

Γραμμική Άλγεβρα

Έκτη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Προσοχη: Από εδώ και εμπρός τα διανύσματα θα συμβολίζονται **χωρίς βέλος** πάνω από το όνομά τους. Άρα το $a \in \mathbb{R}^3$ είναι ένα διάνυσμα μήκους 3, και δεν θα χρησιμοποιούμε ποια τον συμβολισμό \vec{a} (ο οποίος είναι προσαρμοσμένος στα λυκειακά μαθηματικά).

Θα ασχοληθούμε με *απεικονίσεις* (μετασχηματισμούς, συναρτήσεις)

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Θα ασχοληθούμε με απεικονίσεις (μετασχηματισμούς, συναρτήσεις)

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

- Μια απεικόνιση 'στέλνει' ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ σε ένα διάνυσμα \mathbb{R}^m , για την ακρίβεια στο $T(x)$.

Θα ασχοληθούμε με *απεικονίσεις* (μετασχηματισμούς, συναρτήσεις)

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

- Μια απεικόνιση 'στέλνει' ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ σε ένα διάνυσμα \mathbb{R}^m , για την ακρίβεια στο $T(x)$.
- Ενδεχομένως να αναφερόμαστε στο $T(x)$ ως την *εικόνα* του x υπό την T .
- Το \mathbb{R}^n λέγεται πεδίο ορισμού και το \mathbb{R}^m πεδίο τιμών.

Θα ασχοληθούμε με *απεικονίσεις* (μετασχηματισμούς, συναρτήσεις)

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

- Μια απεικόνιση 'στέλνει' ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ σε ένα διάνυσμα \mathbb{R}^m , για την ακρίβεια στο $T(x)$.
- Ενδεχομένως να αναφερόμαστε στο $T(x)$ ως την *εικόνα* του x υπό την T .
- Το \mathbb{R}^n λέγεται πεδίο ορισμού και το \mathbb{R}^m πεδίο τιμών.
- Το σύνολο τιμών της T είναι όλα τα $b \in \mathbb{R}^m$ για τα οποία υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.
- $b \in \mathbb{R}^m$ ανήκει στο σύνολο τιμών του $T \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε $T(x) = b$.

Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

- 1 $T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- 2 $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

- 1 $T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- 2 $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

- 1 $T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- 2 $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

★ Έχουμε επίσης ότι $T(x + y + z) = T(x) + T(y) + T(z),$

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

- 1 $T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- 2 $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

★ Έχουμε επίσης ότι $T(x + y + z) = T(x) + T(y) + T(z)$, διότι

$$T(x + y + z) =$$

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

- 1 $T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- 2 $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

★ Έχουμε επίσης ότι $T(x + y + z) = T(x) + T(y) + T(z)$, διότι

$$T(x + y + z) = T((x + y) + z) =$$

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

- 1 $T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- 2 $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

★ Έχουμε επίσης ότι $T(x + y + z) = T(x) + T(y) + T(z)$, διότι

$$T(x + y + z) = T((x + y) + z) = T(x + y) + T(z) =$$

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

- 1 $T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- 2 $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

★ Έχουμε επίσης ότι $T(x + y + z) = T(x) + T(y) + T(z)$, διότι

$$T(x + y + z) = T((x + y) + z) = T(x + y) + T(z) = (T(x) + T(y)) + T(z)$$

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

- 1 $T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- 2 $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

★ Έχουμε επίσης ότι $T(x + y + z) = T(x) + T(y) + T(z)$, διότι

$$T(x + y + z) = T((x + y) + z) = T(x + y) + T(z) = (T(x) + T(y)) + T(z)$$

και ακόμη

$$T(x - y) = T(x + (-y)) =$$

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

- 1 $T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- 2 $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

★ Έχουμε επίσης ότι $T(x + y + z) = T(x) + T(y) + T(z)$, διότι

$$T(x + y + z) = T((x + y) + z) = T(x + y) + T(z) = (T(x) + T(y)) + T(z)$$

και ακόμη

$$T(x - y) = T(x + (-y)) = T(x) + T(-y) =$$

Η T λέγεται *Γραμμική Απεικόνιση* αν έχει τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

- 1 $T(x + y) = T(x) + T(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- 2 $T(\lambda x) = \lambda \cdot T(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}.$

Εναλλακτικά:

$$(3) \quad T(\lambda x + \mu y) = \lambda \cdot T(x) + \mu \cdot T(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

