 2×2 πίνακες: Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω ο πίνακας B που προκύπτει αν ανταλλάξουμε δύο γραμμές του A . Τότε $\det(A) = -\det(B)$.

Απόδειξη για 2×2 πίνακες: Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

Τότε $\det(A) = ad - cb$

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω ο πίνακας B που προκύπτει αν ανταλλάξουμε δύο γραμμές του A . Τότε $\det(A) = -\det(B)$.

Απόδειξη για 2×2 πίνακες: Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

Τότε $\det(A) = ad - cb$ και

$$\det(B) = cb - ad = -(ad - cb) = -\det(A)$$

Η γενική απόδειξη με επαγωγή.

Πόρισμα

Αν ένας πίνακας A έχει δύο γραμμές ίδιες, τότε $\det(A) = 0$.

Πόρισμα

Αν ένας πίνακας A έχει δύο γραμμές ίδιες, τότε $\det(A) = 0$.

★ Απόδειξη: Έστω j, k οι δύο γραμμές του A οι οποίες είναι ίσες.

Πόρισμα

Αν ένας πίνακας A έχει δύο γραμμές ίδιες, τότε $\det(A) = 0$.

★ Απόδειξη: Έστω j, k οι δύο γραμμές του A οι οποίες είναι ίσες. Έστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν ανταλλάξουμε τις δύο αυτές γραμμές.

Πόρισμα

Αν ένας πίνακας A έχει δύο γραμμές ίδιες, τότε $\det(A) = 0$.

★ Απόδειξη: Έστω j, k οι δύο γραμμές του A οι οποίες είναι ίσες. Έστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν ανταλλάξουμε τις δύο αυτές γραμμές. Τότε από το προηγούμενο έχουμε $\det(A) = -\det(B)$.

Πόρισμα

Αν ένας πίνακας A έχει δύο γραμμές ίδιες, τότε $\det(A) = 0$.

★ Απόδειξη: Έστω j, k οι δύο γραμμές του A οι οποίες είναι ίσες. Έστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν ανταλλάξουμε τις δύο αυτές γραμμές. Τότε από το προηγούμενο έχουμε $\det(A) = -\det(B)$. Ωστόσο $A = B$ διότι οι γραμμές είναι ίδιες, άρα και $\det(A) = \det(B)$.

Πόρισμα

Αν ένας πίνακας A έχει δύο γραμμές ίδιες, τότε $\det(A) = 0$.

★ Απόδειξη: Έστω j, k οι δύο γραμμές του A οι οποίες είναι ίσες. Έστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν ανταλλάξουμε τις δύο αυτές γραμμές. Τότε από το προηγούμενο έχουμε $\det(A) = -\det(B)$. Ωστόσο $A = B$ διότι οι γραμμές είναι ίδιες, άρα και $\det(A) = \det(B)$. Οι δύο σχέσεις δίνουν $\det(A) = 0$.

Πόρισμα

Αν ένας πίνακας A έχει δύο γραμμές ίδιες, τότε $\det(A) = 0$.

★ Απόδειξη: Έστω j, k οι δύο γραμμές του A οι οποίες είναι ίσες. Έστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν ανταλλάξουμε τις δύο αυτές γραμμές. Τότε από το προηγούμενο έχουμε $\det(A) = -\det(B)$. Ωστόσο $A = B$ διότι οι γραμμές είναι ίδιες, άρα και $\det(A) = \det(B)$. Οι δύο σχέσεις δίνουν $\det(A) = 0$.

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε **μια** γραμμή ή στήλη του A με $\beta \in \mathbb{R}$. Τότε $\det(B) = \beta \cdot \det(A)$.

★ Απόδειξη: Έστω ότι η γραμμή που πολλαπλασιάζεται είναι η i . Τότε αναπτύσσοντας ως προς την γραμμή i

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε **μια** γραμμή ή στήλη του A με $\beta \in \mathbb{R}$. Τότε $\det(B) = \beta \cdot \det(A)$.

★ Απόδειξη: Έστω ότι η γραμμή που πολλαπλασιάζεται είναι η i . Τότε αναπτύσσοντας ως προς την γραμμή i

$$\det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in},$$

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε **μια** γραμμή ή στήλη του A με $\beta \in \mathbb{R}$. Τότε $\det(B) = \beta \cdot \det(A)$.

★ Απόδειξη: Έστω ότι η γραμμή που πολλαπλασιάζεται είναι η i . Τότε αναπτύσσοντας ως προς την γραμμή i

$$\det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in},$$

Και

$$\det(B) = \beta \cdot a_{i1} \cdot C_{i1} + \beta \cdot a_{i2}C_{i2} + \dots + \beta \cdot a_{in}C_{in} =$$

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ο πίνακας που προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε **μια** γραμμή ή στήλη του A με $\beta \in \mathbb{R}$. Τότε $\det(B) = \beta \cdot \det(A)$.

★ Απόδειξη: Έστω ότι η γραμμή που πολλαπλασιάζεται είναι η i . Τότε αναπτύσσοντας ως προς την γραμμή i

$$\det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \dots + a_{in}C_{in},$$

Και

$$\det(B) = \beta \cdot a_{i1} \cdot C_{i1} + \beta \cdot a_{i2}C_{i2} + \dots + \beta \cdot a_{in}C_{in} = \beta \cdot \det(A)$$

Ιδιότητες Ορίζουσας: Προσθέτοντας δύο γραμμές

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω δύο γραμμές $i \neq j$. Έστω ο πίνακας B που προκύπτει από τον A με την γραμμοπράξη $\Gamma_i := \Gamma_i + \beta \cdot \Gamma_j$ (κοινώς προσθέτουμε β φορές την j -οστή γραμμή στην i -οστή). Τότε $\det(B) = \det(A)$. Όμοια και για την γραμμοπράξη με στήλες.

