

# Γραμμική Άλγεβρα

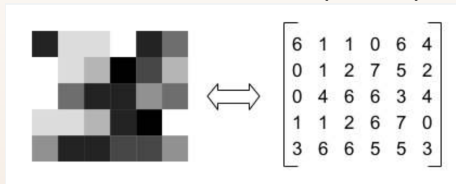
## Τέταρτη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών  
Πανεπιστήμιο Αθηνών

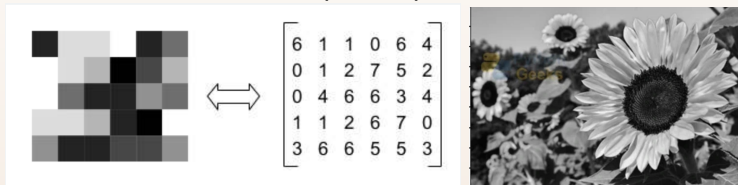
Τα διανύσματα και οι πίνακες δεν εκφράζουν μόνο γεωμετρικά αντικείμενα.

Οι εικόνες στον υπολογιστή αποθηκεύονται σαν πίνακες.



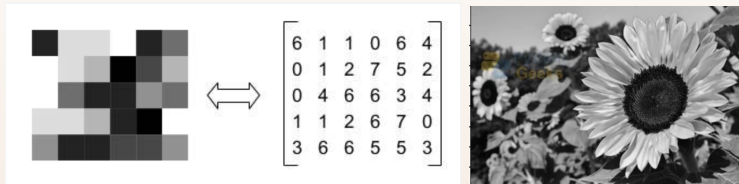
Τα διανύσματα και οι πίνακες δεν εκφράζουν μόνο γεωμετρικά αντικείμενα.

Οι εικόνες στον υπολογιστή αποθηκεύονται σαν πίνακες.



Τα διανύσματα και οι πίνακες δεν εκφράζουν μόνο γεωμετρικά αντικείμενα.

Οι εικόνες στον υπολογιστή αποθηκεύονται σαν πίνακες.



Η επεξεργασία εικόνας και άλλες υπολογιστικές διαδικασίες γίνεται με διάφορες γραμμοαλγεβρικές πράξεις - η συμπίεση εικόνας γίνεται (και) με χρήση εννοιών και εργαλείων Γραμμικής Άλγεβρας.

# Γραμμική Θήκη Διανυσμάτων.

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$  συμβολίζεται με

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$$

και

# Γραμμική Θήκη Διανυσμάτων.

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$  συμβολίζεται με

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$$

και

- είναι ένα σύνολο **διανυσμάτων**.

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$  συμβολίζεται με

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$$

και

- είναι ένα σύνολο **διανυσμάτων**.
- ένα διάνυσμα  $\vec{\beta}$  περιέχεται σε αυτό το σύνολο αν μπορεί να γραφτεί ως  $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_n\vec{a}_n$  για κάποιους πραγματικούς αριθμούς  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$  συμβολίζεται με

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$$

και

- είναι ένα σύνολο **διανυσμάτων**.
- ένα διάνυσμα  $\vec{\beta}$  περιέχεται σε αυτό το σύνολο αν μπορεί να γραφτεί ως  $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_n\vec{a}_n$  για κάποιους πραγματικούς αριθμούς  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .
- περιέχει κάθε **γραμμικό συνδυασμό** των  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  (και τίποτα παραπάνω).

Η γραμμική θήκη διανυσμάτων  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$  συμβολίζεται με

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$$

και

- είναι ένα σύνολο **διανυσμάτων**.
- ένα διάνυσμα  $\vec{\beta}$  περιέχεται σε αυτό το σύνολο αν μπορεί να γραφτεί ως  $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_n\vec{a}_n$  για κάποιους πραγματικούς αριθμούς  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .
- περιέχει κάθε **γραμμικό συνδυασμό** των  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  (και τίποτα παραπάνω).

