# Γραμμική Άλγεβρα

## Ένατη Διαλεξη

Βασίλειος Νάκος

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

# Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

## Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Όταν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση,

# Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Όταν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση,την $x = A^{-1}b$.

# Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Όταν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση,την $x = A^{-1}b$.
- Ο $A^{-1}$ υπάρχει αν και μόνο αν οι στήλες του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

# Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Όταν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση,την $x = A^{-1}b$.
- Ο $A^{-1}$ υπάρχει αν και μόνο αν οι στήλες του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Ο $A^{-1}$ υπάρχει αν και μόν αν οι γραμμές του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

# Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Όταν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση,την $x = A^{-1}b$.
- Ο $A^{-1}$ υπάρχει αν και μόνο αν οι στήλες του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Ο $A^{-1}$ υπάρχει αν και μόν αν οι γραμμές του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Γραμμές του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες $\Leftrightarrow$ στήλες του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

# Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Όταν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση,την $x = A^{-1}b$.
- Ο $A^{-1}$ υπάρχει αν και μόνο αν οι στήλες του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Ο $A^{-1}$ υπάρχει αν και μόν αν οι γραμμές του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Γραμμές του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες $\Leftrightarrow$ στήλες του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Ο $A$ είναι ο αντίστροφος του $A$.

# Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Όταν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση,την $x = A^{-1}b$.
- Ο $A^{-1}$ υπάρχει αν και μόνο αν οι στήλες του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Ο $A^{-1}$ υπάρχει αν και μόν αν οι γραμμές του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Γραμμές του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες $\Leftrightarrow$ στήλες του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Ο $A$ είναι ο αντίστροφος του $A$.
- Τα ίδια ισχύουν για τον $A^{-1}$.

# Υπενθυμίσεις πάνω στον αντίστροφο.

Είπαμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ λέγεται αντιστρέψιμος όταν υπάρχει $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

- Όταν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος, το σύστημα $Ax = b$ έχει μοναδική λύση,την $x = A^{-1}b$.
- Ο $A^{-1}$ υπάρχει αν και μόνο αν οι στήλες του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Ο $A^{-1}$ υπάρχει αν και μόν αν οι γραμμές του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Γραμμές του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες $\Leftrightarrow$ στήλες του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Ο $A$ είναι ο αντίστροφος του $A$.
- Τα ίδια ισχύουν για τον $A^{-1}$.

# Ένα παράδειγμα.

Αν $(A+I)(B+I)=I$ τότε και $AB=BA$.

# Ένα παράδειγμα.

Αν $(A+I)(B+I)=I$ τότε και $AB=BA$.

Έχουμε $(A+I)(B+I)=I \Rightarrow AB+A+B=0 \quad (1)$.

# Ένα παράδειγμα.

Αν $(A+I)(B+I)=I$ τότε και $AB=BA$.

Έχουμε $(A+I)(B+I)=I \Rightarrow AB+A+B=0 \quad (1)$.

Επίσης, $B+I$ αντίστροφος του $A+I$ άρα

# Ένα παράδειγμα.

Αν $(A+I)(B+I)=I$ τότε και $AB=BA$.

Έχουμε $(A+I)(B+I)=I \Rightarrow AB+A+B=0 \quad (1)$.

Επίσης, $B+I$ αντίστροφος του $A+I$ άρα

$$(B+I)(A+I)=I \Rightarrow BA+B+A=0 \qquad (2)$$

# Ένα παράδειγμα.

Αν $(A+I)(B+I)=I$ τότε και $AB=BA$.

Έχουμε $(A+I)(B+I)=I \Rightarrow AB+A+B=0 \quad (1)$.