Ιδιότητες Ορίζουσας: Προσθέτοντας δύο γραμμές

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω δύο γραμμές $i \neq j$. Έστω ο πίνακας B που προκύπτει από τον A με την γραμμοπράξη $\Gamma_i := \Gamma_i + \beta \cdot \Gamma_j$ (κοινώς προσθέτουμε β φορές την j -οστή γραμμή στην i -οστή). Τότε $\det(B) = \det(A)$. Όμοια και για την γραμμοπράξη με στήλες.

★ ‘Απόδειξη’: Ας το κάνουμε για $i = 1, j = 2$. Η i -οστή (πρώτη) γραμμή του B ισούται με

$$[a_{11} + \beta \cdot a_{21} \quad a_{12} + \beta \cdot a_{22}, \quad \dots]$$

Ιδιότητες Ορίζουσας: Προσθέτοντας δύο γραμμές

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω δύο γραμμές $i \neq j$. Έστω ο πίνακας B που προκύπτει από τον A με την γραμμοπράξη $\Gamma_i := \Gamma_i + \beta \cdot \Gamma_j$ (κοινώς προσθέτουμε β φορές την j -οστή γραμμή στην i -οστή). Τότε $\det(B) = \det(A)$. Όμοια και για την γραμμοπράξη με στήλες.

★ ‘Απόδειξη’: Ας το κάνουμε για $i = 1, j = 2$. Η i -οστή (πρώτη) γραμμή του B ισούται με

$$[a_{11} + \beta \cdot a_{21} \quad a_{12} + \beta \cdot a_{22}, \quad \dots]$$

Αναπτύσσοντας τον B ως προς την i -οστή γραμμή έχουμε

$$\det(B) = (a_{11} + \beta a_{21}) \cdot C_{11} + (a_{12} + \beta a_{22}) C_{12} + \dots =$$

Ιδιότητες Ορίζουσας: Προσθέτοντας δύο γραμμές

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω δύο γραμμές $i \neq j$. Έστω ο πίνακας B που προκύπτει από τον A με την γραμμοπράξη $\Gamma_i := \Gamma_i + \beta \cdot \Gamma_j$ (κοινώς προσθέτουμε β φορές την j -οστή γραμμή στην i -οστή). Τότε $\det(B) = \det(A)$. Όμοια και για την γραμμοπράξη με στήλες.

★ 'Απόδειξη': Ας το κάνουμε για $i = 1, j = 2$. Η i -οστή (πρώτη) γραμμή του B ισούται με

$$[a_{11} + \beta \cdot a_{21} \quad a_{12} + \beta \cdot a_{22}, \quad \dots]$$

Αναπτύσσοντας τον B ως προς την i -οστή γραμμή έχουμε

$$\det(B) = (a_{11} + \beta a_{21}) \cdot C_{11} + (a_{12} + \beta a_{22}) C_{12} + \dots =$$

$$(a_{i1} C_{11} + a_{12} C_{12} + \dots) + \beta (a_{21} C_{11} + a_{22} C_{12} + \dots) =$$

Ιδιότητες Ορίζουσας: Προσθέτοντας δύο γραμμές

Θεώρημα

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω δύο γραμμές $i \neq j$. Έστω ο πίνακας B που προκύπτει από τον A με την γραμμοπράξη $\Gamma_i := \Gamma_i + \beta \cdot \Gamma_j$ (κοινώς προσθέτουμε β φορές την j -οστή γραμμή στην i -οστή). Τότε $\det(B) = \det(A)$. Όμοια και για την γραμμοπράξη με στήλες.

★ 'Απόδειξη': Ας το κάνουμε για $i = 1, j = 2$. Η i -οστή (πρώτη) γραμμή του B ισούται με

$$[a_{11} + \beta \cdot a_{21} \quad a_{12} + \beta \cdot a_{22}, \quad \dots]$$

Αναπτύσσοντας τον B ως προς την i -οστή γραμμή έχουμε

$$\det(B) = (a_{11} + \beta a_{21}) \cdot C_{11} + (a_{12} + \beta a_{22}) C_{12} + \dots =$$

$$(a_{i1} C_{11} + a_{12} C_{12} + \dots) + \beta (a_{21} C_{11} + a_{22} C_{12} + \dots) = \det(A) + 0 = \det(A)$$

Γραμμοπράξεις και ορίζουσα.

Η ανταλλαγή γραμμών, ο πολλαπλασιασμός γραμμής με αριθμό και πρόσθεση μιας γραμμής (ή μιας στήλης) σε μια άλλη γραμμή (ή στήλη) είναι οι γνωστές μας *γραμμοπράξεις*.

Γραμμοπράξεις και ορίζουσα.

Η ανταλλαγή γραμμών, ο πολλαπλασιασμός γραμμής με αριθμό και πρόσθεση μιας γραμμής (ή μιας στήλης) σε μια άλλη γραμμή (ή στήλη) είναι οι γνωστές μας *γραμμοπράξεις*.

Δείξαμε τι συμβαίνει σε μια ορίζουσα υπό καθεμία από αυτές τις γραμμοπράξεις.

Γραμμοπράξεις και ορίζουσα.

