

Γραμμική Άλγεβρα

Τρίτη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω ανηγμένου κλιμακωτού.

Απαλοιφή Gauss: Άμεση περιγραφή λύσεων ενός συστήματος.

Εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω ανηγμένου κλιμακωτού.

Απαλοιφή Gauss: Άμεση περιγραφή λύσεων ενός συστήματος.

Υπενθύμιση: Κάθε στήλη στον επαυξημένο πίνακα αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή. Ένας **οδηγός** στον ανηγμένο κλιμακωτό πρέπει να μην έχει μη μηδενικά $\leftarrow, \uparrow, \downarrow$ του.

Εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω ανηγμένου κλιμακωτού.

Απαλοιφή Gauss: Άμεση περιγραφή λύσεων ενός συστήματος.

Υπενθύμιση: Κάθε στήλη στον επαυξημένο πίνακα αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή. Ένας **οδηγός** στον ανηγμένο κλιμακωτό πρέπει να μην έχει μη μηδενικά $\leftarrow, \uparrow, \downarrow$ του. Κάθε στήλη μπορεί να έχει ακριβώς έναν οδηγό (λόγω της ιδιότητας της σκάλας).

Εξαγωγή συμπερασμάτων μέσω ανηγμένου κλιμακωτού.

Απαλοιφή Gauss: Άμεση περιγραφή λύσεων ενός συστήματος.

Υπενθύμιση: Κάθε στήλη στον επαυξημένο πίνακα αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή. Ένας **οδηγός** στον ανηγμένο κλιμακωτό πρέπει να μην έχει μη μηδενικά $\leftarrow, \uparrow, \downarrow$ του. Κάθε στήλη μπορεί να έχει ακριβώς έναν οδηγό (λόγω της ιδιότητας της σκάλας).

Βασικές μεταβλητή: Μεταβλητές που αντιστοιχούν σε στήλες με οδηγό.

Ελεύθερες μεταβλητές : Μη-μηδενικές στήλες χωρίς οδηγό.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 0 & 12 & 0 & -9 & -19 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

x_1, x_2, x_4 : **Βασικές** μεταβλητές ενώ x_3, x_5 : **Ελεύθερες** μεταβλητές.

Ένα ακόμη παράδειγμα.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Η πρώτη, δεύτερη και πέμπτη στήλη έχουν οδηγό, άρα οι αντίστοιχες μεταβλητές είναι **βασικές**.

Η τρίτη και τέταρτη στήλη δεν έχουν οδηγό, άρα οι αντίστοιχες μεταβλητές είναι **ελεύθερες**.

Βασικές: x_1, x_2, x_5 , ελεύθερες: x_3, x_4 .

Ο πρώτος μας στόχος.

Όπως έχουμε πει, ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων έχει

- Καμία λύση
- Ακριβώς μία λύση (συμβατό)
- Άπειρες λύσεις (υπερ-καθορισμένο)

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή για να βρούμε σε ποια περίπτωση ανήκουμε;

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Όλες οι μεταβλητές είναι **βασικές!**

$$x_1 = 3, x_2 = -7, x_3 = 4$$

Ένα ακόμη παράδειγμα επίλυσης μέσω ανηγμένης κλιμακωτής μορφής.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Ένα ακόμη παράδειγμα επίλυσης μέσω ανηγμένης κλιμακωτής μορφής.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

$$x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -24$$

$$x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -7$$

$$x_5 = 4$$

Παραμετρική περιγραφή της λύσης μέσω των ελεύθερων μεταβλητών.

Ένα ακόμη παράδειγμα επίλυσης μέσω ανηγμένης κλιμακωτής μορφής.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

$$x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -24$$

$$x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -7$$

$$x_5 = 4$$

Παραμετρική περιγραφή της λύσης μέσω των ελεύθερων μεταβλητών.

$$x_1 = 2x_3 - 3x_4 - 24$$

$$x_2 = 2x_3 + 2x_4 - 7$$

$$x_5 = 4$$

Η τομή δύο επιπέδων.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

Η τομή δύο επιπέδων.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \Gamma_2 := \Gamma_2 - \Gamma_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

Βασικές μεταβλητές: x_1, x_2 , Ελεύθερες μεταβλητές x_3

$$x_1 = 2x_3$$

$$x_2 = -4x_3$$

Η τομή δύο επιπέδων.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \Gamma_2 := \Gamma_2 - \Gamma_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

Βασικές μεταβλητές: x_1, x_2 , Ελεύθερες μεταβλητές x_3

$$x_1 = 2x_3$$

$$x_2 = -4x_3$$

Άρα η τομή των δύο επιπέδων μορφή περιέχει τα σημεία (ονομάζουμε $t := x_3$)

$$(2t, -4t, t) = t \cdot (2, -4, 1).$$

Η τομή δύο επιπέδων.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \Gamma_2 := \Gamma_2 - \Gamma_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

Βασικές μεταβλητές: x_1, x_2 , Ελεύθερες μεταβλητές x_3

$$x_1 = 2x_3$$

$$x_2 = -4x_3$$

Άρα η τομή των δύο επιπέδων μορφή περιέχει τα σημεία (ονομάζουμε $t := x_3$)

$$(2t, -4t, t) = t \cdot (2, -4, 1).$$

Αυτό είναι μια ευθεία.