★ Έχουμε επίσης ότι $T(x + y + z) = T(x) + T(y) + T(z)$, διότι

$$T(x + y + z) = T((x + y) + z) = T(x + y) + T(z) = (T(x) + T(y)) + T(z)$$

και ακόμη

$$T(x - y) = T(x + (-y)) = T(x) + T(-y) = T(x) - T(y)$$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

① $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

① $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓

Ισχύει ότι

$$T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) =$$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

① $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓

Ισχύει ότι

$$T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) =$$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

① $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓

Ισχύει ότι

$$T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$$

και

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

① $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓

Ισχύει ότι

$$T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$$

και

$$T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) =$$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

① $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓

Ισχύει ότι

$$T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$$

και

$$T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) =$$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

① $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓

Ισχύει ότι

$$T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$$

και

$$T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \underbrace{(2x_1 + x_2)}_{T(x_1, x_2)} + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{T(y_1, y_2)} =$$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

① $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓

Ισχύει ότι

$$T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$$

και

$$T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \underbrace{(2x_1 + x_2)}_{T(x_1, x_2)} + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{T(y_1, y_2)} = T(x) + T(y).$$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

❶ $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓

Ισχύει ότι

$$T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$$

και

$$T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \underbrace{(2x_1 + x_2)}_{T(x_1, x_2)} + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{T(y_1, y_2)} = T(x) + T(y).$$

❷ $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x) = 2x + 3$.

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

① $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓

Ισχύει ότι

$$T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$$

και

$$T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \underbrace{(2x_1 + x_2)}_{T(x_1, x_2)} + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{T(y_1, y_2)} = T(x) + T(y).$$

② $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x) = 2x + 3$. ✗

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

① $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓

Ισχύει ότι

$$T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$$

και

$$T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \underbrace{(2x_1 + x_2)}_{T(x_1, x_2)} + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{T(y_1, y_2)} = T(x) + T(y).$$

② $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x) = 2x + 3$. ✗

Διότι για $x = 0$ έχουμε $T(0) = 3$,

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

❶ $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓

Ισχύει ότι

$$T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$$

και

$$T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \underbrace{(2x_1 + x_2)}_{T(x_1, x_2)} + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{T(y_1, y_2)} = T(x) + T(y).$$

❷ $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x) = 2x + 3$. ✗

Διότι για $x = 0$ έχουμε $T(0) = 3$, ενώ θα έπρεπε $T(0) = 0$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

❶ $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓

Ισχύει ότι

$$T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$$

και

$$T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \underbrace{(2x_1 + x_2)}_{T(x_1, x_2)} + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{T(y_1, y_2)} = T(x) + T(y).$$

❷ $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x) = 2x + 3$. ✗

Διότι για $x = 0$ έχουμε $T(0) = 3$, ενώ θα έπρεπε $T(0) = 0$ διότι $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0) = 2T(0) \Rightarrow T(0) = 0$.

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

❶ $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ ✓

Ισχύει ότι

$$T(\lambda x) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = 2(\lambda x_1) + (\lambda x_2) = \lambda(2x_1 + x_2) = \lambda T(x_1, x_2)$$

και

$$T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \underbrace{(2x_1 + x_2)}_{T(x_1, x_2)} + \underbrace{(2y_1 + y_2)}_{T(y_1, y_2)} = T(x) + T(y).$$

❷ $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x) = 2x + 3$. ✗

Διότι για $x = 0$ έχουμε $T(0) = 3$, ενώ θα έπρεπε $T(0) = 0$ διότι $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0) = 2T(0) \Rightarrow T(0) = 0$.

* Γενικός Κανόνας: Ένα γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ικανοποιεί πάντα $T(0) = 0$.

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

① $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

- ① $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. **X**
 $T(1, 0, 0) = 1, T(-1, 0, 0) = 1$ και άρα θα έπρεπε

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

- ① $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. **X**
 $T(1, 0, 0) = 1, T(-1, 0, 0) = 1$ και άρα θα έπρεπε

$$0 = T(0, 0, 0) = T(1, 0, 0) + T(-1, 0, 0) = 1 + 1 = 2,$$

αδύνατο!

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

- ❶ $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. **X**
 $T(1, 0, 0) = 1, T(-1, 0, 0) = 1$ και άρα θα έπρεπε

$$0 = T(0, 0, 0) = T(1, 0, 0) + T(-1, 0, 0) = 1 + 1 = 2,$$

αδύνατο!