Η ανταλλαγή γραμμών, ο πολλαπλασιασμός γραμμής με αριθμό και πρόσθεση μιας γραμμής (ή μιας στήλης) σε μια άλλη γραμμή (ή στήλη) είναι οι γνωστές μας *γραμμοπράξεις*.

Δείξαμε τι συμβαίνει σε μια ορίζουσα υπό καθεμία από αυτές τις γραμμοπράξεις.

- Ανταλλαγή γραμμών: αλλαγή προσήμου.
- Πολλαπλασιασμός γραμμής (ή στήλης) με αριθμό: πολλαπλασιασμός της ορίζουσας.
- Πρόσθεση κάποιου πολλαπλάσιου μιας γραμμής (ή στήλης) σε μία άλλη (αντίστοιχα στήλη): ίδια ορίζουσα.

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $\det(A) \neq 0$.

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $\det(A) \neq 0$.

★ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $\det(A) \neq 0$.

★ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Έτσι δημιουργείται μια ακολουθία πινάκων $A \Rightarrow A^{(1)} \Rightarrow A^{(2)} \Rightarrow \dots \Rightarrow A^{(p)}$.

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $\det(A) \neq 0$.

★ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Έτσι δημιουργείται μια ακολουθία πινάκων $A \Rightarrow A^{(1)} \Rightarrow A^{(2)} \Rightarrow \dots \Rightarrow A^{(p)}$.

Ο $A^{(p)}$ είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και άρα αν είναι τέλεια σκάλα (δηλαδή A αντιστρέψιμος) έχουμε $\det(A^{(p)}) = 1$,

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $\det(A) \neq 0$.

★ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Έτσι δημιουργείται μια ακολουθία πινάκων $A \Rightarrow A^{(1)} \Rightarrow A^{(2)} \Rightarrow \dots \Rightarrow A^{(p)}$.

Ο $A^{(p)}$ είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και άρα αν είναι τέλεια σκάλα (δηλαδή A αντιστρέψιμος) έχουμε $\det(A^{(p)}) = 1$, αλλιώς υπάρχει μια γραμμή όλη μηδενικά και άρα $\det(A^{(p)}) = 0$.

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $\det(A) \neq 0$.

★ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Έτσι δημιουργείται μια ακολουθία πινάκων $A \Rightarrow A^{(1)} \Rightarrow A^{(2)} \Rightarrow \dots \Rightarrow A^{(p)}$.

Ο $A^{(p)}$ είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και άρα αν είναι τέλεια σκάλα (δηλαδή A αντιστρέψιμος) έχουμε $\det(A^{(p)}) = 1$, αλλιώς υπάρχει μια γραμμή όλη μηδενικά και άρα $\det(A^{(p)}) = 0$.

Άρα $\det(A^{(p)}) \neq 0 \iff A$ είναι αντιστρέψιμος.

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $\det(A) \neq 0$.

★ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Έτσι δημιουργείται μια ακολουθία πινάκων $A \Rightarrow A^{(1)} \Rightarrow A^{(2)} \Rightarrow \dots \Rightarrow A^{(p)}$.

Ο $A^{(p)}$ είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και άρα αν είναι τέλεια σκάλα (δηλαδή A αντιστρέψιμος) έχουμε $\det(A^{(p)}) = 1$, αλλιώς υπάρχει μια γραμμή όλη μηδενικά και άρα $\det(A^{(p)}) = 0$.

Άρα $\det(A^{(p)}) \neq 0 \iff A$ είναι αντιστρέψιμος. Όμως

$$\det(A) \neq 0 \iff$$

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $\det(A) \neq 0$.

★ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Έτσι δημιουργείται μια ακολουθία πινάκων $A \Rightarrow A^{(1)} \Rightarrow A^{(2)} \Rightarrow \dots \Rightarrow A^{(p)}$.

Ο $A^{(p)}$ είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και άρα αν είναι τέλεια σκάλα (δηλαδή A αντιστρέψιμος) έχουμε $\det(A^{(p)}) = 1$, αλλιώς υπάρχει μια γραμμή όλη μηδενικά και άρα $\det(A^{(p)}) = 0$.

Άρα $\det(A^{(p)}) \neq 0 \iff A$ είναι αντιστρέψιμος. Όμως

$$\det(A) \neq 0 \iff \det(A^{(1)}) \neq 0 \iff$$

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $\det(A) \neq 0$.

★ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Έτσι δημιουργείται μια ακολουθία πινάκων $A \Rightarrow A^{(1)} \Rightarrow A^{(2)} \Rightarrow \dots \Rightarrow A^{(p)}$.

Ο $A^{(p)}$ είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και άρα αν είναι τέλεια σκάλα (δηλαδή A αντιστρέψιμος) έχουμε $\det(A^{(p)}) = 1$, αλλιώς υπάρχει μια γραμμή όλη μηδενικά και άρα $\det(A^{(p)}) = 0$.

Άρα $\det(A^{(p)}) \neq 0 \iff A$ είναι αντιστρέψιμος. Όμως

$$\det(A) \neq 0 \iff \det(A^{(1)}) \neq 0 \iff \dots \iff \det(A^{(p)}) \neq 0,$$

Ορίζουσες και Αντιστρεψιμότητα.

Θεώρημα

Ένας τετραγωνικός πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο $\det(A) \neq 0$.

★ Απόδειξη: Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα $[A|I]$ και κάνουμε γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον αριστερό πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Έτσι δημιουργείται μια ακολουθία πινάκων $A \Rightarrow A^{(1)} \Rightarrow A^{(2)} \Rightarrow \dots \Rightarrow A^{(p)}$.