Θεώρημα

Ένα γραμμικό σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση όταν η κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου του πίνακα **δεν έχει γραμμή της μορφής**

$$[0, 0, \dots, 0|b], b \neq 0,$$

δηλαδή εξίσωση της μορφής

$$0 = b, b \neq 0.$$

Μοναδική Λύση: Καμία ελεύθερη μεταβλητή.

Άπειρες Λύσεις: Τουλάχιστον μία ελεύθερη μεταβλητή.

Θεώρημα

Ένα γραμμικό σύστημα έχει τουλάχιστον μία λύση όταν η κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου του πίνακα **δεν έχει γραμμή της μορφής**

$$[0, 0, \dots, 0|b], b \neq 0,$$

δηλαδή εξίσωση της μορφής

$$0 = b, b \neq 0.$$

Μοναδική Λύση: Καμία ελεύθερη μεταβλητή.

Άπειρες Λύσεις: Τουλάχιστον μία ελεύθερη μεταβλητή.

Στο εξής αναφερόμαστε σε συστήματα που έχουν τουλάχιστον μία λύση.

- 1 Καμία ελεύθερη μεταβλητή \Rightarrow καμία ή μοναδική λύση.
- 2 Μία ελεύθερη μεταβλητή \Rightarrow χώρος λύσεων είναι **ευθεία**.
- 3 Δύο ελεύθερες μεταβλητές \Rightarrow χώρος λύσεων είναι **επίπεδο**.

Στο εξής αναφερόμαστε σε συστήματα που έχουν τουλάχιστον μία λύση.

- 1 Καμία ελεύθερη μεταβλητή \Rightarrow καμία ή μοναδική λύση.
- 2 Μία ελεύθερη μεταβλητή \Rightarrow χώρος λύσεων είναι **ευθεία**.
- 3 Δύο ελεύθερες μεταβλητές \Rightarrow χώρος λύσεων είναι **επίπεδο**.
- 4 Τρεις ελεύθερες μεταβλητές και πάνω \Rightarrow χώρος λύσεων είναι **υπερεπίπεδο**.

Στο εξής αναφερόμαστε σε συστήματα που έχουν τουλάχιστον μία λύση.

- 1 Καμία ελεύθερη μεταβλητή \Rightarrow καμία ή μοναδική λύση.
- 2 Μία ελεύθερη μεταβλητή \Rightarrow χώρος λύσεων είναι **ευθεία**.
- 3 Δύο ελεύθερες μεταβλητές \Rightarrow χώρος λύσεων είναι **επίπεδο**.
- 4 Τρεις ελεύθερες μεταβλητές και πάνω \Rightarrow χώρος λύσεων είναι **υπερεπίπεδο**.

Μπορώ να θέσω στις **ελεύθερες** μεταβλητές ό,τι τιμή θέλω:

Στο εξής αναφερόμαστε σε συστήματα που έχουν τουλάχιστον μία λύση.

- 1 Καμία ελεύθερη μεταβλητή \Rightarrow καμία ή μοναδική λύση.
- 2 Μία ελεύθερη μεταβλητή \Rightarrow χώρος λύσεων είναι **ευθεία**.
- 3 Δύο ελεύθερες μεταβλητές \Rightarrow χώρος λύσεων είναι **επίπεδο**.
- 4 Τρεις ελεύθερες μεταβλητές και πάνω \Rightarrow χώρος λύσεων είναι **υπερεπίπεδο**.

Μπορώ να θέσω στις **ελεύθερες** μεταβλητές ό,τι τιμή θέλω: αν θέσω κάποιες συγκεκριμένες τιμές σε όλες τις **ελεύθερες μεταβλητές**, τότε αυτό ορίζει μια **μοναδική** λύση των **βασικών** μεταβλητών.

Επιστροφή στο παράδειγμα.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Παραμετρική περιγραφή της λύσης μέσω των ελεύθερων μεταβλητών.

Επιστροφή στο παράδειγμα.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Παραμετρική περιγραφή της λύσης μέσω των ελεύθερων μεταβλητών.

$$x_1 = 2 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 - 24$$

$$x_2 = 2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 - 7$$

$$x_5 = 4$$

Επιστροφή στο παράδειγμα.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Παραμετρική περιγραφή της λύσης μέσω των ελεύθερων μεταβλητών.

$$x_1 = 2 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 - 24$$

$$x_2 = 2 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 - 7$$

$$x_5 = 4$$

Μπορού, να θέσουμε στις ελεύθερες μεταβλητές x_3, x_4 ό,τι τιμή θέλουμε και αυτό ορίζει με μοναδικό τρόπο τις βασικές μεταβλητές x_1, x_2, x_5 .