Επίσης, $B+I$ αντίστροφος του $A+I$ άρα

$$(B+I)(A+I)=I \Rightarrow BA+B+A=0 \qquad (2)$$

Αφαιρώντας (2) από (1) παίρνουμε

$$AB-BA=0 \Rightarrow AB=BA$$

# Ορίζουσα.

Έστω το σύστημα $Ax = b$ με

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

# Ορίζουσα.

Έστω το σύστημα $Ax = b$ με

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Κάνοντας απαλοιφή Gauss μπορούμε να βρούμε ότι

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

# Ορίζουσα.

Έστω το σύστημα $Ax = b$ με

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Κάνοντας απαλοιφή Gauss μπορούμε να βρούμε ότι

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

όταν $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

# Ορίζουσα.

Έστω το σύστημα $Ax = b$ με

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Κάνοντας απαλοιφή Gauss μπορούμε να βρούμε ότι

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

όταν $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

⋆ Ορίζουμε την ορίζουσα το $A$ ως $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

# Γεωμετρική Ερμηνεία Ορίζουσας.

Η ορίζουσα $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ του

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ισούται σε **απόλυτη τιμή** με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα που είναι στήλες του πίνακα,

# Γεωμετρική Ερμηνεία Ορίζουσας.

Η ορίζουσα $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ του

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ισούται σε **απόλυτη τιμή** με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα που είναι στήλες του πίνακα, δηλαδή τα

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

# Γεωμετρική Ερμηνεία Ορίζουσας.

Η ορίζουσα $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ του

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ισούται σε **απόλυτη τιμή** με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα που είναι στήλες του πίνακα, δηλαδή τα

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

αλλά και με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα που είναι γραμμές του πίνακα!

# Γεωμετρική Ερμηνεία Ορίζουσας.

Η ορίζουσα $det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ του

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ισούται σε **απόλυτη τιμή** με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα που είναι στήλες του πίνακα, δηλαδή τα

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

αλλά και με το εμδαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα που είναι γραμμές του πίνακα!