★ Μπορεί να υπάρχουν πάνω από ένας τρόποι ένα διάνυσμα να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ .

$$2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 - \vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 - \vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{0} \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}$$

$$2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 - \vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{0} \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 - \vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{0} \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 - \vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{0} \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{a}_2 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}???$$

$$2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 + 5\vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 - \vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{0} \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{a}_3 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$-\vec{a}_1 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$\vec{a}_2 \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\}???$$

Όχι απαραίτητα, εξαρτάται από ποια είναι τα  $\vec{a}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_3$ .

## Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$  (διανύσματα με  $m$  εγγραφές).

## Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$  (διανύσματα με  $m$  εγγραφές).

- 1 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 \mid c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ ,

## Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$  (διανύσματα με  $m$  εγγραφές).

- 1 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 \mid c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ , η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.

## Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$  (διανύσματα με  $m$  εγγραφές).

- 1 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ , η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.
- 2 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} + \vec{v} = \{c\vec{a}_1 + \vec{v} | c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ .

## Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$  (διανύσματα με  $m$  εγγραφές).

- 1 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ , η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.
- 2 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} + \vec{v} = \{c\vec{a}_1 + \vec{v} | c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ .
- 3 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$  είναι ένα επίπεδο στον  $\mathbb{R}^m$

## Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$  (διανύσματα με  $m$  εγγραφές).

- 1 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ , η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.
- 2 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} + \vec{v} = \{c\vec{a}_1 + \vec{v} | c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ .
- 3 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$  είναι ένα επίπεδο στον  $\mathbb{R}^m$  το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων,

Έστω  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$  (διανύσματα με  $m$  εγγραφές).

- 1 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ , η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.
- 2 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} + \vec{v} = \{c\vec{a}_1 + \vec{v} | c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ .
- 3 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$  είναι ένα επίπεδο στον  $\mathbb{R}^m$  το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων, εκτός αν τα  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  είναι συγγραμικά στην οποία περίπτωση είναι ευθεία!

Έστω  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$  (διανύσματα με  $m$  εγγραφές).

- 1 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ , η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.
- 2 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} + \vec{v} = \{c\vec{a}_1 + \vec{v} | c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ .
- 3 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$  είναι ένα επίπεδο στον  $\mathbb{R}^m$  το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων, εκτός αν τα  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  είναι συγγραμικά στην οποία περίπτωση είναι ευθεία!

★ Είπαμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε μια ευθεία στον **χώρο** ως τομή **δύο** επιπέδων.



## Πάλι ευθείες και επίπεδα.

Έστω  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$  (διανύσματα με  $m$  εγγραφές).

- 1 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ , η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.
- 2 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} + \vec{v} = \{c\vec{a}_1 + \vec{v} | c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ .
- 3 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$  είναι ένα επίπεδο στον  $\mathbb{R}^m$  το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων, εκτός αν τα  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  είναι συγγραμικά στην οποία περίπτωση είναι ευθεία!

★ Είπαμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε μια ευθεία στον **χώρο** ως τομή **δύο** επιπέδων.

$\Leftrightarrow$

Λύση σύστηματος Εξισώσεων με **3** αγνώστους και **2** μεταβλητές.

$\Leftrightarrow$

Έστω  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$  (διανύσματα με  $m$  εγγραφές).

- 1 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ , η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.
- 2 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} + \vec{v} = \{c\vec{a}_1 + \vec{v} | c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ .
- 3 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$  είναι ένα επίπεδο στον  $\mathbb{R}^m$  το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων, εκτός αν τα  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  είναι συγγραμικά στην οποία περίπτωση είναι ευθεία!

★ Είπαμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε μια ευθεία στον **χώρο** ως τομή **δύο** επιπέδων.

$\Leftrightarrow$

Λύση σύστηματος Εξισώσεων με **3** αγνώστους και **2** μεταβλητές.

$\Leftrightarrow$

Γραμμική Θήκη κάποιου διανύσματος

Έστω  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$  (διανύσματα με  $m$  εγγραφές).