Λύνοντας δύο συστήματα μαζί.

Έστω τα συστήματα με επαυξημένους πίνακες

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

Λύνοντας δύο συστήματα μαζί.

Έστω τα συστήματα με επαυξημένους πίνακες

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

Αν φέρουμε τον πρώτο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, πρέπει να κάνουμε **όλη** τη δουλειά και για τον δεύτερο;

Λύνοντας δύο συστήματα μαζί.

Έστω τα συστήματα με επαυξημένους πίνακες

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

Αν φέρουμε τον πρώτο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, πρέπει να κάνουμε **όλη** τη δουλειά και για τον δεύτερο;

Τα βήματα που κάνει η απαλοιφή Gauss εξαρτούνται **μόνο** από τον πίνακα συντελεστών και **όχι** από τους σταθερούς όρους.

Λύνοντας δύο συστήματα μαζί.

Έστω τα συστήματα με επαυξημένους πίνακες

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

Αν φέρουμε τον πρώτο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, πρέπει να κάνουμε **όλη** τη δουλειά και για τον δεύτερο;

Τα βήματα που κάνει η απαλοιφή Gauss εξαρτούνται **μόνο** από τον πίνακα συντελεστών και **όχι** από τους σταθερούς όρους.

☛ Αν βρούμε τις γραμμοπράξεις που κάνει για τον πρώτο πίνακα η απαλοιφή Gauss, οι **ίδιες** γραμμοπράξεις φέρνουν και τον δεύτερο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή!

Λύνοντας δύο συστήματα μαζί.

Έστω τα συστήματα με επαυξημένους πίνακες

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{array} \right], \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

Αν φέρουμε τον πρώτο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, πρέπει να κάνουμε **όλη** τη δουλειά και για τον δεύτερο;

Τα βήματα που κάνει η απαλοιφή Gauss εξαρτούνται **μόνο** από τον πίνακα συντελεστών και **όχι** από τους σταθερούς όρους.

☛ Αν βρούμε τις γραμμοπράξεις που κάνει για τον πρώτο πίνακα η απαλοιφή Gauss, οι **ίδιες** γραμμοπράξεις φέρνουν και τον δεύτερο πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή! Το μόνο που αλλάζει είναι ποιοι είναι οι σταθεροί όροι!

Για να το δούμε στην πράξη.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 10 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

Για να το δούμε στην πράξη.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{array} \right] &\Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 10 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2} \\ \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right] &\Rightarrow_{\Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Για να το δούμε στην πράξη.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{array} \right] &\Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 10 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2} \\ \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right] &\Rightarrow_{\Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Άρα κάναμε τις γραμμοπράξεις

$$\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1, \Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2, \Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2$$

Και για τον δεύτερο πίνακα.

Αν κάνουμε ακριβώς τις ίδιες γραμμοπράξεις με πριν

$$\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1, \Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2, \Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2$$

Και για τον δεύτερο πίνακα.

Αν κάνουμε ακριβώς τις ίδιες γραμμοπράξεις με πριν

$$\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1, \Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2, \Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

Και για τον δεύτερο πίνακα.

Αν κάνουμε ακριβώς τις ίδιες γραμμοπράξεις με πριν

$$\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1, \Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2, \Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right]$$

Ίδιος πίνακας συντελεστών και μόνο οι σταθεροί όροι αλλάζουν.

Άρα να τα λύσουμε και τα δύο μαζί.

Τα βάζουμε σε μια κοινή αναπαράσταση (κοινός πίνακας συντελεστών και δύο στήλες για τους σταθερούς όρους):

Άρα να τα λύσουμε και τα δύο μαζί.

Τα βάζουμε σε μια κοινή αναπαράσταση (κοινός πίνακας συντελεστών και δύο στήλες για τους σταθερούς όρους):

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 5 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & 4 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

Άρα να τα λύσουμε και τα δύο μαζί.

Τα βάζουμε σε μια κοινή αναπαράσταση (κοινός πίνακας συντελεστών και δύο στήλες για τους σταθερούς όρους):

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 5 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & 4 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2} \\ & \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Άρα να τα λύσουμε και τα δύο μαζί.

Τα βάζουμε σε μια κοινή αναπαράσταση (κοινός πίνακας συντελεστών και δύο στήλες για τους σταθερούς όρους):

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 5 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & 4 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 2 \end{array} \right]$$

Άρα μπορούμε να βρούμε το σύνολο λύσεων για κάθε σύστημα ξεχωριστά πλέον (βασιικές και ελεύθερες μεταβλητές).