Ο $A^{(p)}$ είναι σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή και άρα αν είναι τέλεια σκάλα (δηλαδή A αντιστρέψιμος) έχουμε $\det(A^{(p)}) = 1$, αλλιώς υπάρχει μια γραμμή όλη μηδενικά και άρα $\det(A^{(p)}) = 0$.

Άρα $\det(A^{(p)}) \neq 0 \iff A$ είναι αντιστρέψιμος. Όμως

$$\det(A) \neq 0 \iff \det(A^{(1)}) \neq 0 \iff \dots \iff \det(A^{(p)}) \neq 0,$$

και άρα $\det(A) \neq 0 \iff A$ είναι αντιστρέψιμος.

Παράδειγμα Ι.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με ορίζουσα 11.

Παράδειγμα Ι.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή,

Παράδειγμα Ι.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη,

Παράδειγμα Ι.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη,

Παράδειγμα Ι.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2.

Παράδειγμα Ι.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B ;

Παράδειγμα 1.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B ;

- 1 Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής:

Παράδειγμα 1.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B ;

- 1 Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής: ορίζουσα επί (-1) .

Παράδειγμα 1.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B ;

- 1 Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής: ορίζουσα επί (-1) .
- 2 Πρόσθεση 2 φορές της 4ης γραμμής στην πρώτη:

Παράδειγμα 1.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B ;

- 1 Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής: ορίζουσα επί (-1) .
- 2 Πρόσθεση 2 φορές της 4ης γραμμής στην πρώτη: ορίζουσα ίδια.

Παράδειγμα 1.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B ;

- 1 Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής: ορίζουσα επί (-1) .
- 2 Πρόσθεση 2 φορές της 4ης γραμμής στην πρώτη: ορίζουσα ίδια.
- 3 Ανταλλαγή τρίτης με δεύτερη στήλη:

Παράδειγμα 1.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B ;

- 1 Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής: ορίζουσα επί (-1) .
- 2 Πρόσθεση 2 φορές της 4ης γραμμής στην πρώτη: ορίζουσα ίδια.
- 3 Ανταλλαγή τρίτης με δεύτερη στήλη: ορίζουσα επί (-1) .

Παράδειγμα 1.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B ;

- 1 Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής: ορίζουσα επί (-1) .
- 2 Πρόσθεση 2 φορές της 4ης γραμμής στην πρώτη: ορίζουσα ίδια.
- 3 Ανταλλαγή τρίτης με δεύτερη στήλη: ορίζουσα επί (-1) .
- 4 Πολλαπλασιασμός κάθε στήλης με 2:

Παράδειγμα 1.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B ;

- 1 Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής: ορίζουσα επί (-1) .
- 2 Πρόσθεση 2 φορές της 4ης γραμμής στην πρώτη: ορίζουσα ίδια.
- 3 Ανταλλαγή τρίτης με δεύτερη στήλη: ορίζουσα επί (-1) .
- 4 Πολλαπλασιασμός κάθε στήλης με 2: για κάθε στήλη που διπλασιάζεται, διπλασιάζεται και η ορίζουσα,

Παράδειγμα 1.

Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ με ορίζουσα 11. Παίρνουμε τον B ανταλλάσσοντας την πρώτη με την δεύτερη γραμμή, μετά προσθέτοντας 2 φορές την 4η γραμμή στη πρώτη, μετά ανταλλάσσοντας την τρίτη στήλη με την δεύτερη στήλη, και συνέχεια πολλαπλασιάζοντας όλες τις στήλες με 2. Ποια είναι η ορίζουσα του B ;

- 1 Ανταλλαγή πρώτης με δεύτερης γραμμής: ορίζουσα επί (-1) .
- 2 Πρόσθεση 2 φορές της 4ης γραμμής στην πρώτη: ορίζουσα ίδια.
- 3 Ανταλλαγή τρίτης με δεύτερη στήλη: ορίζουσα επί (-1) .
- 4 Πολλαπλασιασμός κάθε στήλης με 2: για κάθε στήλη που διπλασιάζεται, διπλασιάζεται και η ορίζουσα, άρα

$$\det(B) = (-1) \cdot (-1) \cdot 2^3 \det(A) = 8 \cdot \det(A).$$

Παράδειγμα II.

★ Έστω ένας $A \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ με ορίζουσα 5 και με στήλες $a_1, a_2, \dots, a_7$.

Παράδειγμα II.

★ Έστω ένας $A \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ με ορίζουσα 5 και με στήλες $a_1, a_2, \dots, a_7$.
Κάνουμε την αντικατάσταση $a_3 := 3a_3 + 5 \cdot a_7$. Ποιά είναι η ορίζουσα του νέου πίνακα;

Παράδειγμα II.

★ Έστω ένας $A \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ με ορίζουσα 5 και με στήλες $a_1, a_2, \dots, a_7$.
Κάνουμε την αντικατάσταση $a_3 := 3a_3 + 5 \cdot a_7$. Ποιά είναι η ορίζουσα του νέου πίνακα;

Απάντηση: Είναι ισοδύναμο με πρώτα να τριπλασιάσουμε τη στήλη a_3 (τριπλασιασμός ορίζουσας) και μετά να προσθέσουμε $5a_7$ σε αυτή (δεν αλλάζει η ορίζουσα).

Παράδειγμα II.