- ❷ $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

- ❶ $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. **X**
 $T(1, 0, 0) = 1, T(-1, 0, 0) = 1$ και άρα θα έπρεπε

$$0 = T(0, 0, 0) = T(1, 0, 0) + T(-1, 0, 0) = 1 + 1 = 2,$$

αδύνατο!

- ❷ $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ -3 \end{bmatrix}$. **X**

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

- ❶ $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. **X**
 $T(1, 0, 0) = 1, T(-1, 0, 0) = 1$ και άρα θα έπρεπε

$$0 = T(0, 0, 0) = T(1, 0, 0) + T(-1, 0, 0) = 1 + 1 = 2,$$

αδύνατο!

- ❷ $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ -3 \end{bmatrix}$. **X**

Όχι γιατί $T(0, 0, 0)$ δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα όπως θα έπρεπε.

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

- ❶ $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. **X**
 $T(1, 0, 0) = 1, T(-1, 0, 0) = 1$ και άρα θα έπρεπε

$$0 = T(0, 0, 0) = T(1, 0, 0) + T(-1, 0, 0) = 1 + 1 = 2,$$

αδύνατο!

- ❷ $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ -3 \end{bmatrix}$. **X**

Όχι γιατί $T(0, 0, 0)$ δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα όπως θα έπρεπε.
Εναλλακτικά, δεν ισχύει ότι $T(x + y) = T(x) + T(y)$

Ποιοί από τους παρακάτω είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί;

- ❶ $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. ❌
 $T(1, 0, 0) = 1, T(-1, 0, 0) = 1$ και άρα θα έπρεπε

$$0 = T(0, 0, 0) = T(1, 0, 0) + T(-1, 0, 0) = 1 + 1 = 2,$$

αδύνατο!

- ❷ $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ -3 \end{bmatrix}$. ❌

Όχι γιατί $T(0, 0, 0)$ δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα όπως θα έπρεπε. Εναλλακτικά, δεν ισχύει ότι $T(x + y) = T(x) + T(y)$ (λόγω τρίτης συντεταγμένης).

Είναι το πιο κάτω γραμμικός μετασχηματισμός;

$$T = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ με } T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1 + 1)^2 - x_1^2 - 1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

Είναι το πιο κάτω γραμμικός μετασχηματισμός;

$$T = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ με } T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1 + 1)^2 - x_1^2 - 1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix} \checkmark$$

Είναι το πιο κάτω γραμμικός μετασχηματισμός;

$$T = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ με } T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1 + 1)^2 - x_1^2 - 1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix} \checkmark$$

Έχουμε ότι

$$T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

Είναι το πιο κάτω γραμμικός μετασχηματισμός;

$$T = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ με } T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1 + 1)^2 - x_1^2 - 1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix} \checkmark$$

Έχουμε ότι

$$T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

και ισχύει ότι

$$T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) =$$

Είναι το πιο κάτω γραμμικός μετασχηματισμός;

$$T = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ με } T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1 + 1)^2 - x_1^2 - 1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix} \checkmark$$

Έχουμε ότι

$$T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

και ισχύει ότι

$$T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \begin{bmatrix} 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ -(x_2 + y_2) + (x_1 + y_1) \end{bmatrix} =$$

Είναι το πιο κάτω γραμμικός μετασχηματισμός;

$$T = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ με } T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1 + 1)^2 - x_1^2 - 1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix} \checkmark$$

Έχουμε ότι

$$T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

και ισχύει ότι

$$T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \begin{bmatrix} 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ -(x_2 + y_2) + (x_1 + y_1) \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}}_{T(x_1, x_2)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2y_1 + y_2 \\ -y_2 + y_1 \end{bmatrix}}_{T(y_1, y_2)} = T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2)$$

Είναι το πιο κάτω γραμμικός μετασχηματισμός;

$$T = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ με } T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} (x_1 + 1)^2 - x_1^2 - 1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix} \checkmark$$

Έχουμε ότι

$$T(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}$$

και ισχύει ότι

$$T(x + y) = T(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \begin{bmatrix} 2(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \\ -(x_2 + y_2) + (x_1 + y_1) \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ -x_2 + x_1 \end{bmatrix}}_{T(x_1, x_2)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2y_1 + y_2 \\ -y_2 + y_1 \end{bmatrix}}_{T(y_1, y_2)} = T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2)$$

Όμοια ελέγχουμε και την ιδιότητα $T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

Κάποιες καλές ιδιότητες των γραμμικών μετασχηματισμών.