- 1 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} = \{c\vec{a}_1 | c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ , η οποία περνάει από την αρχή των αξόνων.
- 2 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1\} + \vec{v} = \{c\vec{a}_1 + \vec{v} | c \in \mathbb{R}\}$  είναι μια ευθεία στον  $\mathbb{R}^m$ .
- 3 Το  $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} = \{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$  είναι ένα επίπεδο στον  $\mathbb{R}^m$  το οποίο περνάει από την αρχή των αξόνων, εκτός αν τα  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  είναι συγγραμικά στην οποία περίπτωση είναι ευθεία!

★ Είπαμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε μια ευθεία στον **χώρο** ως τομή **δύο** επιπέδων.

$\Leftrightarrow$

Λύση σύστηματος Εξισώσεων με **3** αγνώστους και **2** μεταβλητές.

$\Leftrightarrow$

Γραμμική Θήκη κάποιου διανύσματος (μετατοπισμένη κατά ένα διάνυσμα).

## Το Παράδειγμα του Φροντιστηρίου.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 7 & 2 & -5 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right]$$

## Το Παράδειγμα του Φροντιστηρίου.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 7 & 2 & -5 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right]$$

Όλες οι λύσεις είναι της μορφής

$$c_1 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 19 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_1} + c_2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -31 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} -89 \\ -17 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_3}$$

για οποιαδήποτε επιλογή των  $c_1, c_2$ .

## Το Παράδειγμα του Φροντιστηρίου.

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 7 & 2 & -5 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right]$$

Όλες οι λύσεις είναι της μορφής

$$c_1 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 19 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_1} + c_2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -31 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} -89 \\ -17 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_3}$$

για οποιαδήποτε επιλογή των  $c_1, c_2$ . Άρα οι λύσεις είναι ακριβώς το σύνολο  $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} + \vec{a}_3$ .

## Γενικός Κανόνας.

Έστω ένα σύστημα εξισώσεων με  $r$  ελεύθερες μεταβλητές. Τότε

## Γενικός Κανόνας.

Έστω ένα σύστημα εξισώσεων με  $r$  ελεύθερες μεταβλητές. Τότε υπάρχουν διανύσματα  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r, \vec{w}$  έτσι ώστε το σύνολο λύσεων του να είναι της μορφής

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r\} + \vec{w},$$

## Γενικός Κανόνας.

Έστω ένα σύστημα εξισώσεων με  $r$  ελεύθερες μεταβλητές. Τότε υπάρχουν διανύσματα  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r, \vec{w}$  έτσι ώστε το σύνολο λύσεων του να είναι της μορφής

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r\} + \vec{w},$$

ή με άλλα λόγια κάθε λύση του συστήματος είναι της μορφής

$$\underbrace{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_r\vec{a}_r}_{\text{γραμμικός συνδυασμός}} + \vec{w}$$

για κάποια  $c_1, c_2, \dots, c_r \in \mathbb{R}$

## Γενικός Κανόνας.

Έστω ένα σύστημα εξισώσεων με  $r$  ελεύθερες μεταβλητές. Τότε υπάρχουν διανύσματα  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r, \vec{w}$  έτσι ώστε το σύνολο λύσεων του να είναι της μορφής

$$\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r\} + \vec{w},$$

ή με άλλα λόγια κάθε λύση του συστήματος είναι της μορφής

$$\underbrace{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_r\vec{a}_r}_{\text{γραμμικός συνδυασμός}} + \vec{w}$$

για κάποια  $c_1, c_2, \dots, c_r \in \mathbb{R}$  και αντίστροφα κάθε διάνυσμα της μορφής

$$\underbrace{c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \dots + c_r\vec{a}_r}_{\text{γραμμικός συνδυασμός}} + \vec{w}$$

είναι λύση του συστήματος.