# Ορίζουσα και αντιστρεψιμότητα.

Αν ένα $2 \times 2$ σύστημα δεν έχει μοναδική λύση

$$\iff$$

# Ορίζουσα και αντιστρεψιμότητα.

Αν ένα $2 \times 2$ σύστημα δεν έχει μοναδική λύση

$$\Longleftrightarrow$$

πίνακας συντελεστών $A$ **δεν** είναι αντιστρέψιμος

# Ορίζουσα και αντιστρεψιμότητα.

Αν ένα $2 \times 2$ σύστημα δεν έχει μοναδική λύση

$$\Longleftrightarrow$$

πίνακας συντελεστών $A$ **δεν** είναι αντιστρέψιμος

$$\Longleftrightarrow$$

στήλες (και γραμμές) γραμμικώς εξαρτημένες

# Ορίζουσα και αντιστρεψιμότητα.

Αν ένα $2 \times 2$ σύστημα δεν έχει μοναδική λύση

$$\Longleftrightarrow$$

πίνακας συντελεστών $A$ **δεν** είναι αντιστρέψιμος

$$\Longleftrightarrow$$

στήλες (και γραμμές) γραμμικώς εξαρτημένες

$$\Longleftrightarrow$$

οι δύο στήλες (αντίστοιχα γραμμές) αποτελούν συγγραμικά διανύσματα

# Ορίζουσα και αντιστρεψιμότητα.

Αν ένα $2 \times 2$ σύστημα δεν έχει μοναδική λύση

$\Longleftrightarrow$

πίνακας συντελεστών $A$ **δεν** είναι αντιστρέψιμος

$\Longleftrightarrow$

στήλες (και γραμμές) γραμμικώς εξαρτημένες

$\Longleftrightarrow$

οι δύο στήλες (αντίστοιχα γραμμές) αποτελούν συγγραμικά διανύσματα

$\Longleftrightarrow$

# Ορίζουσα και αντιστρεψιμότητα.

Αν ένα $2 \times 2$ σύστημα δεν έχει μοναδική λύση

$$\Longleftrightarrow$$

πίνακας συντελεστών $A$ **δεν** είναι αντιστρέψιμος

$$\Longleftrightarrow$$

στήλες (και γραμμές) γραμμικώς εξαρτημένες

$$\Longleftrightarrow$$

οι δύο στήλες (αντίστοιχα γραμμές) αποτελούν συγγραμικά διανύσματα

$$\Longleftrightarrow$$

το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν είναι $0$

# Ορίζουσα και αντιστρεψιμότητα.

Αν ένα $2 \times 2$ σύστημα δεν έχει μοναδική λύση

$$\Longleftrightarrow$$

πίνακας συντελεστών $A$ **δεν** είναι αντιστρέψιμος

$$\Longleftrightarrow$$

στήλες (και γραμμές) γραμμικώς εξαρτημένες

$$\Longleftrightarrow$$

οι δύο στήλες (αντίστοιχα γραμμές) αποτελούν συγγραμικά διανύσματα

$$\Longleftrightarrow$$

το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν είναι $0$

$$\Longleftrightarrow$$

$$det(A) = 0.$$

# Ορίζουσα και αντιστρεψιμότητα.

Αν ένα $2 \times 2$ σύστημα δεν έχει μοναδική λύση

$$\Longleftrightarrow$$

πίνακας συντελεστών $A$ **δεν** είναι αντιστρέψιμος

$$\Longleftrightarrow$$

στήλες (και γραμμές) γραμμικώς εξαρτημένες

$$\Longleftrightarrow$$

οι δύο στήλες (αντίστοιχα γραμμές) αποτελούν συγγραμικά διανύσματα

$$\Longleftrightarrow$$

το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν είναι $0$

$$\Longleftrightarrow$$

$$det(A) = 0.$$

# Ορίζοντας την ορίζουσα ενός $3 \times 3$ πίνακα.

Για $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ορίζουμε ως $A_{jk}$ τον $2 \times 2$ πίνακα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την $j$-οστή γραμμή και την $k$-οστή στήλη.

# Ορίζοντας την ορίζουσα ενός $3 \times 3$ πίνακα.

Για $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ ορίζουμε ως $A_{jk}$ τον $2 \times 2$ πίνακα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την $j$-οστή γραμμή και την $k$-οστή στήλη.

Ποιος είναι ο $A_{3,1}$ για $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$;

# Ορίζοντας την ορίζουσα ενός $3 \times 3$ πίνακα.

Για $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ορίζουμε ως $A_{jk}$ τον $2 \times 2$ πίνακα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την $j$-οστή γραμμή και την $k$-οστή στήλη.

$$\text{Ποιος είναι ο } A_{3,1} \text{ για } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}; \Rightarrow A_{3,1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

# Ορίζοντας την ορίζουσα ενός $3 \times 3$ πίνακα.

Για $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ορίζουμε ως $A_{jk}$ τον $2 \times 2$ πίνακα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την $j$-οστή γραμμή και την $k$-οστή στήλη.

Ποιος είναι ο $A_{3,1}$ για $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$; $\Rightarrow A_{3,1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Ποιος είναι ο $A_{2,2}$ για $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$;

# Ορίζοντας την ορίζουσα ενός $3 \times 3$ πίνακα.

Για $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ορίζουμε ως $A_{jk}$ τον $2 \times 2$ πίνακα που προκύπτει αν αφαιρέσουμε την $j$-οστή γραμμή και την $k$-οστή στήλη.

Ποιος είναι ο $A_{3,1}$ για $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$; $\Rightarrow A_{3,1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Ποιος είναι ο $A_{2,2}$ για $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$; $\Rightarrow A_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

# Ορισμός $3 \times 3$ ορίζουσας.

Για έναν $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ η ορίζουσα του $A$ ορίζεται αναδρομικά ως

# Ορισμός $3 \times 3$ ορίζουσας.

Για έναν $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ η ορίζουσα του $A$ ορίζεται αναδρομικά ως

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

# Ορισμός $3 \times 3$ ορίζουσας.

Για έναν $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ η ορίζουσα του $A$ ορίζεται αναδρομικά ως

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

Προσοχή ότι οι $det(A_{11}), det(A_{12}), det(A_{13})$ είναι ορίζουσες $2 \times 2$ πινάκων, τις οποίες ξέρω να υπολογίζω!