Έστω $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_3 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Κάποιες καλές ιδιότητες των γραμμικών μετασχηματισμών.

Έστω $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_3 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

άρα αρκεί να ξέρουμε τι διάνυσμα επιστρέφει ο T για **μόνο** τρία διανύσματα για να βρούμε οποιοδήποτε άλλο.

Κάποιες καλές ιδιότητες των γραμμικών μετασχηματισμών.

Έστω $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_3 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

άρα αρκεί να ξέρουμε τι διάνυσμα επιστρέφει ο T για **μόνο** τρία διανύσματα για να βρούμε οποιοδήποτε άλλο.

★ Γενικότερα για διανύσματα $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{R}^m$ και αριθμούς $c_1, c_2, \dots, c_r \in \mathbb{R}$ έχουμε

Κάποιες καλές ιδιότητες των γραμμικών μετασχηματισμών.

Έστω $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_3 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right),$$

άρα αρκεί να ξέρουμε τι διάνυσμα επιστρέφει ο T για **μόνο** τρία διανύσματα για να βρούμε οποιοδήποτε άλλο.

★ Γενικότερα για διανύσματα $a_1, a_2, \dots, a_r \in \mathbb{R}^m$ και αριθμούς $c_1, c_2, \dots, c_r \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$T(c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_r a_r) = c_1 T(a_1) + c_2 T(a_2) + \dots + c_r T(a_r)$$

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $T(x) = Ax$ είναι γραμμική.

* Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$T(x + y) =$$

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $T(x) = Ax$ είναι γραμμική.

* Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$T(x + y) = A(x + y) =$$

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $T(x) = Ax$ είναι γραμμική.

★ Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$T(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay =$$

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $T(x) = Ax$ είναι γραμμική.

* Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$T(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = T(x) + T(y) \checkmark$$

και

$$T(\lambda x) =$$

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $T(x) = Ax$ είναι γραμμική.

* Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$T(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = T(x) + T(y) \checkmark$$

και

$$T(\lambda x) = A(\lambda x) =$$

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $T(x) = Ax$ είναι γραμμική.

* Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$T(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = T(x) + T(y) \checkmark$$

και

$$T(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) =$$

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Τότε η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $T(x) = Ax$ είναι γραμμική.

★ Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$T(x + y) = A(x + y) = Ax + Ay = T(x) + T(y) \checkmark$$

και

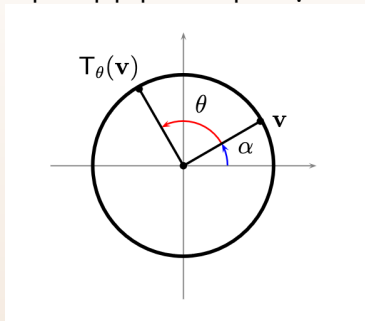
$$T(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda \cdot T(x) \checkmark$$

άρα ικανοποιούνται και οι δύο απαιτήσεις της γραμμικής απεικόνισης.

Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού.

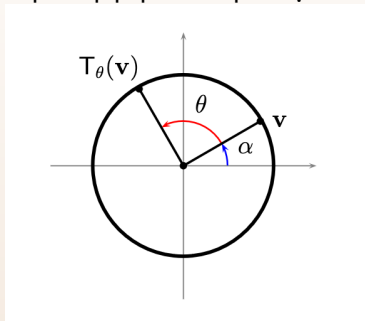
Στροφή διανύσματος.

Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού.



Στροφή διανύσματος.

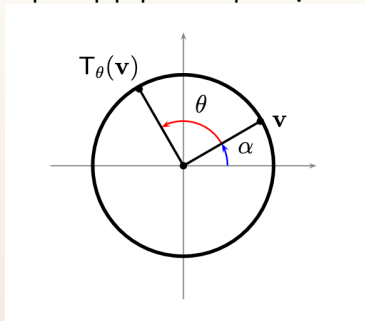
Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού.



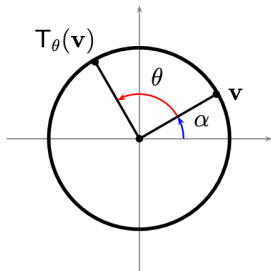
Είναι το T γραμμικός μετασχηματισμός;

Στροφή διανύσματος.