# Παράδειγμα.

Ας λύσουμε το σύστημα

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{array} \right]$$

## Παράδειγμα.

Ας λύσουμε το σύστημα

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \text{απαλοιφή Gauss} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

που αντιστοιχεί στις εξισώσεις  $x_1 = 2x_3 + 1$ ,  $x_2 = 3x_3 - 1$ .

# Παράδειγμα.

Ας λύσουμε το σύστημα

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \text{απαλοιφή Gauss} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

που αντιστοιχεί στις εξισώσεις  $x_1 = 2x_3 + 1$ ,  $x_2 = 3x_3 - 1$ . Άρα

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

# Παράδειγμα.

Ας λύσουμε το σύστημα

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \text{απαλοιφή Gauss} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

που αντιστοιχεί στις εξισώσεις  $x_1 = 2x_3 + 1$ ,  $x_2 = 3x_3 - 1$ . Άρα

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 + 1 \\ 3x_3 - 1 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

# Παράδειγμα.

Ας λύσουμε το σύστημα

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \text{απαλοιφή Gauss} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

που αντιστοιχεί στις εξισώσεις  $x_1 = 2x_3 + 1$ ,  $x_2 = 3x_3 - 1$ . Άρα

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 + 1 \\ 3x_3 - 1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{w}}$$

# Παράδειγμα.

Ας λύσουμε το σύστημα

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \text{απαλοιφή Gauss} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

που αντιστοιχεί στις εξισώσεις  $x_1 = 2x_3 + 1$ ,  $x_2 = 3x_3 - 1$ . Άρα

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 + 1 \\ 3x_3 - 1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{w}} \in \text{span}\{\vec{a}_1\} + w$$

# Παράδειγμα.

Ας λύσουμε το σύστημα

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \text{απαλοιφή Gauss} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

που αντιστοιχεί στις εξισώσεις  $x_1 = 2x_3 + 1$ ,  $x_2 = 3x_3 - 1$ . Άρα

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 + 1 \\ 3x_3 - 1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{w}} \in \text{span}\{\vec{a}_1\} + w$$

Υπενθύμιση: Βαθμός Πίνακα είναι το **πλήθος** των βασικών μεταβλητών το.

# Παράδειγμα.

Ας λύσουμε το σύστημα

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \text{απαλοιφή Gauss} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

που αντιστοιχεί στις εξισώσεις  $x_1 = 2x_3 + 1$ ,  $x_2 = 3x_3 - 1$ . Άρα

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_3 + 1 \\ 3x_3 - 1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{a}_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{w}} \in \text{span}\{\vec{a}_1\} + w$$

Υπενθύμιση: Βαθμός Πίνακα είναι το **πλήθος** των βασικών μεταβλητών το. Ο χώρος λύσεων ενός συστήματος (αν έχει λύση) με βαθμό  $r$  είναι η γραμμική θήκη  $n - r$  διανυσμάτων μετατοπισμένη κατά ένα διάνυσμα.

Εσωτερικό Γινόμενο διανυσμάτων  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .

Εσωτερικό Γινόμενο διανυσμάτων  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Εσωτερικό Γινόμενο διανυσμάτων  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

Εσωτερικό Γινόμενο διανυσμάτων  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

Εκφράζει το πόσο το διάνυσμα  $u$  δείχνει στην κατεύθυνση του  $v$  (και το αντίστροφο).

Εσωτερικό Γινόμενο διανυσμάτων  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

Εκφράζει το πόσο το διάνυσμα  $u$  δείχνει στην κατεύθυνση του  $v$  (και το αντίστροφο).

Παραδείγματα:

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x,$$

Παραδείγματα:

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x, \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 0 + y \cdot 1 = y$$

και

Παραδείγματα:

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x, \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 0 + y \cdot 1 = y$$

και

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0,$$

Παραδείγματα:

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x, \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 0 + y \cdot 1 = y$$

και

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0, \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = -2 \cdot 1 + -1 \cdot -1 = -1$$

και

Παραδείγματα:

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x, \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 0 + y \cdot 1 = y$$

και

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0, \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = -2 \cdot 1 + -1 \cdot -1 = -1$$

και

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 = 3,$$

Παραδείγματα:

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x, \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 0 + y \cdot 1 = y$$

και

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0, \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = -2 \cdot 1 + -1 \cdot -1 = -1$$

και

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 = 3,$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

Παραδείγματα:

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 1 + y \cdot 0 = x, \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = x \cdot 0 + y \cdot 1 = y$$

και

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0, \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = -2 \cdot 1 + -1 \cdot -1 = -1$$

και

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 = 3,$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$$

★  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$  είναι **κάθετα**.

# Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα

Έστω  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m$  γραμμές και  $n$  στήλες) και  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .

# Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα

Έστω  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m$  γραμμές και  $n$  στήλες) και  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .  
Ορίζω τον πολλαπλασιασμό του  $A$  με το διάνυσμα  $\vec{x}$  ως

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

# Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα

Έστω  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m$  γραμμές και  $n$  στήλες) και  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Ορίζω τον πολλαπλασιασμό του  $A$  με το διάνυσμα  $\vec{x}$  ως

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

- Το γινόμενο  $A\vec{x}$  με  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  είναι ένα διάνυσμα μήκους  $m$ .

# Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα

Έστω  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m$  γραμμές και  $n$  στήλες) και  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Ορίζω τον πολλαπλασιασμό του  $A$  με το διάνυσμα  $\vec{x}$  ως

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

- Το γινόμενο  $A\vec{x}$  με  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  είναι ένα διάνυσμα μήκους  $m$ .
- Το διάνυσμα  $A\vec{x}$  περιέχει στην  $i$ -οστή του εγγραφή το εσωτερικό γινόμενο της  $i$ -οστής γραμμής του  $A$  με το διάνυσμα  $\vec{x}$ .

# Πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα

Έστω  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ( $m$  γραμμές και  $n$  στήλες) και  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Ορίζω τον πολλαπλασιασμό του  $A$  με το διάνυσμα  $\vec{x}$  ως

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

- Το γινόμενο  $A\vec{x}$  με  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  είναι ένα διάνυσμα μήκους  $m$ .
  - Το διάνυσμα  $A\vec{x}$  περιέχει στην  $i$ -οστή του εγγραφή το εσωτερικό γινόμενο της  $i$ -οστής γραμμής του  $A$  με το διάνυσμα  $\vec{x}$ .
- ★ Με τον από πάνω ορισμό η διανυσματική εξίσωση και τα γραμμικά συστήματα γράφονται ως  $A\vec{x} = \vec{\beta}$ .

# Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

## Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (0) \cdot (-1) \end{bmatrix} =$$

## Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (0) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (0) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Πόσους πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις πρέπει να κάνω για να υπολογίσω το γινόμενο  $A\vec{x}$  με  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  ;

## Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (0) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Πόσους πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις πρέπει να κάνω για να υπολογίσω το γινόμενο  $A\vec{x}$  με  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  ;

- ★ Για κάθε γραμμή του  $A$  έχω  $n$  πολλαπλασιασμούς και  $n - 1$  προσθέσεις.

## Παράδειγμα πολλαπλασιασμού πίνακα με διάνυσμα.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-3) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (0) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Πόσους πολλαπλασιασμούς και προσθέσεις πρέπει να κάνω για να υπολογίσω το γινόμενο  $A\vec{x}$  με  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  ;

- ★ Για κάθε γραμμή του  $A$  έχω  $n$  πολλαπλασιασμούς και  $n - 1$  προσθέσεις.
- ★ Άρα συνολικά  $m \cdot n$  πολλαπλασιασμούς και  $m \cdot (n - 1)$  προσθέσεις.

Λίγο διαφήμιση.