Άρα να τα λύσουμε και τα δύο μαζί.

Τα βάζουμε σε μια κοινή αναπαράσταση (κοινός πίνακας συντελεστών και δύο στήλες για τους σταθερούς όρους):

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 5 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & 4 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\Rightarrow_{\Gamma_2 := \frac{1}{2}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow_{\Gamma_1 := \Gamma_1 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 2 \end{array} \right]$$

Άρα μπορούμε να βρούμε το σύνολο λύσεων για κάθε σύστημα ξεχωριστά πλέον (βασικές και ελεύθερες μεταβλητές).

Λύσεις:

Πρώτο Σύστημα: $x = -6 - 2z$, $y = 5 + z$,

Δεύτερο Σύστημα: $x = -2 - 2z$, $y = 2 + z$

Ευθείες και επίπεδα (μια ξεκαθάριση εννοιών).

Το σύνολο $\{(x, y) : 2x + 3y = 1\}$ είναι μια ευθεία στο \mathbb{R}^2 (επίπεδο).

Ευθείες και επίπεδα (μια ξεκαθάριση εννοιών).

Το σύνολο $\{(x, y) : 2x + 3y = 1\}$ είναι μια ευθεία στο \mathbb{R}^2 (επίπεδο).

Το σύνολο $\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1\}$ είναι ένα **επίπεδο** στο \mathbb{R}^3 (χώρο).

Ευθείες και επίπεδα (μια ξεκαθάριση εννοιών).

Το σύνολο $\{(x, y) : 2x + 3y = 1\}$ είναι μια ευθεία στο \mathbb{R}^2 (επίπεδο).

Το σύνολο $\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1\}$ είναι ένα **επίπεδο** στο \mathbb{R}^3 (χώρο).

Η ευθεία στο χώρο εκφράζεται ως **τομή** επιπέδων, πχ:

$$\left\{ (x, y, z) : 2x + 3y = 1, 3y + 2z = 1 \right\}$$

Ευθείες και επίπεδα (μια ξεκαθάριση εννοιών).

Το σύνολο $\{(x, y) : 2x + 3y = 1\}$ είναι μια ευθεία στο \mathbb{R}^2 (επίπεδο).

Το σύνολο $\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1\}$ είναι ένα **επίπεδο** στο \mathbb{R}^3 (χώρο).

Η ευθεία στο χώρο εκφράζεται ως **τομή** επιπέδων, πχ:

$$\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1, 3y + 2z = 1\}$$

Το σύνολο $\{(x, y, z, w) : 2x + 3y + z = 1\}$ **δεν** είναι ένα επίπεδο, διότι

Ευθείες και επίπεδα (μια ξεκαθάριση εννοιών).

Το σύνολο $\{(x, y) : 2x + 3y = 1\}$ είναι μια ευθεία στο \mathbb{R}^2 (επίπεδο).

Το σύνολο $\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1\}$ είναι ένα **επίπεδο** στο \mathbb{R}^3 (χώρο).

Η ευθεία στο χώρο εκφράζεται ως **τομή** επιπέδων, πχ:

$$\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1, 3y + 2z = 1\}$$

Το σύνολο $\{(x, y, z, w) : 2x + 3y + z = 1\}$ **δεν** είναι ένα επίπεδο, διότι είμαστε στις 4 διαστάσεις, είναι ένα υπερεπίπεδο.

Ευθείες και επίπεδα (μια ξεκαθάριση εννοιών).

Το σύνολο $\{(x, y) : 2x + 3y = 1\}$ είναι μια ευθεία στο \mathbb{R}^2 (επίπεδο).

Το σύνολο $\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1\}$ είναι ένα **επίπεδο** στο \mathbb{R}^3 (χώρο).

Η ευθεία στο χώρο εκφράζεται ως **τομή** επιπέδων, πχ:

$$\{(x, y, z) : 2x + 3y = 1, 3y + 2z = 1\}$$

Το σύνολο $\{(x, y, z, w) : 2x + 3y + z = 1\}$ **δεν** είναι ένα επίπεδο, διότι είμαστε στις 4 διαστάσεις, είναι ένα υπερεπίπεδο.

Άρα πάντα το πλαίσιο (περιβάλλοντας χώρος) μετράει!

★ Διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα πίνακας με n γραμμές και μία στήλη με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Το n είναι το μήκος ή διάσταση του διανύσματος.

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -\sqrt{2} \\ 5 \end{bmatrix}$$

★ Διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ είναι ένα πίνακας με n γραμμές και μία στήλη με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Το n είναι το μήκος ή διάσταση του διανύσματος.