# Ορισμός $3 \times 3$ ορίζουσας.

Για έναν $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ η ορίζουσα του $A$ ορίζεται αναδρομικά ως

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

Προσοχή ότι οι $det(A_{11}), det(A_{12}), det(A_{13})$ είναι ορίζουσες $2 \times 2$ πινάκων, τις οποίες ξέρω να υπολογίζω!

Η απόλυτη τιμή της ισούται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου στον $\mathbb{R}^3$ τον οποίο δημιουργούν τα διανύσματα που είναι στήλες του $A$.

# Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

# Παράδειμα.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\star \; det(A_{11}) = det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

# Παράδειμα.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\star \; det(A_{11}) = det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot 6 - 0 \cdot 5 = 18$$

# Παράδειγμα.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\star \; det(A_{11}) = det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot 6 - 0 \cdot 5 = 18$$

$$\star \; det(A_{12}) = det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

# Παράδειμα.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\star \; det(A_{11}) = det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot 6 - 0 \cdot 5 = 18$$

$$\star \; det(A_{12}) = det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 = 7$$

# Παράδειμα.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\star\ det(A_{11}) = det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot 6 - 0 \cdot 5 = 18$$

$$\star\ det(A_{12}) = det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 = 7$$

$$\star\ det(A_{13}) = det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Παράδειμα.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\star\ det(A_{11}) = det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot 6 - 0 \cdot 5 = 18$$

$$\star\ det(A_{12}) = det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 5 = 7$$

$$\star\ det(A_{13}) = det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 = -3$$

# Συνέχεια Παραδείγματος.

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

# Συνέχεια Παραδείγματος.

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

# Συνέχεια Παραδείγματος.

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Άρα $det(A) = 4 \cdot 18 - (-2) \cdot 7 + 3 \cdot (-3) = 77$

# Η γενικότερη ιδιότητα υπολογισμού της ορίζουσας.

**Ορισμός**: Το αλγεβρικό συμπλήρωματα που αντιστοίχει στο στοιχείο $(i, j)$ είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j}det(A_{ij})$.

# Η γενικότερη ιδιότητα υπολογισμού της ορίζουσας.

**Ορισμός**: Το αλγεβρικό συμπλήρωματα που αντιστοίχει στο στοιχείο $(i, j)$ είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j}det(A_{ij})$.

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός $3 \times 3$ πίνακα ισούται, για **όποιο** $i$ από $1$ ως $3$ και να πάρω, με τον αριθμό

# Η γενικότερη ιδιότητα υπολογισμού της ορίζουσας.

**Ορισμός**: Το αλγεβρικό συμπλήρωματα που αντιστοίχει στο στοιχείο $(i, j)$ είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j}det(A_{ij})$.

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός $3 \times 3$ πίνακα ισούται, για **όποιο** $i$ από $1$ ως $3$ και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{i1}(-1)^{i+1}det(A_{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2}det(A_{i2}) + a_{i3}(-1)^{i+3}det(A_{i3})$$

# Η γενικότερη ιδιότητα υπολογισμού της ορίζουσας.

**Ορισμός**: Το αλγεβρικό συμπλήρωματα που αντιστοίχει στο στοιχείο $(i, j)$ είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j} det(A_{ij})$.

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός $3 \times 3$ πίνακα ισούται, για **όποιο** $i$ από $1$ ως $3$ και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{i1}(-1)^{i+1} det(A_{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2} det(A_{i2}) + a_{i3}(-1)^{i+3} det(A_{i3})$$

1. Ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή ($i = 1$):

# Η γενικότερη ιδιότητα υπολογισμού της ορίζουσας.

**Ορισμός**: Το αλγεβρικό συμπλήρωματα που αντιστοίχει στο στοιχείο $(i, j)$ είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j}det(A_{ij})$.

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός $3 \times 3$ πίνακα ισούται, για **όποιο** $i$ από $1$ ως $3$ και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{i1}(-1)^{i+1}det(A_{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2}det(A_{i2}) + a_{i3}(-1)^{i+3}det(A_{i3})$$

1. Ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή ($i = 1$):

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

## Η γενικότερη ιδιότητα υπολογισμού της ορίζουσας.

**Ορισμός:** Το αλγεβρικό συμπλήρωματα που αντιστοίχει στο στοιχείο $(i, j)$ είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j} det(A_{ij})$.