# THE TOP 10 LIST

**1946: The Metropolis Algorithm**

**1947: Simplex Method**

**1950: Krylov Subspace Method**

**1951: The Decompositional Approach to Matrix Computations**

**1957: The Fortran Optimizing Compiler**

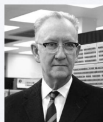
**1959: QR Algorithm**

**1962: Quicksort**

**1965: Fast Fourier Transform**

**1977: Integer Relation Detection**

**1987: Fast Multipole Method**



Dantzig

von Neumann

Hestenes

Householder

Backus

Hoare

Greengard

Υπενθύμιση:  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  και άρα  $Ax \in \mathbb{R}^m$ .

Υπενθύμιση:  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  και άρα  $Ax \in \mathbb{R}^m$ .  
Έστω  $\vec{a}_i$  η  $i$ -οστή στήλη και  $\vec{r}_i$  η  $i$ -οστή γραμμή του  $A$ .

Υπενθύμιση:  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  και άρα  $Ax \in \mathbb{R}^m$ .

Έστω  $\vec{a}_i$  η  $i$ -οστή στήλη και  $\vec{r}_i$  η  $i$ -οστή γραμμή του  $A$ .

- 1 (Κατά γραμμή ανάγνωση). Η  $i$ -οστή συντεταγμένη του  $A\vec{x}$  ισούται με  $\langle \vec{r}_i, \vec{x} \rangle$ . Εσωτερικό γινόμενο κάθε **γραμμής** του  $A$  με το  $\vec{x}$ .

Υπενθύμιση:  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  και άρα  $A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ .

Έστω  $\vec{a}_i$  η  $i$ -οστή στήλη και  $\vec{r}_i$  η  $i$ -οστή γραμμή του  $A$ .

- 1 (Κατά γραμμή ανάγνωση). Η  $i$ -οστή συντεταγμένη του  $A\vec{x}$  ισούται με  $\langle \vec{r}_i, \vec{x} \rangle$ . Εσωτερικό γινόμενο κάθε **γραμμής** του  $A$  με το  $\vec{x}$ .
- 2 (Κατά στήλη ανάγνωση).  $A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n$ . Γραμμικός συνδυασμός των στηλών του  $A$  με συντελεστές τα  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Υπενθύμιση:  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  και άρα  $A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ .

Έστω  $\vec{a}_i$  η  $i$ -οστή στήλη και  $\vec{r}_i$  η  $i$ -οστή γραμμή του  $A$ .

- 1 (Κατά γραμμή ανάγνωση). Η  $i$ -οστή συντεταγμένη του  $A\vec{x}$  ισούται με  $\langle \vec{r}_i, \vec{x} \rangle$ . Εσωτερικό γινόμενο κάθε **γραμμής** του  $A$  με το  $\vec{x}$ .
- 2 (Κατά στήλη ανάγνωση).  $A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n$ . Γραμμικός συνδυασμός των στηλών του  $A$  με συντελεστές τα  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

$$A\vec{x} = \vec{\beta} \Leftrightarrow x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$$

★ Υπολογίζουμε με την κατά γραμμή ανάγνωση.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 7 \\ 0 \cdot 4 + (-5) \cdot 3 + 3 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

★ Υπολογίζουμε με την κατά γραμμή ανάγνωση.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 7 \\ 0 \cdot 4 + (-5) \cdot 3 + 3 \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

★ Υπολογίζουμε και με την κατά στήλη ανάγνωση.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

## Πίσω στη γραμμική θήκη.

Υπενθύμιση: Δοθέντων διανυσμάτων  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$  ποια είναι τα  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  τα οποία δύναται να προκύψουν ως γραμμικός συνδυασμός των  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ;

## Πίσω στη γραμμική θήκη.

Υπενθύμιση: Δοθέντων διανυσμάτων  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$  ποια είναι τα  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  τα οποία δύναται να προκύψουν ως γραμμικός συνδυασμός των  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ;

Το ίδιο ερώτημα με άλλα λόγια:

## Πίσω στη γραμμική θήκη.

Υπενθύμιση: Δοθέντων διανυσμάτων  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$  ποια είναι τα  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  τα οποία δύναται να προκύψουν ως γραμμικός συνδυασμός των  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ ;

Το ίδιο ερώτημα με άλλα λόγια:

Ποια είναι τα  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$  για τα οποία υπάρχει  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  ώστε  $A\vec{x} = \vec{\beta}$ ; όπου  $A$  είναι ο πίνακας του οποίου η  $i$ -οστή στήλη είναι το  $\vec{a}_i$ .