★ Έστω ένας $A \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ με ορίζουσα 5 και με στήλες $a_1, a_2, \dots, a_7$. Κάνουμε την αντικατάσταση $a_3 := 3a_3 + 5 \cdot a_7$. Ποιά είναι η ορίζουσα του νέου πίνακα;

Απάντηση: Είναι ισοδύναμο με πρώτα να τριπλασιάσουμε τη στήλη a_3 (τριπλασιασμός ορίζουσας) και μετά να προσθέσουμε $5a_7$ σε αυτή (δεν αλλάζει η ορίζουσα). Άρα η νέα ορίζουσα είναι $3 \cdot \det(A) = 15$.

★ Τι θα συνέβαινε αν πρόσθετα όλες τις στήλες στην πρώτη, δηλαδή $a_1 := a_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$;

Παράδειγμα II.

★ Έστω ένας $A \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ με ορίζουσα 5 και με στήλες $a_1, a_2, \dots, a_7$. Κάνουμε την αντικατάσταση $a_3 := 3a_3 + 5 \cdot a_7$. Ποιά είναι η ορίζουσα του νέου πίνακα;

Απάντηση: Είναι ισοδύναμο με πρώτα να τριπλασιάσουμε τη στήλη a_3 (τριπλασιασμός ορίζουσας) και μετά να προσθέσουμε $5a_7$ σε αυτή (δεν αλλάζει η ορίζουσα). Άρα η νέα ορίζουσα είναι $3 \cdot \det(A) = 15$.

★ Τι θα συνέβαινε αν πρόσθετα όλες τις στήλες στην πρώτη, δηλαδή $a_1 := a_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$;

Απάντηση: Μπορώ να το δω πως πρώτα διπλασιάζω την πρώτη στήλη, μετά προσθέτω την δεύτερη

Παράδειγμα II.

★ Έστω ένας $A \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ με ορίζουσα 5 και με στήλες $a_1, a_2, \dots, a_7$. Κάνουμε την αντικατάσταση $a_3 := 3a_3 + 5 \cdot a_7$. Ποιά είναι η ορίζουσα του νέου πίνακα;

Απάντηση: Είναι ισοδύναμο με πρώτα να τριπλασιάσουμε τη στήλη a_3 (τριπλασιασμός ορίζουσας) και μετά να προσθέσουμε $5a_7$ σε αυτή (δεν αλλάζει η ορίζουσα). Άρα η νέα ορίζουσα είναι $3 \cdot \det(A) = 15$.

★ Τι θα συνέβαινε αν πρόσθετα όλες τις στήλες στην πρώτη, δηλαδή $a_1 := a_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$;

Απάντηση: Μπορώ να το δω πως πρώτα διπλασιάζω την πρώτη στήλη, μετά προσθέτω την δεύτερη, εν συνεχεία την τρίτη

Παράδειγμα II.

★ Έστω ένας $A \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ με ορίζουσα 5 και με στήλες $a_1, a_2, \dots, a_7$. Κάνουμε την αντικατάσταση $a_3 := 3a_3 + 5 \cdot a_7$. Ποιά είναι η ορίζουσα του νέου πίνακα;

Απάντηση: Είναι ισοδύναμο με πρώτα να τριπλασιάσουμε τη στήλη a_3 (τριπλασιασμός ορίζουσας) και μετά να προσθέσουμε $5a_7$ σε αυτή (δεν αλλάζει η ορίζουσα). Άρα η νέα ορίζουσα είναι $3 \cdot \det(A) = 15$.

★ Τι θα συνέβαινε αν πρόσθετα όλες τις στήλες στην πρώτη, δηλαδή $a_1 := a_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$;

Απάντηση: Μπορώ να το δω πως πρώτα διπλασιάζω την πρώτη στήλη, μετά προσθέτω την δεύτερη, εν συνεχεία την τρίτη και τέλος την τέταρτη.

Παράδειγμα II.

★ Έστω ένας $A \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ με ορίζουσα 5 και με στήλες $a_1, a_2, \dots, a_7$. Κάνουμε την αντικατάσταση $a_3 := 3a_3 + 5 \cdot a_7$. Ποιά είναι η ορίζουσα του νέου πίνακα;

Απάντηση: Είναι ισοδύναμο με πρώτα να τριπλασιάσουμε τη στήλη a_3 (τριπλασιασμός ορίζουσας) και μετά να προσθέσουμε $5a_7$ σε αυτή (δεν αλλάζει η ορίζουσα). Άρα η νέα ορίζουσα είναι $3 \cdot \det(A) = 15$.

★ Τι θα συνέβαινε αν πρόσθετα όλες τις στήλες στην πρώτη, δηλαδή $a_1 := a_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$;

Απάντηση: Μπορώ να το δω πως πρώτα διπλασιάζω την πρώτη στήλη, μετά προσθέτω την δεύτερη, εν συνεχεία την τρίτη και τέλος την τέταρτη. Μόνο η πρώτη πράξη αλλάζει την ορίζουσα, άρα έχουμε ότι η νέα ορίζουσα ίσουςται με $2 \cdot \det(A) = 10$.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Ορίζουσες και πολλαπλασιασμός Πινάκων.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Πόρισμα

Για $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $k > 0$ έχουμε $\det(A^k) = (\det(A))^k$.

Ορίζουσες και πολλαπλασιασμός Πινάκων.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Πόρισμα

Για $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $k > 0$ έχουμε $\det(A^k) = (\det(A))^k$.

★ Απόδειξη: $\det(A^k) =$

Ορίζουσες και πολλαπλασιασμός Πινάκων.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Πόρισμα

Για $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $k > 0$ έχουμε $\det(A^k) = (\det(A))^k$.

★ Απόδειξη: $\det(A^k) = \det(A \cdot A^{k-1}) =$

Ορίζουσες και πολλαπλασιασμός Πινάκων.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $AB \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Πόρισμα

Για $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $k > 0$ έχουμε $\det(A^k) = (\det(A))^k$.