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός $3 \times 3$ πίνακα ισούται, για **όποιο** $i$ από $1$ ως $3$ και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{i1}(-1)^{i+1} det(A_{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2} det(A_{i2}) + a_{i3}(-1)^{i+3} det(A_{i3})$$

1. Ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή ($i = 1$):

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

2. Ανάπτυγμα ως προς τη δεύτερη γραμμή ($i = 2$):

# Η γενικότερη ιδιότητα υπολογισμού της ορίζουσας.

**Ορισμός**: Το αλγεβρικό συμπλήρωματα που αντιστοίχει στο στοιχείο $(i, j)$ είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j} det(A_{ij})$.

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός $3 \times 3$ πίνακα ισούται, για **όποιο** $i$ από $1$ ως $3$ και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{i1}(-1)^{i+1} det(A_{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2} det(A_{i2}) + a_{i3}(-1)^{i+3} det(A_{i3})$$

1. Ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή ($i = 1$):

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

2. Ανάπτυγμα ως προς τη δεύτερη γραμμή ($i = 2$):

$$det(A) = -a_{21} \cdot det(A_{21}) + a_{22} \cdot det(A_{22}) - a_{23} \cdot det(A_{23}).$$

# Η γενικότερη ιδιότητα υπολογισμού της ορίζουσας.

**Ορισμός**: Το αλγεβρικό συμπλήρωματα που αντιστοίχει στο στοιχείο $(i,j)$ είναι ο αριθμός $(-1)^{i+j}det(A_{ij})$.

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός $3 \times 3$ πίνακα ισούται, για **όποιο** $i$ από $1$ ως $3$ και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{i1}(-1)^{i+1}det(A_{i1}) + a_{i2}(-1)^{i+2}det(A_{i2}) + a_{i3}(-1)^{i+3}det(A_{i3})$$

1. Ανάπτυγμα ως προς την πρώτη γραμμή ($i = 1$):

$$det(A) = a_{11} \cdot det(A_{11}) - a_{12} \cdot det(A_{12}) + a_{13} \cdot det(A_{13}).$$

2. Ανάπτυγμα ως προς τη δεύτερη γραμμή ($i = 2$):

$$det(A) = -a_{21} \cdot det(A_{21}) + a_{22} \cdot det(A_{22}) - a_{23} \cdot det(A_{23}).$$

# Πάλι το ίδιο παράδειγμα με πριν.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

# Πάλι το ίδιο παράδειγμα με πριν.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Θα αναπτύξουμε ως προς την τρίτη γραμμή. Έχουμε

$$\star \; det(A_{31}) = det \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -19$$

# Πάλι το ίδιο παράδειγμα με πριν.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Θα αναπτύξουμε ως προς την τρίτη γραμμή. Έχουμε

$$\star\ det(A_{31}) = det \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -19$$

$$\star\ det(A_{33}) = det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 16$$

# Πάλι το ίδιο παράδειγμα με πριν.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Θα αναπτύξουμε ως προς την τρίτη γραμμή. Έχουμε

$$\star \; det(A_{31}) = det \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -19$$

$$\star \; det(A_{33}) = det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 16$$

$$det(A) = \textcolor{red}{1} \cdot (-1)^{3+1}(-19) + \textcolor{red}{0} \cdot (-1)^{3+2} det(A_{32}) + 6 \cdot (-1)^{3+3} 16 =$$

# Πάλι το ίδιο παράδειγμα με πριν.

Να υπολογιστεί η ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Θα αναπτύξουμε ως προς την τρίτη γραμμή. Έχουμε

$$\star \; det(A_{31}) = det \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -19$$

$$\star \; det(A_{33}) = det \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 16$$

$$det(A) = 1 \cdot (-1)^{3+1}(-19) + 0 \cdot (-1)^{3+2} det(A_{32}) + 6 \cdot (-1)^{3+3} 16 = 77$$