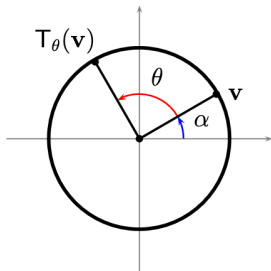
Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού.



Είναι το T γραμμικός μετασχηματισμός;

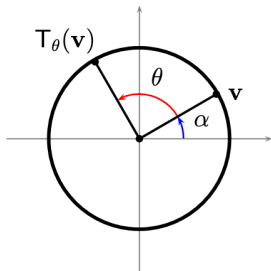


Είναι το T γραμμικός μετασχηματισμός;



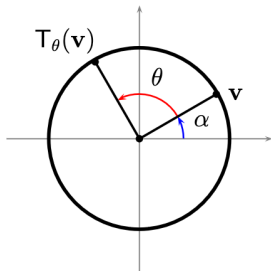
Είναι το T γραμμικός μετασχηματισμός;

$$Av \ v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} =$$



Είναι το T γραμμικός μετασχηματισμός;

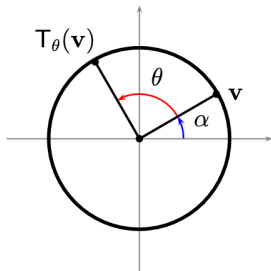
$$Av \ v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |v| \sigma\upsilon\upsilon(\alpha) \\ |v| \eta\mu(\alpha) \end{bmatrix}$$



Είναι το T γραμμικός μετασχηματισμός;

$$\text{Αν } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |v| \sigma\upsilon\upsilon(\alpha) \\ |v| \eta\mu(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$T_\theta(v) = \begin{bmatrix} |v| \cdot \sigma\upsilon\upsilon(\alpha + \theta) \\ |v| \cdot \eta\mu(\alpha + \theta) \end{bmatrix}$$



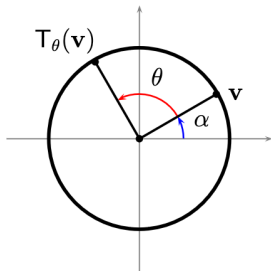
Είναι το T γραμμικός μετασχηματισμός;

$$Av = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |v| \sigma\upsilon\upsilon(\alpha) \\ |v| \eta\mu(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$T_\theta(v) = \begin{bmatrix} |v| \cdot \sigma\upsilon\upsilon(\alpha + \theta) \\ |v| \cdot \eta\mu(\alpha + \theta) \end{bmatrix}$$

Μπορούμε με λίγη τριγωνομετρία να αποδείξουμε ότι $T_\theta(v) = Av$ για

$$A = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\upsilon(\theta) & -\eta\mu(\theta) \\ \eta\mu(\theta) & \sigma\upsilon\upsilon(\theta) \end{bmatrix}$$



Είναι το T γραμμικός μετασχηματισμός;

$$Av = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |v| \sigma\upsilon\upsilon(\alpha) \\ |v| \eta\mu(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$T_\theta(v) = \begin{bmatrix} |v| \cdot \sigma\upsilon\upsilon(\alpha + \theta) \\ |v| \cdot \eta\mu(\alpha + \theta) \end{bmatrix}$$

Μπορούμε με λίγη τριγωνομετρία να αποδείξουμε ότι $T_\theta(v) = Av$ για

$$A = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\upsilon(\theta) & -\eta\mu(\theta) \\ \eta\mu(\theta) & \sigma\upsilon\upsilon(\theta) \end{bmatrix}$$

Κάθε γραμμική απεικόνιση είναι ένας πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ώστε $T(x) = Ax$.

Κάθε γραμμική απεικόνιση είναι ένας πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ώστε $T(x) = Ax$.

Θυμάστε τον ακόλουθο τύπου είχαμε δείξει;

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = x_1 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_3 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Κάθε γραμμική απεικόνιση είναι ένας πολλαπλασιασμός πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ώστε $T(x) = Ax$.

Θυμάστε τον ακόλουθο τύπου είχαμε δείξει;

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) &= x_1 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_2 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + x_3 \cdot T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \left[T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε
πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ώστε $T(x) = Ax$.

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε
πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ώστε $T(x) = Ax$.

Απόδειξη:

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε
πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ώστε $T(x) = Ax$.