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -\sqrt{2} \\ 5 \end{bmatrix}$$

Διάνυσμα γραμμή:

$$x = [1 \quad 7 \quad -12]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Μπορούμε να δούμε τον πίνακα σαν την *οριζόντια* παράθεση 3 διανυσμάτων στο \mathbb{R}^4 , για την ακρίβεια των τριών **στηλών** του:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Μπορούμε να δούμε τον πίνακα σαν την *οριζόντια* παράθεση 3 διανυσμάτων στο \mathbb{R}^4 , για την ακρίβεια των τριών **στηλών** του:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Όμοια, μπορούμε να δούμε τον πίνακα ως την *κάθετη* παράθεση 4 διανυσμάτων στο \mathbb{R}^3 , για την ακρίβεια των 4 **γραμμών** του:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Όμοια, μπορούμε να δούμε τον πίνακα ως την *κάθετη* παράθεση 4 διανυσμάτων στο \mathbb{R}^3 , για την ακρίβεια των 4 **γραμμών** του:

$$[2 \ 0 \ -2], [0 \ 1 \ -2], [0 \ 0 \ 0], [8 \ 3 \ 5]$$

Δύο διανύσματα θα λέμε ότι είναι ίσα όταν έχουν την ίδια διάσταση (μήκος) και οι εκατέρωθεν εγγραφές τους είναι ίσες.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -\sqrt{2} \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\sqrt{2} \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.1 \end{bmatrix}$$

Άθροισμα Διανυσμάτων

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

Άθροισμα Διανυσμάτων

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιασμός με βαθμωτό συντελεστή

$$c \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \\ \dots \\ c \cdot a_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$2 \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ και $c, d \in \mathbb{R}$.

Ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ και $c, d \in \mathbb{R}$.

$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα με όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν.

Ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ και $c, d \in \mathbb{R}$.

$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα με όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν.

- 1 (Η σειρά των προσθέσεων δεν μετράει) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ και $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

Ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ και $c, d \in \mathbb{R}$.

$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα με όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν.

- 1 (Η σειρά των προσθέσεων δεν μετράει) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ και $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- 2 (Ουδέτερο και αντίθετο στοιχείο) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}, u + \vec{0} = \vec{u}$.

Ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ και $c, d \in \mathbb{R}$.

$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα με όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν.

- 1 (Η σειρά των προσθέσεων δεν μετράει) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ και $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- 2 (Ουδέτερο και αντίθετο στοιχείο) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, $u + \vec{0} = \vec{u}$.
- 3 Ευελιξία του βαθμωτού συντελεστή.

Ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ και $c, d \in \mathbb{R}$.

$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα με όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν.

- 1 (Η σειρά των προσθέσεων δεν μετράει) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ και $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- 2 (Ουδέτερο και αντίθετο στοιχείο) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, $u + \vec{0} = \vec{u}$.
- 3 Ευελιξία του βαθμωτού συντελεστή.

$$c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$$

$$(c + d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$$

$$c \cdot (d\vec{u}) = (c \cdot d)\vec{u}.$$

(1)

Ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

Έστω $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ και $c, d \in \mathbb{R}$.

$\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα με όλα τα στοιχεία του ίσα με μηδέν.

- 1 (Η σειρά των προσθέσεων δεν μετράει) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ και $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- 2 (Ουδέτερο και αντίθετο στοιχείο) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$, $u + \vec{0} = \vec{u}$.
- 3 Ευελιξία του βαθμωτού συντελεστή.

$$c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$$

$$(c + d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u} \tag{1}$$

$$c \cdot (d\vec{u}) = (c \cdot d)\vec{u}.$$

Προσοχή: Δεν προσθέτουμε διανύσματα τα οποία δεν έχουν το ίδιο μήκος, η πράξη **δεν ορίζεται!**

Έστω $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$ και συντελεστές $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Τότε το διάνυσμα

$$y = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n$$

Έστω $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^m$ και συντελεστές $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Τότε το διάνυσμα

$$y = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n$$

ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ με συντελεστές c_1, c_2, \dots, c_n .

$$3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2 \cdot (-2) \\ 4 + 2 \cdot 3 \\ 6 + 2 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Πίσω στην πρώτη διάλεξη.

Πίσω στην πρώτη διάλεξη.

Ο πειρατής, ο οποίος βρίσκεται στο σημείο $(0, 0, 0)$ θέλει να βρει τον θησαυρό, ο οποίος βρίσκεται σε ένα γνωστό σημείο του χώρου. Ο πειρατής μπορεί να κινηθεί μόνο κατά μήκος κάποιων συγκεκριμένων δοθέντων διευθύνσεων. Μπορεί να τον φτάσει και αν ναι πώς;



Ποιες είναι οι κινήσεις του πειρατή;

- * Κάθε διεύθυνση που έχει αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα μήκους 3.

Ποιες είναι οι κινήσεις του πειρατή;

* Κάθε διεύθυνση που έχει αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα μήκους 3. Για παράδειγμα:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο πειρατής μπορεί να κάνει κίνηση κατά μήκος αυτών των τριών διευθύνσεων (διανυσμάτων).