# Αλλά μπορούμε να αναπτύξουμε και ως προς κάποια στήλη!

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός $3 \times 3$ πίνακα ισούται, για όποιο $j$ από $1$ ως $3$ και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{1j}(-1)^{j+1}det(A_{1j}) + a_{2j}(-1)^{j+2}det(A_{2j}) + a_{3j}(-1)^{j+3}det(A_{j3})$$

# Αλλά μπορούμε να αναπτύξουμε και ως προς κάποια στήλη!

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός $3 \times 3$ πίνακα ισούται, για όποιο $j$ από $1$ ως $3$ και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{1j}(-1)^{j+1}det(A_{1j}) + a_{2j}(-1)^{j+2}det(A_{2j}) + a_{3j}(-1)^{j+3}det(A_{j3})$$

Με άλλα λόγια, μπορώ να πάρω τον ανάστροφο του $A$ και να υπολογίσω την ορίζουσα του $A^T$ αναπτύσσοντας ως προς κάποια γραμμή:

# Αλλά μπορούμε να αναπτύξουμε και ως προς κάποια στήλη!

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός $3 \times 3$ πίνακα ισούται, για όποιο $j$ από $1$ ως $3$ και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{1j}(-1)^{j+1}det(A_{1j}) + a_{2j}(-1)^{j+2}det(A_{2j}) + a_{3j}(-1)^{j+3}det(A_{j3})$$

Με άλλα λόγια, μπορώ να πάρω τον ανάστροφο του $A$ και να υπολογίσω την ορίζουσα του $A^T$ αναπτύσσοντας ως προς κάποια γραμμή: ο $A$ και ο $A^T$ έχουν την ίδια ορίζουσα, $det(A) = det(A^T)$.

# Αλλά μπορούμε να αναπτύξουμε και ως προς κάποια στήλη!

Θέωρημα: Η ορίζουσα ενός $3 \times 3$ πίνακα ισούται, για όποιο $j$ από $1$ ως $3$ και να πάρω, με τον αριθμό

$$a_{1j}(-1)^{j+1}det(A_{1j}) + a_{2j}(-1)^{j+2}det(A_{2j}) + a_{3j}(-1)^{j+3}det(A_{j3})$$

Με άλλα λόγια, μπορώ να πάρω τον ανάστροφο του $A$ και να υπολογίσω την ορίζουσα του $A^T$ αναπτύσσοντας ως προς κάποια γραμμή: ο $A$ και ο $A^T$ έχουν την ίδια ορίζουσα, $det(A) = det(A^T)$.

Άρα έχουμε $6$ τρόπους για να υπολογίσουμε το $det(A)$ : 3 αναπτύγματα για τις γραμμές και 3 για τις στήλες. Όλα δίνουν τον ίδιο αριθμό!

# Μοτίβο Προσήμων σε έναν $3 \times 3$ Πίνακα

Τα πρόσημα στο ανάπτυγμα της ορίζουσας σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη πάνε εναλλάξ.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

# Μοτίβο Προσήμων σε έναν $3 \times 3$ Πίνακα

Τα πρόσημα στο ανάπτυγμα της ορίζουσας σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη πάνε εναλλάξ.

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Παραδείγματος χάρη, αναπτύσσοντας ως προς τη δεύτερη στήλη

$$det(A) = -a_{12} \cdot det(A_1 2) + a_{22} det(A_{22}) - a_{32} det(A_{32})$$

# Ισοδυναμίες.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα (και ισχύουν και για $n \times n$ πίνακες μόλις ορίσουμε την ορίζουσα τους).

# Ισοδυναμίες.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα (και ισχύουν και για $n \times n$ πίνακες μόλις ορίσουμε την ορίζουσα τους).

1. Το σύστημα $Ax = b$ έχει πάντα μοναδική λύση.
2. Ο $A$ είναι αντιστρέψιμος.
3. $det(A) \neq 0$.

# Ισοδυναμίες.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα (και ισχύουν και για $n \times n$ πίνακες μόλις ορίσουμε την ορίζουσα τους).