★ Απόδειξη: $\det(A^k) = \det(A \cdot A^{k-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{k-1}) = \dots =$

Ορίζουσες και πολλαπλασιασμός Πινάκων.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Πόρισμα

Για $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $k > 0$ έχουμε $\det(A^k) = (\det(A))^k$.

★ Απόδειξη: $\det(A^k) = \det(A \cdot A^{k-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{k-1}) = \dots = \det(A) \cdot (\det(A))^{k-1} = (\det(A))^k$

Ορίζουσες και πολλαπλασιασμός Πινάκων.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Πόρισμα

Για $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $k > 0$ έχουμε $\det(A^k) = (\det(A))^k$.

★ Απόδειξη: $\det(A^k) = \det(A \cdot A^{k-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{k-1}) = \dots = \det(A) \cdot (\det(A))^{k-1} = (\det(A))^k$

Πόρισμα

Αν A αντιστρέψιμος τότε $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Απόδειξη: $A^{-1}A = I \Rightarrow$

Ορίζουσες και πολλαπλασιασμός Πινάκων.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Πόρισμα

Για $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $k > 0$ έχουμε $\det(A^k) = (\det(A))^k$.

★ Απόδειξη: $\det(A^k) = \det(A \cdot A^{k-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{k-1}) = \dots = \det(A) \cdot (\det(A))^{k-1} = (\det(A))^k$

Πόρισμα

Αν A αντιστρέψιμος τότε $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Απόδειξη: $A^{-1}A = I \Rightarrow \det(A^{-1}) \cdot \det(A) = \det(A^{-1}A) = \det(I)$

Ορίζουσες και πολλαπλασιασμός Πινάκων.

Θεώρημα

Έστω πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Τότε $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Πόρισμα

Για $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $k > 0$ έχουμε $\det(A^k) = (\det(A))^k$.

★ Απόδειξη: $\det(A^k) = \det(A \cdot A^{k-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{k-1}) = \dots = \det(A) \cdot (\det(A))^{k-1} = (\det(A))^k$

Πόρισμα

Αν A αντιστρέψιμος τότε $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Απόδειξη: $A^{-1}A = I \Rightarrow \det(A^{-1}) \cdot \det(A) = \det(A^{-1}A) = \det(I) = 1$.

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $\det(A) = 3, \det(B) = 0, \det(C) = 7$.
Τότε

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $\det(A) = 3, \det(B) = 0, \det(C) = 7$.
Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος;

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $\det(A) = 3, \det(B) = 0, \det(C) = 7$.

Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; ✓, $\det(AC) = \det(A)\det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $\det(A) = 3, \det(B) = 0, \det(C) = 7$.
Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; ✓, $\det(AC) = \det(A)\det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος;

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $\det(A) = 3, \det(B) = 0, \det(C) = 7$.
Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; $\checkmark$, $\det(AC) = \det(A)\det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος; $\times$,
 $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 3 \cdot 0 = 0$.

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $\det(A) = 3, \det(B) = 0, \det(C) = 7$.
Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; $\checkmark$, $\det(AC) = \det(A)\det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος; $\times$,
 $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 3 \cdot 0 = 0$.
- Είναι ο BC αντιστρέψιμος; Ο CB ;

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $\det(A) = 3, \det(B) = 0, \det(C) = 7$.
Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; $\checkmark$, $\det(AC) = \det(A)\det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος; $\times$,
 $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 3 \cdot 0 = 0$.
- Είναι ο BC αντιστρέψιμος; Ο CB ; $\times$, Για τον ίδιο λόγο με από πάνω.

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $\det(A) = 3, \det(B) = 0, \det(C) = 7$.
Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; $\checkmark$, $\det(AC) = \det(A)\det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος; $\times$,
 $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 3 \cdot 0 = 0$.
- Είναι ο BC αντιστρέψιμος; Ο CB ; $\times$, Για τον ίδιο λόγο με από πάνω.
- Ποια η ορίζουσα του $\det(A^2)$;

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $\det(A) = 3, \det(B) = 0, \det(C) = 7$.
Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; $\checkmark$, $\det(AC) = \det(A)\det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος; $\times$,
 $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 3 \cdot 0 = 0$.
- Είναι ο BC αντιστρέψιμος; Ο CB ; $\times$, Για τον ίδιο λόγο με από πάνω.
- Ποια η ορίζουσα του $\det(A^2)$; $\det(A^2) = (\det(A))^2 = 3^2 = 9$.

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $\det(A) = 3, \det(B) = 0, \det(C) = 7$.
Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; $\checkmark$, $\det(AC) = \det(A)\det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος; $\times$,
 $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 3 \cdot 0 = 0$.
- Είναι ο BC αντιστρέψιμος; Ο CB ; $\times$, Για τον ίδιο λόγο με από πάνω.
- Ποια η ορίζουσα του $\det(A^2)$; $\det(A^2) = (\det(A))^2 = 3^2 = 9$.
- Ποια η ορίζουσα του $\det(A^{-1}C)$;

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $\det(A) = 3, \det(B) = 0, \det(C) = 7$.
Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; $\checkmark$, $\det(AC) = \det(A)\det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος; $\times$,
 $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 3 \cdot 0 = 0$.
- Είναι ο BC αντιστρέψιμος; Ο CB ; $\times$, Για τον ίδιο λόγο με από πάνω.
- Ποια η ορίζουσα του $\det(A^2)$; $\det(A^2) = (\det(A))^2 = 3^2 = 9$.
- Ποια η ορίζουσα του $\det(A^{-1}C)$;
 $\det(A^{-1}C) = \det(A^{-1}) \cdot \det(C) =$