Ποιες είναι οι κινήσεις του πειρατή;

* Κάθε διεύθυνση που έχει αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα μήκους 3. Για παράδειγμα:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο πειρατής μπορεί να κάνει κίνηση κατά μήκος αυτών των τριών διευθύνσεων (διανυσμάτων). Να κινηθεί κατά 1 φορά πάνω στο \vec{v}_1 , κατά 2 φορές πάνω \vec{v}_2 και -3.5 φορές πάνω στο \vec{v}_3 .

Ποιες είναι οι κινήσεις του πειρατή;

★ Κάθε διεύθυνση που έχει αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα μήκους 3. Για παράδειγμα:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο πειρατής μπορεί να κάνει κίνηση κατά μήκος αυτών των τριών διευθύνσεων (διανυσμάτων). Να κινηθεί κατά 1 φορά πάνω στο \vec{v}_1 , κατά 2 φορές πάνω \vec{v}_2 και -3.5 φορές πάνω στο \vec{v}_3 .

Έτσι μπορεί να φτάσει στο σημείο $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - 3.5\vec{v}_3$.

Ποιες είναι οι κινήσεις του πειρατή;

★ Κάθε διεύθυνση που έχει αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα μήκους 3. Για παράδειγμα:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο πειρατής μπορεί να κάνει κίνηση κατά μήκος αυτών των τριών διευθύνσεων (διανυσμάτων). Να κινηθεί κατά 1 φορά πάνω στο \vec{v}_1 , κατά 2 φορές πάνω \vec{v}_2 και -3.5 φορές πάνω στο \vec{v}_3 .

Έτσι μπορεί να φτάσει στο σημείο $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - 3.5\vec{v}_3$.

Είναι εκεί ο θησαυρός;

Ποιες είναι οι κινήσεις του πειρατή;

★ Κάθε διεύθυνση που έχει αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα μήκους 3. Για παράδειγμα:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο πειρατής μπορεί να κάνει κίνηση κατά μήκος αυτών των τριών διευθύνσεων (διανυσμάτων). Να κινηθεί κατά 1 φορά πάνω στο \vec{v}_1 , κατά 2 φορές πάνω \vec{v}_2 και -3.5 φορές πάνω στο \vec{v}_3 .

Έτσι μπορεί να φτάσει στο σημείο $\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - 3.5\vec{v}_3$.

Είναι εκεί ο θησαυρός;

Αν όχι, πώς πρέπει να κινηθεί;

Παραδείγματος συνέχεια.

Ο πειρατής θα μπορούσε να κινηθεί

- 1 Κατά 1 κατά μήκος του \vec{v}_1 ,

Παραδείγματος συνέχεια.

Ο πειρατής θα μπορούσε να κινηθεί

- 1 Κατά 1 κατά μήκος του \vec{v}_1 ,
- 2 Κατά -5 κατά μήκος του \vec{v}_2 ,

Παραδείγματος συνέχεια.

Ο πειρατής θα μπορούσε να κινηθεί

- 1 Κατά 1 κατά μήκος του \vec{v}_1 ,
- 2 Κατά -5 κατά μήκος του \vec{v}_2 ,
- 3 Κατά -0.5 κατά μήκος του \vec{v}_1 .

Παραδείγματος συνέχεια.

Ο πειρατής θα μπορούσε να κινηθεί

- 1 Κατά 1 κατά μήκος του \vec{v}_1 ,
- 2 Κατά -5 κατά μήκος του \vec{v}_2 ,
- 3 Κατά -0.5 κατά μήκος του \vec{v}_1 .
- 4 Κατά 7 κατά μήκος του \vec{v}_2 .

Παραδείγματος συνέχεια.

Ο πειρατής θα μπορούσε να κινηθεί

- 1 Κατά 1 κατά μήκος του \vec{v}_1 ,
- 2 Κατά -5 κατά μήκος του \vec{v}_2 ,
- 3 Κατά -0.5 κατά μήκος του \vec{v}_1 .
- 4 Κατά 7 κατά μήκος του \vec{v}_2 .

Άρα συνολικά να φτάσει στο σημείο

$$\vec{v}_1 + (-5)\vec{v}_2 + (-0.5)\vec{v}_1 + 7\vec{v}_2 = 0.5\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$

Παραδείγματος συνέχεια.

Ο πειρατής θα μπορούσε να κινηθεί

- 1 Κατά 1 κατά μήκος του \vec{v}_1 ,
- 2 Κατά -5 κατά μήκος του \vec{v}_2 ,
- 3 Κατά -0.5 κατά μήκος του \vec{v}_1 .
- 4 Κατά 7 κατά μήκος του \vec{v}_2 .