1. Το σύστημα $Ax = b$ έχει πάντα μοναδική λύση.
2. Ο $A$ είναι αντιστρέψιμος.
3. $det(A) \neq 0$.
4. Οι γραμμές του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
5. Οι στήλες του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

# Ισοδυναμίες.

Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα (και ισχύουν και για $n \times n$ πίνακες μόλις ορίσουμε την ορίζουσα τους).

1. Το σύστημα $Ax = b$ έχει πάντα μοναδική λύση.
2. Ο $A$ είναι αντιστρέψιμος.
3. $det(A) \neq 0$.
4. Οι γραμμές του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
5. Οι στήλες του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
6. Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του $A$ είναι τέλεια σκάλα.
7. Ο βαθμός (πλήθος βασικών μεταβλητών) του $A$ είναι $n$.
8. Ο $A$ δεν έχει καμία ελεύθερη μεταβλητή.

# Ένα παράδειγμα: άνω τριγωνικοί πίνακες

Να υπολογισθεί η ορίζουσα του εξής πίνακα που έχει παντού $0$ κάτω από τη διαγώνιο.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

# Ένα παράδειγμα: άνω τριγωνικοί πίνακες

Να υπολογισθεί η ορίζουσα του εξής πίνακα που έχει παντού $0$ κάτω από τη διαγώνιο.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε ως προς την τελευταία γραμμή και έχουμε

$$A = {\color{red} f} \cdot (-1)^{3+3} det(A_{33}) =$$

# Ένα παράδειγμα: άνω τριγωνικοί πίνακες

Να υπολογισθεί η ορίζουσα του εξής πίνακα που έχει παντού $0$ κάτω από τη διαγώνιο.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε ως προς την τελευταία γραμμή και έχουμε

$$A = {\color{red} f} \cdot (-1)^{3+3} det(A_{33}) = \; = f \cdot det\left( \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) =$$

# Ένα παράδειγμα: άνω τριγωνικοί πίνακες

Να υπολογισθεί η ορίζουσα του εξής πίνακα που έχει παντού $0$ κάτω από τη διαγώνιο.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε ως προς την τελευταία γραμμή και έχουμε

$$A = f \cdot (-1)^{3+3} det(A_{33}) = \ = f \cdot det\left( \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) = \ = f \cdot (ad - 0 \cdot b) = a \cdot d \cdot f.$$

# Ένα παράδειγμα: άνω τριγωνικοί πίνακες

Να υπολογισθεί η ορίζουσα του εξής πίνακα που έχει παντού $0$ κάτω από τη διαγώνιο.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε ως προς την τελευταία γραμμή και έχουμε

$$A = f \cdot (-1)^{3+3} det(A_{33}) = \ = f \cdot det\left( \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) = \ = f \cdot (ad - 0 \cdot b) = a \cdot d \cdot f.$$

Άρα, απλά πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία στη διαγώνιο!

# Ένα παράδειγμα: άνω τριγωνικοί πίνακες

Να υπολογισθεί η ορίζουσα του εξής πίνακα που έχει παντού $0$ κάτω από τη διαγώνιο.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε ως προς την τελευταία γραμμή και έχουμε

$$A = f \cdot (-1)^{3+3} det(A_{33}) = \; = f \cdot det\left( \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) = \; = f \cdot (ad - 0 \cdot b) = a \cdot d \cdot f.$$

Άρα, απλά πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία στη διαγώνιο! Όμοια και για κάτω τριγωνικούς.

# Ορίζουσες $n \times n$ πινάκων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και έστω $A_{jk}$ ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν από τον $A$ αφαιρέσουμε την $j$-οστή γραμμή και την $k$-οστή στήλη. Τότε

# Ορίζουσες $n \times n$ πινάκων.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και έστω $A_{jk}$ ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας που προκύπτει αν από τον $A$ αφαιρέσουμε την $j$-οστή γραμμή και την $k$-οστή στήλη. Τότε

$$\begin{aligned} det(A) = \\ a_{i1}(-1)^{i+1}\cdot det(A_{i1}) + \\ a_{i2}(-1)^{i+2}\cdot det(A_{i2}) + \\ \ldots + \\ a_{in}(-1)^{i+n}\cdot det(A_{in}) \end{aligned}$$

# Γενικός τύπος για Ορίζουσες $n \times n$ πινάκων.

Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} det(A_{jk})$.