Έστω A, B, C $n \times n$ πίνακες με $\det(A) = 3, \det(B) = 0, \det(C) = 7$.
Τότε

- Είναι ο AC αντιστρέψιμος; $\checkmark$, $\det(AC) = \det(A)\det(C) = 3 \cdot 7 \neq 0$.
- Είναι ο AB αντιστρέψιμος; $\times$,
 $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 3 \cdot 0 = 0$.
- Είναι ο BC αντιστρέψιμος; Ο CB ; $\times$, Για τον ίδιο λόγο με από πάνω.
- Ποια η ορίζουσα του $\det(A^2)$; $\det(A^2) = (\det(A))^2 = 3^2 = 9$.
- Ποια η ορίζουσα του $\det(A^{-1}C)$;
 $\det(A^{-1}C) = \det(A^{-1}) \cdot \det(C) = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(C) = \frac{7}{3}$.

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου.

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει άλλο πολυώνυμο q βαθμού 3 το οποίο συμφωνεί με το p στα σημεία b, c, d, e .

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει άλλο πολυώνυμο q βαθμού 3 το οποίο συμφωνεί με το p στα σημεία b, c, d, e .

Έστω $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$.

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει άλλο πολυώνυμο q βαθμού 3 το οποίο συμφωνεί με το p στα σημεία b, c, d, e .

Έστω $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$.

$$p(b) = 1 \Rightarrow$$

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει άλλο πολυώνυμο q βαθμού 3 το οποίο συμφωνεί με το p στα σημεία b, c, d, e .

Έστω $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$.

$$p(b) = 1 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + a_3 \cdot b^3 = 1$$

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει άλλο πολυώνυμο q βαθμού 3 το οποίο συμφωνεί με το p στα σημεία b, c, d, e .

Έστω $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$.

$$p(b) = 1 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + a_3 \cdot b^3 = 1$$

$$p(c) = -1 \Rightarrow$$

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει άλλο πολυώνυμο q βαθμού 3 το οποίο συμφωνεί με το p στα σημεία b, c, d, e .

Έστω $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$.

$$p(b) = 1 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + a_3 \cdot b^3 = 1$$

$$p(c) = -1 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot c + a_2 \cdot c^2 + a_3 \cdot c^3 = -1$$

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει άλλο πολυώνυμο q βαθμού 3 το οποίο συμφωνεί με το p στα σημεία b, c, d, e .

Έστω $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$.

$$p(b) = 1 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + a_3 \cdot b^3 = 1$$

$$p(c) = -1 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot c + a_2 \cdot c^2 + a_3 \cdot c^3 = -1$$

$$p(d) = 7 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot d + a_2 \cdot d^2 + a_3 \cdot d^3 = 7$$

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Έστω ένα πολυώνυμο $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

Ισχυρισμός: Οι τιμές του πολυωνύμου στα b, c, d, e (όλα διαφορετικά μεταξύ τους) μας δίνει τους συντελεστές του πολυωνύμου. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει άλλο πολυώνυμο q βαθμού 3 το οποίο συμφωνεί με το p στα σημεία b, c, d, e .

Έστω $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$.

$$p(b) = 1 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b^2 + a_3 \cdot b^3 = 1$$

$$p(c) = -1 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot c + a_2 \cdot c^2 + a_3 \cdot c^3 = -1$$

$$p(d) = 7 \Rightarrow a_0 + a_1 \cdot d + a_2 \cdot d^2 + a_3 \cdot d^3 = 7$$

Όμοια για το $p(e)$.

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Άρα οι σχέσεις $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$ ισοδυναμούν με το γραμμικό σύστημα

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Άρα οι σχέσεις $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$ ισοδυναμούν με το γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

με αγνώστους τα a_0, a_1, a_2, a_3 .

Πόσα σημεία αρκούν για να καθορίσουν μοναδικά ένα πολυώνυμο;

Άρα οι σχέσεις $p(b) = 1, p(c) = -1, p(d) = 7, p(e) = 8$ ισοδυναμούν με το γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

με αγνώστους τα a_0, a_1, a_2, a_3 .

Πότε αυτό το σύστημα έχει μοναδική λύση; Όταν $\det(A) \neq 0$.

Ποια είναι η ορίζουσα του A ;

Ο A λέγεται Vandermonde τάξης 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix}$$

Ποια είναι η ορίζουσα του A ;

Ο A λέγεται Vandermonde τάξης 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (e - d)(e - c)(e - b)(d - c)(d - b)(c - b)$$

Ποια είναι η ορίζουσα του A ;

Ο A λέγεται Vandermonde τάξης 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (e - d)(e - c)(e - b)(d - c)(d - b)(c - b)$$

Αν όλα τα σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους, τότε $\det(A) \neq 0$ και άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση, άρα υπάρχει και μοναδικό πολυώνυμο!