Άρα συνολικά να φτάσει στο σημείο

$$\vec{v}_1 + (-5)\vec{v}_2 + (-0.5)\vec{v}_1 + 7\vec{v}_2 = 0.5\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$

★ Συμπέρασμα: Αρκεί απλά να κινηθεί κατά 0.5 κατά μήκος του πρώτου διανύσματος και κατά 2 κατά μήκος του δεύτερου διανύσματος.

Παραδείγματος συνέχεια.

Ο πειρατής θα μπορούσε να κινηθεί

- 1 Κατά 1 κατά μήκος του \vec{v}_1 ,
- 2 Κατά -5 κατά μήκος του \vec{v}_2 ,
- 3 Κατά -0.5 κατά μήκος του \vec{v}_1 .
- 4 Κατά 7 κατά μήκος του \vec{v}_2 .

Άρα συνολικά να φτάσει στο σημείο

$$\vec{v}_1 + (-5)\vec{v}_2 + (-0.5)\vec{v}_1 + 7\vec{v}_2 = 0.5\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2.$$

* Συμπέρασμα: Αρκεί απλά να κινηθεί κατά 0.5 κατά μήκος του πρώτου διανύσματος και κατά 2 κατά μήκος του δεύτερου διανύσματος.

* Γενικά: Αρκεί να αποφασίσει πόσο θα κινηθεί κατά μήκος κάθε διανύσματος και να κάνει **μία** κίνηση προς κάθε διεύθυνση.

Παραδείγματος συνέχεια.

Άρα ο πειρατής φτάνει σε σημεία της μορφής

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3,$$

όπου c_1, c_2, c_3 πραγματικοί αριθμοί, και θέλει να δει αν μπορεί να φτάσει στο σημείο $\vec{\beta}$ του θησαυρού.

Παραδείγματος συνέχεια.

Άρα ο πειρατής φτάνει σε σημεία της μορφής

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3,$$

όπου c_1, c_2, c_3 πραγματικοί αριθμοί, και θέλει να δει αν μπορεί να φτάσει στο σημείο $\vec{\beta}$ του θησαυρού.

Διανυσματική Εξίσωση:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{\beta}$$

Παραδείγματος συνέχεια.

Άρα ο πειρατής φτάνει σε σημεία της μορφής

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3,$$

όπου c_1, c_2, c_3 πραγματικοί αριθμοί, και θέλει να δει αν μπορεί να φτάσει στο σημείο $\vec{\beta}$ του θησαυρού.

Διανυσματική Εξίσωση:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{\beta}$$

Γενική μορφή:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = \vec{\beta}.$$

Οι άγνωστοι σε αυτή την εξίσωση είναι τα c_1, c_2, \dots, c_n . Τα διανύσματα είναι όλα **γνωστά**.

Διανυσματική εξίσωση:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = \vec{\beta}.$$

Οι άγνωστοι σε αυτή την εξίσωση είναι τα c_1, c_2, \dots, c_n . Τα διανύσματα είναι όλα **γνωστά**.

Διανυσματική εξίσωση:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = \vec{\beta}.$$

Οι άγνωστοι σε αυτή την εξίσωση είναι τα c_1, c_2, \dots, c_n . Τα διανύσματα είναι όλα **γνωστά**.

★ Ισοδύναμο ερώτημα: Είναι το $\vec{\beta}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$;

Διανυσματική εξίσωση:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = \vec{\beta}.$$

Οι άγνωστοι σε αυτή την εξίσωση είναι τα c_1, c_2, \dots, c_n . Τα διανύσματα είναι όλα **γνωστά**.

★ Ισοδύναμο ερώτημα: Είναι το $\vec{\beta}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$;

Επί της ουσίας, ξέρουμε ήδη να λύνουμε διανυσματικές εξισώσεις ...

Προσδιορίστε αν το διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Λύστε τη διανυσματική εξίσωση

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 7 \\ 2c_1 + 5c_2 = 4 \\ -5c_1 + 6c_2 = 3 \end{cases}$$

Επαυξημένος πίνακας συστήματος

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & 3 \end{array} \right]$$

Διανυσματικές εξισώσεις και πίνακες.

Μια διανυσματική εξίσωση

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{\beta}$$

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$$

έχει την ίδια λύση με τον επαυξημένο πίνακα

$$[\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n | \vec{\beta}]$$

όπου

$$\vec{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

Διανυσματικές εξισώσεις και πίνακες.

Μια διανυσματική εξίσωση

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{\beta}$$

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$$

έχει την ίδια λύση με τον επαυξημένο πίνακα

$$[\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n | \vec{\beta}]$$

όπου

$$\vec{a}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

Κοινώς, το σύστημα όπου ο επαυξημένος πίνακας έχει στήλες τα \vec{a}_i και τελευταία στήλη το $\vec{\beta}$ αντιστοιχεί στην παραπάνω διανυσματική εξίσωση.