# Γενικός τύπος για Ορίζουσες $n \times n$ πινάκων.

Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} det(A_{jk})$. Τότε η ορίζουσα $det(A)$ ισούται για οποιοδήποτε $i$ με (ανάπτυγμα κατά $i$-οστή γραμμή):

# Γενικός τύπος για Ορίζουσες $n \times n$ πινάκων.

Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} det(A_{jk})$. Τότε η ορίζουσα $det(A)$ ισούται για οποιοδήποτε $i$ με (ανάπτυγμα κατά $i$-οστή γραμμή):

$$det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

και με (ανάπτυγμα κατά $i$-οστή στήλη):

$$det(A) = a_{1i} \cdot C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \ldots + a_{ni}C_{ni}$$

# Γενικός τύπος για Ορίζουσες $n \times n$ πινάκων.

Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} det(A_{jk})$. Τότε η ορίζουσα $det(A)$ ισούται για οποιοδήποτε $i$ με (ανάπτυγμα κατά $i$-οστή γραμμή):

$$det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \ldots + a_{in} C_{in}$$

και με (ανάπτυγμα κατά $i$-οστή στήλη):

# Γενικός τύπος για Ορίζουσες $n \times n$ πινάκων.

Έστω $C_{jk} = (-1)^{j+k} det(A_{jk})$. Τότε η ορίζουσα $det(A)$ ισούται για οποιοδήποτε $i$ με (ανάπτυγμα κατά $i$-οστή γραμμή):

$$det(A) = a_{i1} \cdot C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

και με (ανάπτυγμα κατά $i$-οστή στήλη):

$$det(A) = a_{1i} \cdot C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \ldots + a_{ni}C_{ni}$$

# Πίνακες με μηδενική γραμμή ή στήλη.

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ που έχει κάποια γραμμή ή κάποια στήλη όλη μηδενικά τι ορίζουσα έχει;

# Πίνακες με μηδενική γραμμή ή στήλη.

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ που έχει κάποια γραμμή ή κάποια στήλη όλη μηδενικά τι ορίζουσα έχει;

$$det(A) = 0.$$

# Πίνακες με μηδενική γραμμή ή στήλη.

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ που έχει κάποια γραμμή ή κάποια στήλη όλη μηδενικά τι ορίζουσα έχει;

$$det(A) = 0.$$

Αναπτύσσοντας ως προς την αντίστοιχη γραμμή (ή στήλη) που είναι όλη μηδενικά, έστω η $i$, παίρνουμε

# Πίνακες με μηδενική γραμμή ή στήλη.

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ που έχει κάποια γραμμή ή κάποια στήλη όλη μηδενικά τι ορίζουσα έχει;

$$det(A) = 0.$$

Αναπτύσσοντας ως προς την αντίστοιχη γραμμή (ή στήλη) που είναι όλη μηδενικά, έστω η $i$, παίρνουμε

$$det(A) = \underbrace{a_{i1}}_{0} \cdot C_{i1} + \underbrace{a_{i2}}_{0} C_{i2} + \ldots + \underbrace{a_{in}}_{0} C_{in} = 0$$

# Ορίζουσες τριγωνικών πινάκων.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

# Ορίζουσες τριγωνικών πινάκων.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε ως προς πρώτη γραμμή άρα

$$det(A) = a_{11} \cdot det\left( \begin{bmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) =$$

# Ορίζουσες τριγωνικών πινάκων.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε ως προς πρώτη γραμμή άρα

$$det(A) = a_{11} \cdot det\left( \begin{bmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) =$$

$$\underbrace{=}_{\text{επαγωγικά}} a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Η Συνέχεια στο επόμενο επεισόδιο!