# Αλγεβρικές ιδιότητες γινομένου πίνακα με διάνυσμα.

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}.$$

- Επιμεριστική ιδιότητα:

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$$

# Αλγεβρικές ιδιότητες γινομένου πίνακα με διάνυσμα.

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}.$$

- Επιμεριστική ιδιότητα:

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$$

- Προσεταιριστική ιδιότητα με βαθμωτό.

$$A(c\vec{u}) = c(A\vec{u})$$

$$\begin{aligned} & A(2\vec{u} + 3\vec{v}) - A(2\vec{v} + 5\vec{u}) \\ &= 2A\vec{u} + 3A\vec{v} - 2A\vec{v} - 5A\vec{u} \\ &= -3A\vec{u} + A\vec{v} \\ &= A(\vec{v} - 3\vec{u}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A(2\vec{u} + 3\vec{v}) - A(2\vec{v} + 5\vec{u}) \\ &= 2A\vec{u} + 3A\vec{v} - 2A\vec{v} - 5A\vec{u} \\ &= -3A\vec{u} + A\vec{v} \\ &= A(\vec{v} - 3\vec{u}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A(\vec{u} - \vec{v}) - A(-\vec{v} + \vec{u}) \\ &= A\vec{u} - A\vec{v} + A\vec{v} - A\vec{u} \\ & \vec{0} \end{aligned}$$

## Οι αποδείξεις των ανωτέρων.

Έστω  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  οι στήλες του  $A$ .

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}, \text{ διότι}$$

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = (\text{λόγω ανάγνωσης κατά στήλη})$$

$$(u_1 + v_1)\vec{a}_1 + (u_2 + v_2)\vec{a}_2 + \dots + (u_n + v_n)\vec{a}_n =$$

$$(u_1\vec{a}_1 + \dots + u_n\vec{a}_n) + (v_1\vec{a}_1 + \dots + v_n\vec{a}_n) =$$

$$A\vec{u} + A\vec{v}$$

$$A(c\vec{u}) = c(A\vec{u}), \text{ διότι}$$

$$A(c\vec{u}) = (cu_1)\vec{a}_1 + (cu_2)\vec{a}_2 + \dots + (cu_n)\vec{a}_n =$$

$$(cu_1)\vec{a}_1 + (cu_2)\vec{a}_2 + \dots + (cu_n)\vec{a}_n =$$

$$c(A\vec{u})$$

Ισοδυναμία διατυπώσεων.

- Γραμμικό Σύστημα με  $m$  εξισώσεις και  $n$  αγνώστους.

Ισοδυναμία διατυπώσεων.

- Γραμμικό Σύστημα με  $m$  εξισώσεις και  $n$  αγνώστους.
- Επαυξημένος πίνακας με  $m$  γραμμές και  $n + 1$  στήλες.

Ισοδυναμία διατυπώσεων.

- Γραμμικό Σύστημα με  $m$  εξισώσεις και  $n$  αγνώστους.
- Επαυξημένος πίνακας με  $m$  γραμμές και  $n + 1$  στήλες.
- Διανυσματική εξίσωση  $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$  με  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  και  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

Ισοδυναμία διατυπώσεων.

- Γραμμικό Σύστημα με  $m$  εξισώσεις και  $n$  αγνώστους.
- Επαυξημένος πίνακας με  $m$  γραμμές και  $n + 1$  στήλες.
- Διανυσματική εξίσωση  $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$  με  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  και  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
- Εξίσωση πίνακα  $A\vec{x} = \vec{\beta}$ .

Ισοδυναμία διατυπώσεων.