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{\beta}$$

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + \dots & + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + \dots & + a_{2n}x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + \dots & + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{bmatrix}$$

$$\vec{\alpha}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

Ένα παράδειγμα

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

\Leftrightarrow

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{array} \right]$$

Γεωμετρική Ερμηνεία (ξανά).

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{\beta}$$

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$$

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{\beta}$$

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$$

★ Αν δούμε τα διανύσματα $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ως σημεία στον \mathbb{R}^m τότε η διανυσματική εξίσωση μας ρωτάει αν υπάρχουν αριθμοί x_1, \dots, x_n έτσι ώστε αν κινηθούμε κατά x_i κατά μήκος του \vec{a}_i να μπορούμε να φτάσουμε στο σημείο $\vec{\beta}$.

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{\beta}$$

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$$

★ Αν δούμε τα διανύσματα $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ως σημεία στον \mathbb{R}^m τότε η διανυσματική εξίσωση μας ρωτάει αν υπάρχουν αριθμοί x_1, \dots, x_n έτσι ώστε αν κινηθούμε κατά x_i κατά μήκος του \vec{a}_i να μπορούμε να φτάσουμε στο σημείο $\vec{\beta}$.

Ενδέχεται να υπάρχουν κάναενας, ένας ή άπειροι τρόποι για να συμβεί αυτό.

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{\beta}$$

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$$

★ Αν δούμε τα διανύσματα $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ως σημεία στον \mathbb{R}^m τότε η διανυσματική εξίσωση μας ρωτάει αν υπάρχουν αριθμοί x_1, \dots, x_n έτσι ώστε αν κινηθούμε κατά x_i κατά μήκος του \vec{a}_i να μπορούμε να φτάσουμε στο σημείο $\vec{\beta}$.

Ενδέχεται να υπάρχουν κάθεννας, ένας ή άπειροι τρόποι για να συμβεί αυτό.

Οι λύσεις (όλα τα (x_1, x_2, \dots, x_n)) θα έχουν και γραμμική δομή: \emptyset , σημείο, ευθεία, επίπεδο, υπερεπίπεδο.

Δύο διαφορετικοί τρόποι ανάγνωσης ενός γραμμικού συστήματος.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & \beta_m \end{array} \right]$$

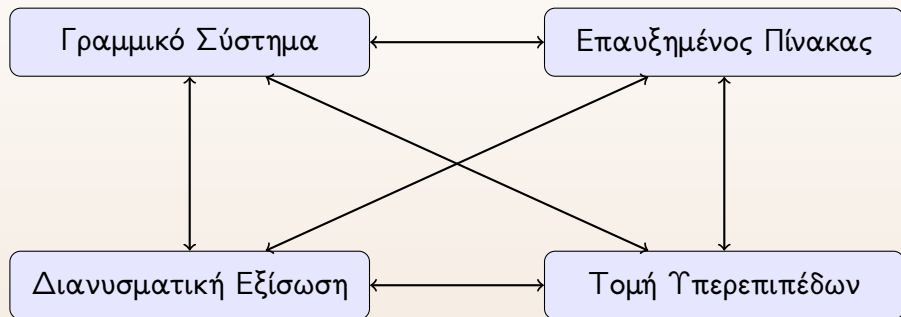
★ Τρόπος I (ανάγνωση κατά γραμμή): Ποιοι είναι οι συντελεστές που ικανοποιούν κάθε εξίσωση (σημεία τομής των υπερεπιπέδων);

Δύο διαφορετικοί τρόποι ανάγνωσης ενός γραμμικού συστήματος.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & \beta_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & \beta_m \end{array} \right]$$

★ Τρόπος I (ανάγνωση κατά γραμμή): Ποιοι είναι οι συντελεστές που ικανοποιούν κάθε εξίσωση (σημεία τομής των υπερεπιπέδων);

★ Τρόπος II (ανάγνωση κατά στήλη): Τι συντελεστές x_1, x_2, \dots, x_n πρέπει να βάλω στις στήλες $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ έτσι ώστε ο προκύπτων γραμμικός τους συνδυασμός να είναι το διάνυσμα $\vec{\beta}$;



Τι πρέπει κυρίως να κρατήσουμε.

- 1 Τι είναι ελεύθερες και βασικές μεταβλητές.
- 2 Πως γράφουμε τις λύσεις ενός συστήματος σε παραμετρική μορφή με βάση τις ελεύθερες και τις βασικές μεταβλητές.
- 3 Τι είναι η διάνυσμα και οι ιδιότητές του.
- 4 Διανυσματική Εξίσωση = Γραμμικό Σύστημα.
- 5 Τρόποι ανάγνωσης ενός γραμμικού συστήματος (κατά γραμμή ή στήλη).

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!