Απόδειξη: Έστω $e_i \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα που έχει 1 στην i -οστή του θέση και 0 οπουδήποτε αλλού.

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε
πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ώστε $T(x) = Ax$.

Απόδειξη: Έστω $e_i \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα που έχει 1 στην i -οστή του θέση και 0 οπουδήποτε αλλού. Τότε

$$T(x) = T(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n) =$$

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε
πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ώστε $T(x) = Ax$.

Απόδειξη: Έστω $e_i \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα που έχει 1 στην i -οστή του θέση και 0 οπουδήποτε αλλού. Τότε

$$T(x) = T(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1T(e_1) + \dots + x_nT(e_n).$$

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε
πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ώστε $T(x) = Ax$.

Απόδειξη: Έστω $e_i \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα που έχει 1 στην i -οστή του θέση και 0 οπουδήποτε αλλού. Τότε

$$T(x) = T(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1T(e_1) + \dots + x_nT(e_n).$$

Τι είναι το $x_1T(e_1) + \dots + x_nT(e_n)$;

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε
πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ώστε $T(x) = Ax$.

Απόδειξη: Έστω $e_i \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα που έχει 1 στην i -οστή του θέση και 0 οπουδήποτε αλλού. Τότε

$$T(x) = T(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1T(e_1) + \dots + x_nT(e_n).$$

Τι είναι το $x_1T(e_1) + \dots + x_nT(e_n)$;

Είναι γραμμικός συνδυασμός n διανυσμάτων, των $T(e_1), \dots, T(e_n) \in \mathbb{R}^m$.

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ώστε $T(x) = Ax$.

Απόδειξη: Έστω $e_i \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα που έχει 1 στην i -οστή του θέση και 0 οπουδήποτε αλλού. Τότε

$$T(x) = T(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1T(e_1) + \dots + x_nT(e_n).$$

Τι είναι το $x_1T(e_1) + \dots + x_nT(e_n)$;

Είναι γραμμικός συνδυασμός n διανυσμάτων, των

$T(e_1), \dots, T(e_n) \in \mathbb{R}^m$. Άρα είναι ο πολλαπλασιασμός του πίνακα που έχει στήλες τα $T(e_1), \dots, T(e_n)$ με το διάνυσμα x .

Κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί σε
πολλαπλασιασμό πίνακα με διάνυσμα.

Θεώρημα

Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχει πίνακας $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ώστε $T(x) = Ax$.

Απόδειξη: Έστω $e_i \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα που έχει 1 στην i -οστή του θέση και 0 οπουδήποτε αλλού. Τότε

$$T(x) = T(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1T(e_1) + \dots + x_nT(e_n).$$

Τι είναι το $x_1T(e_1) + \dots + x_nT(e_n)$;

Είναι γραμμικός συνδυασμός n διανυσμάτων, των

$T(e_1), \dots, T(e_n) \in \mathbb{R}^m$. Άρα είναι ο πολλαπλασιασμός του πίνακα που έχει στήλες τα $T(e_1), \dots, T(e_n)$ με το διάνυσμα x . Άρα ο A στην περίπτωση μας είναι ο πίνακας με στήλες τα $T(e_1), \dots, T(e_n)$. ✓

Αν για μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$ και να φτιάξουμε τον πίνακα A με στήλες αυτά τα διανύσματα. Τότε έχουμε έναν τύπο για την T , ο οποίος είναι $T(x) = Ax$.

Αν για μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ μπορούμε να υπολογίσουμε τα $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$ και να φτιάξουμε τον πίνακα A με στήλες αυτά τα διανύσματα. Τότε έχουμε έναν τύπο για την T , ο οποίος είναι $T(x) = Ax$.

Πως μπορούμε να λύσουμε το παράδειγμα στροφής με αυτή την παρατήρηση;

Στροφή διανύσματος (ξανά).

Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού.

Στροφή διανύσματος (ξανά).

Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού. Που στέλνει η T_θ τα διανύσματα e_1 και e_2 , δηλαδή ποια είναι τα $T_\theta(e_1), T_\theta(e_2)$;

Στροφή διανύσματος (ξανά).

Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού. Που στέλνει η T_θ τα διανύσματα e_1 και e_2 , δηλαδή ποια είναι τα $T_\theta(e_1), T_\theta(e_2)$;

$$T_\theta \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\upsilon(\theta) \\ \eta\mu(\theta) \end{bmatrix},$$

Στροφή διανύσματος (ξανά).

Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού. Που στέλνει η T_θ τα διανύσματα e_1 και e_2 , δηλαδή ποια είναι τα $T_\theta(e_1), T_\theta(e_2)$;

$$T_\theta \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\upsilon(\theta) \\ \eta\mu(\theta) \end{bmatrix}, T_\theta \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\eta\mu(\theta) \\ \sigma\upsilon\upsilon(\theta) \end{bmatrix}$$

Στροφή διανύσματος (ξανά).

Έστω η απεικόνιση $T_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία στρίβει ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^2$ κατά γωνία θ αντίθετα με τη φορά του ρολογιού. Που στέλνει η T_θ τα διανύσματα e_1 και e_2 , δηλαδή ποια είναι τα $T_\theta(e_1), T_\theta(e_2)$;

$$T_\theta \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\upsilon(\theta) \\ \eta\mu(\theta) \end{bmatrix}, T_\theta \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\eta\mu(\theta) \\ \sigma\upsilon\upsilon(\theta) \end{bmatrix}$$

Άρα $T_\theta(x) = Ax$ με

$$A = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\upsilon(\theta) & -\eta\mu(\theta) \\ \eta\mu(\theta) & \sigma\upsilon\upsilon(\theta) \end{bmatrix}$$

★ Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι 1 – 1 (μονομορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει το πολύ ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

Γραμμικές απεικονίσεις και ιδιότητες.

★ Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι 1 – 1 (μονομορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει το πολύ ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

- Έστω $T(x) = Ax$. Τότε πρέπει $Ax = Ay$ να δίνει $x = y$,

Γραμμικές απεικονίσεις και ιδιότητες.

★ Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι 1 – 1 (μονομορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει το πολύ ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

- Έστω $T(x) = Ax$. Τότε πρέπει $Ax = Ay$ να δίνει $x = y$, άρα αρκεί $A(\underbrace{x - y}_z) = 0$ να έχει ως μοναδική λύση το μηδενικό διάνυσμα.

Γραμμικές απεικονίσεις και ιδιότητες.

* Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι 1 – 1 (μονομορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει το πολύ ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

- Έστω $T(x) = Ax$. Τότε πρέπει $Ax = Ay$ να δίνει $x = y$, άρα αρκεί $A(\underbrace{x - y}_z) = 0$ να έχει ως μοναδική λύση το μηδενι-

κό διάνυσμα. Αυτό συμβαίνει όταν δεν υπάρχει καμία ελεύθερη μεταβλητή.

Γραμμικές απεικονίσεις και ιδιότητες.

* Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι 1 – 1 (μονομορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει το πολύ ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

- Έστω $T(x) = Ax$. Τότε πρέπει $Ax = Ay$ να δίνει $x = y$, άρα αρκεί $A(\underbrace{x - y}_z) = 0$ να έχει ως μοναδική λύση το μηδενικό διάνυσμα. Αυτό συμβαίνει όταν δεν υπάρχει καμία ελεύθερη μεταβλητή.

* Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι επί (επιμορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

★ Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι 1 – 1 (μονομορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει το πολύ ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

- Έστω $T(x) = Ax$. Τότε πρέπει $Ax = Ay$ να δίνει $x = y$, άρα αρκεί $A(\underbrace{x - y}_z) = 0$ να έχει ως μοναδική λύση το μηδενικό διάνυσμα. Αυτό συμβαίνει όταν δεν υπάρχει καμία ελεύθερη μεταβλητή.

★ Μια γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι επί (επιμορφισμός) αν για κάθε $b \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(x) = b$.

- Έστω $T(x) = Ax$. Τότε πρέπει η εξίσωση $Ax = b$ να έχει πάντα λύση, το οποίο συμβαίνει μόνο όταν ο A έχει m βασικές μεταβλητές.

Τι μάθαμε και τι πρέπει να ξέρουμε.

- 1 Τον ορισμό της γραμμική απεικόνισης.
- 2 Ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό πίνακα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ με διάνυσμα.
- 3 Ότι μπορούμε να βρούμε αυτόν τον πίνακα αυτόν απλά αποτιμώντας την T στα διανύσματα e_1, e_2, \dots, e_n και φτιάχνοντας τον πίνακα με στήλες τα $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$.

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!