Ποια είναι η ορίζουσα του A ;

Ας κάνω $\Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3$$

Ποια είναι η ορίζουσα του A ;

Ας κάνω $\Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3} \begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & c^3 - bc^2 \\ 1 & d & d^2 & d^3 - bd^2 \\ 1 & e & e^2 & e^3 - be^2 \end{bmatrix}$$

Ποια είναι η ορίζουσα του A ;

Ας κάνω $\Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3} \begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & c^3 - bc^2 \\ 1 & d & d^2 & d^3 - bd^2 \\ 1 & e & e^2 & e^3 - be^2 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_3 := \Sigma_3 - b \cdot \Sigma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & c & c^2 - bc & c^3 - bc^2 \\ 1 & d & d^2 - bc & d^3 - bd^2 \\ 1 & e & e^2 - be & e^3 - be^2 \end{bmatrix}$$

Ποια είναι η ορίζουσα του A ;

Ας κάνω $\Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3} \begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & c^3 - bc^2 \\ 1 & d & d^2 & d^3 - bd^2 \\ 1 & e & e^2 & e^3 - be^2 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_3 := \Sigma_3 - b \cdot \Sigma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & c & c^2 - bc & c^3 - bc^2 \\ 1 & d & d^2 - bc & d^3 - bd^2 \\ 1 & e & e^2 - be & e^3 - be^2 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_2 := \Sigma_2 - b \cdot \Sigma_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c - b & c^2 - bc & c^3 - bc^2 \\ 1 & d - b & d^2 - bc & d^3 - bd^2 \\ 1 & e - b & e^2 - be & e^3 - be^2 \end{bmatrix}$$

Ποια είναι η ορίζουσα του A ;

Ας κάνω $\Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3$.

$$\begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_4 := \Sigma_4 - b \cdot \Sigma_3} \begin{bmatrix} 1 & b & b^2 & 0 \\ 1 & c & c^2 & c^3 - bc^2 \\ 1 & d & d^2 & d^3 - bd^2 \\ 1 & e & e^2 & e^3 - be^2 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_3 := \Sigma_3 - b \cdot \Sigma_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & c & c^2 - bc & c^3 - bc^2 \\ 1 & d & d^2 - bc & d^3 - bd^2 \\ 1 & e & e^2 - be & e^3 - be^2 \end{bmatrix} \Rightarrow_{\Sigma_2 := \Sigma_2 - b \cdot \Sigma_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c - b & c^2 - bc & c^3 - bc^2 \\ 1 & d - b & d^2 - bc & d^3 - bd^2 \\ 1 & e - b & e^2 - be & e^3 - be^2 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του αρχικού πίνακα είναι ίδια με του τελικού!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c^2-bc & c^3-bc^2 \\ 1 & d-b & d^2-bc & d^3-bd^2 \\ 1 & e-b & e^2-be & e^3-be^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c(c-b) & c^2(c-b) \\ 1 & d-b & d(d-b) & d^2(d-b) \\ 1 & e-b & e(e-b) & e^2(e-b) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c^2-bc & c^3-bc^2 \\ 1 & d-b & d^2-bc & d^3-bd^2 \\ 1 & e-b & e^2-be & e^3-be^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c(c-b) & c^2(c-b) \\ 1 & d-b & d(d-b) & d^2(d-b) \\ 1 & e-b & e(e-b) & e^2(e-b) \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε τώρα ως προς την πρώτη γραμμή:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c^2-bc & c^3-bc^2 \\ 1 & d-b & d^2-bc & d^3-bd^2 \\ 1 & e-b & e^2-be & e^3-be^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c(c-b) & c^2(c-b) \\ 1 & d-b & d(d-b) & d^2(d-b) \\ 1 & e-b & e(e-b) & e^2(e-b) \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε τώρα ως προς την πρώτη γραμμή:

$$\det(A) = \det \left(\begin{bmatrix} c-b & c(c-b) & c^2(c-b) \\ d-b & d(d-b) & d^2(d-b) \\ e-b & e(e-b) & e^2(e-b) \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c^2-bc & c^3-bc^2 \\ 1 & d-b & d^2-bc & d^3-bd^2 \\ 1 & e-b & e^2-be & e^3-be^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c(c-b) & c^2(c-b) \\ 1 & d-b & d(d-b) & d^2(d-b) \\ 1 & e-b & e(e-b) & e^2(e-b) \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε τώρα ως προς την πρώτη γραμμή:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \left(\begin{bmatrix} c-b & c(c-b) & c^2(c-b) \\ d-b & d(d-b) & d^2(d-b) \\ e-b & e(e-b) & e^2(e-b) \end{bmatrix} \right) \\ &= (c-b)(d-b)(e-b) \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \\ 1 & e & e^2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c^2-bc & c^3-bc^2 \\ 1 & d-b & d^2-bd & d^3-bd^2 \\ 1 & e-b & e^2-be & e^3-be^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c-b & c(c-b) & c^2(c-b) \\ 1 & d-b & d(d-b) & d^2(d-b) \\ 1 & e-b & e(e-b) & e^2(e-b) \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε τώρα ως προς την πρώτη γραμμή:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \left(\begin{bmatrix} c-b & c(c-b) & c^2(c-b) \\ d-b & d(d-b) & d^2(d-b) \\ e-b & e(e-b) & e^2(e-b) \end{bmatrix} \right) \\ &= (c-b)(d-b)(e-b) \cdot \det \left(\begin{bmatrix} 1 & c & c^2 \\ 1 & d & d^2 \\ 1 & e & e^2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

άρα πέσαμε πάλι σε έναν Vandermonde πίνακα, αλλά τάξης 2.
Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία (επαγωγικά).

Τι μάθαμε και τι πρέπει να ξέρουμε.

- Πως μία γραμμοπράξη σε έναν πίνακα αλλάζει την ορίζουσά του.
- Ότι $\det(A) \neq 0$ ισοδυναμεί με αντιστρεψιμότητα του A .
- Ότι $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- Και μην ξεχνάμε ότι $\det(A^T) = \det(A)$.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!