- Γραμμικό Σύστημα με  $m$  εξισώσεις και  $n$  αγνώστους.
- Επαυξημένος πίνακας με  $m$  γραμμές και  $n + 1$  στήλες.
- Διανυσματική εξίσωση  $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$  με  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  και  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
- Εξίσωση πίνακα  $A\vec{x} = \vec{\beta}$ .
- $\vec{\beta} \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ ;

Ισοδυναμία διατυπώσεων.

- Γραμμικό Σύστημα με  $m$  εξισώσεις και  $n$  αγνώστους.
- Επαυξημένος πίνακας με  $m$  γραμμές και  $n + 1$  στήλες.
- Διανυσματική εξίσωση  $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$  με  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  και  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
- Εξίσωση πίνακα  $A\vec{x} = \vec{\beta}$ .
- $\vec{\beta} \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ ;

Ισοδυναμία διατυπώσεων.

- Γραμμικό Σύστημα με  $m$  εξισώσεις και  $n$  αγνώστους.
- Επαυξημένος πίνακας με  $m$  γραμμές και  $n + 1$  στήλες.
- Διανυσματική εξίσωση  $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{\beta}$  με  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  και  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
- Εξίσωση πίνακα  $A\vec{x} = \vec{\beta}$ .
- $\vec{\beta} \in \text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ ;

Όλα τα παραπάνω εκφράζουν ακριβώς το ίδιο πράγμα και άρα έχουν τις ίδιες λύσεις!

Τα κατώθι είναι ισοδύναμα.

- Για κάθε  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  η εξίσωση  $A\vec{x} = \vec{\beta}$  έχει λύση.

Τα κατώθι είναι ισοδύναμα.

- Για κάθε  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  η εξίσωση  $A\vec{x} = \vec{\beta}$  έχει λύση.
- Κάθε  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του  $A$ .

Τα κατώθι είναι ισοδύναμα.

- Για κάθε  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  η εξίσωση  $A\vec{x} = \vec{\beta}$  έχει λύση.
- Κάθε  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του  $A$ .
- $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$ , όπου  $a_1, a_2, \dots, a_n$  στήλες του  $A$ .

Τα κατώθι είναι ισοδύναμα.

- Για κάθε  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  η εξίσωση  $A\vec{x} = \vec{\beta}$  έχει λύση.
- Κάθε  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του  $A$ .
- $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$ , όπου  $a_1, a_2, \dots, a_n$  στήλες του  $A$ .
- Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του  $A$  έχει οδηγό σε κάθε μία από τις  $m$  γραμμές.

Τα κατώθι είναι ισοδύναμα.

- Για κάθε  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  η εξίσωση  $A\vec{x} = \vec{\beta}$  έχει λύση.
- Κάθε  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του  $A$ .
- $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$ , όπου  $a_1, a_2, \dots, a_n$  στήλες του  $A$ .
- Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του  $A$  έχει οδηγό σε κάθε μία από τις  $m$  γραμμές.
- Υπάρχουν  $m$  βασικές μεταβλητές στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα

Τα κατώθι είναι ισοδύναμα.

- Για κάθε  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  η εξίσωση  $A\vec{x} = \vec{\beta}$  έχει λύση.
- Κάθε  $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^m$  μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του  $A$ .
- $\text{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$ , όπου  $a_1, a_2, \dots, a_n$  στήλες του  $A$ .
- Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του  $A$  έχει οδηγό σε κάθε μία από τις  $m$  γραμμές.
- Υπάρχουν  $m$  βασικές μεταβλητές στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα (όταν  $m = n$  αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τέλεια σκάλα).

Λύστε το σύστημα  $A\vec{x} = \vec{\beta}$  με

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & -7 & -6 \end{bmatrix}, \vec{\beta} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Λύστε το σύστημα  $A\vec{x} = \vec{\beta}$  με

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & -7 & -6 \end{bmatrix}, \vec{\beta} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Φτιάχνουμε τον επαυξημένο πίνακα

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \\ -3 & -7 & -6 & 12 \end{array} \right]$$

και λύνουμε όπως πριν.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!