ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διδάσκοντες: Κώστας Μαριάς & Γιώργος Τζανετόπουλος — *Εξέταση Β' Περιόδου*

1. Χρησιμοποιώντας (μόνον) τις ιδιότητες των οριζουσών υπολογίστε τις ακόλουθες ορίζουσες:

α) $\begin{vmatrix} y+z & x & x^3 \\ z+x & y & y^3 \\ x+y & z & z^3 \end{vmatrix}$ **β)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{vmatrix}$

2. **α)** Έστω A, B $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες. Έστω επίσης ότι ο πίνακας $A+B$ είναι επίσης αντιστρέψιμος. Να δείξετε ότι ο πίνακας $\Gamma = B^{-1} + A^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος και να βρείτε μία έκφραση (τύπο) για τον Γ^{-1} .

β) Αν τα διανύσματα του $\mathcal{F}$ −διανυσματικού χώρου V συνδέονται με τη σχέση: $\lambda v_1 + \mu v_2 + \kappa v_3 = \mathbb{O}$ όπου $\lambda \neq 0$ και $\kappa \neq 0$, να δείξετε ότι $span\{v_1, v_2\} = span\{v_2, v_3\}$.

3. Να λυθεί με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss το σύστημα: $\left\{\begin{matrix} x-2y+kz=1 \\ 2x-y+2z=2 \\ 3x-y+3kz=3 \end{matrix}\right\}$ για τις διάφορες τιμές του $k \in \mathbb{R}$.

4. **α)** Αν $|z-10| = 3|z-2|$, βρεθεί το $|z-1|$.

β) Αν για τον μιγαδικό z ισχύει: $5(z+1)^{2014} + (4+3i)(z-1)^{2014} = 0$, να δείξετε ότι: $\mathcal{R}e(z) = 0$.

5. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $P\ (3,-2,4)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{v} = (2,2,-3)$.

ΘΕΜΑ 1ο:	**α)**	***1,0***
	β)	***1,0***
ΘΕΜΑ 2ο:	**α)**	***1,0***
	β)	***1,0***
ΘΕΜΑ 3ο:		***2,0***
ΘΕΜΑ 4ο:	**α)**	***1,0***
	β)	***1,0***
ΘΕΜΑ 5ο:		***2,0***
ΣΥΝΟΛΟ		***10,0***

Λύσεις Θεμάτων Τελικής Εξέτασης

1. **α)** Προσθέτουμε στην πρώτη στήλη την δεύτερη οπότε:

$$\begin{vmatrix} y+z & x & x^3 \\ z+x & y & y^3 \\ x+y & z & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y+z+x & x & x^3 \\ z+x+y & y & y^3 \\ x+y+z & z & z^3 \end{vmatrix} = (x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} =$$

Στο επόμενο βήμα από την πρώτη και δεύτερη γραμμή αφαιρούμε την Τρίτη παίρνοντας:

$$(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} = (x+y+z)\begin{vmatrix} 0 & x-z & x^3-z^3 \\ 0 & y-z & y^3-z^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x^2+xz+z^2 \\ 0 & 1 & y^2+yz+z^2 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσουμε κατά την πρώτη στήλη και έχουμε:

$$(x+y+z)(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x^2+xz+z^2 \\ 0 & 1 & y^2+yz+z^2 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & x^2+xz+z^2 \\ 1 & y^2+yz+z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+y+z)(x-z)(y-z)[y^2+yz+z^2-(x^2+xz+z^2)] = (x+y+z)(x-z)(y-z)[y^2+yz-x^2-xz]$$

$$= (x+y+z)(x-z)(y-z)[(y-x)(y+x)+z(y-x)] = (x+y+z)(x-z)(y-z)(y-x)(y+x+z)$$

$$= (x+y+z)^2(x-y)(y-z)(z-x).$$

β) Είναι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & 4^4 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^1 & 3^1 & 4^1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} = 24\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2^1-1 & 3^1-1 & 4^1-1 \\ 1 & 2^2-1 & 3^2-1 & 4^2-1 \\ 1 & 2^3-1 & 3^3-1 & 4^3-1 \end{vmatrix}$$

$$= 24\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 8 & 15 \\ 1 & 7 & 26 & 63 \end{vmatrix} = 24\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \\ 7 & 26 & 63 \end{vmatrix} = 24\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3-3\cdot 1 & 8-3\cdot 2 & 15-3\cdot 3 \\ 7-7\cdot 1 & 26-7\cdot 2 & 63-7\cdot 3 \end{vmatrix} = 24\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 12 & 42 \end{vmatrix}$$

$$= 24\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 42 \end{vmatrix} = 24\cdot(2\cdot 42-12\cdot 6) = 24\cdot(84-72) = 24\cdot 12 = 288.$$

2. **α)** Είναι:

$$A^{-1}\cdot(A+B)\cdot B^{-1} = (A^{-1}\cdot A + A^{-1}\cdot B)\cdot B^{-1} = \mathbb{I}\cdot B^{-1} + A^{-1}\cdot B\cdot B^{-1} = B^{-1} + A^{-1}\cdot\mathbb{I} = B^{-1}+A^{-1}.$$

Άρα:

$$|\Gamma| = |B^{-1}+A^{-1}| = |A^{-1}\cdot(A+B)\cdot B^{-1}| = |A^{-1}|\cdot|A+B|\cdot|B^{-1}| = \frac{|A+B|}{|A|\cdot|B|} \Rightarrow |\Gamma| = \frac{|A+B|}{|A|\cdot|B|} \neq 0$$

καθώς οι πίνακες $A, B, A+B$ είναι αντιστρέψιμοι και συνεπώς η ορίζουσά τους είναι μη μηδενική. Τότε όμως είναι και $|\Gamma| \neq 0$ άρα ο $\Gamma = B^{-1} + A^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:

$$(B^{-1}+A^{-1})^{-1} = [A^{-1}\cdot(A+B)\cdot B^{-1}]^{-1} = (B^{-1})^{-1}\cdot(A+B)^{-1}\cdot(A^{-1})^{-1} = B\cdot(A+B)^{-1}\cdot A$$

β) $$\lambda v_1 + \mu v_2 + \kappa v_3 = \mathbb{O} \overset{\lambda\neq 0}{\underset{\kappa\neq 0}{\Longrightarrow}} \begin{cases} v_1 = -\frac{\mu}{\lambda}v_2 - \frac{\kappa}{\lambda}v_3, (1) \\ \\ v_3 = -\frac{\lambda}{\kappa}v_1 - \frac{\mu}{\kappa}v_2, (2) \end{cases}.$$

Έστω $w \in span\{v_1, v_2\} \Longrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{F}: w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \overset{(1)}{\Longrightarrow} w = \alpha_1\left(-\frac{\mu}{\lambda}v_2 - \frac{\kappa}{\lambda}v_3\right) + \alpha_2 v_2 \Longrightarrow$

$$\Rightarrow w = -\alpha_1 \frac{\mu}{\lambda} v_2 + \alpha_2 v_2 - \alpha_1 \frac{\kappa}{\lambda} v_3 \Rightarrow w = \left(-\alpha_1 \frac{\mu}{\lambda} + \alpha_2\right) v_2 - \alpha_1 \frac{\kappa}{\lambda} v_3 \Rightarrow w \in span\{v_1, v_3\}$$

Άρα: $span\{v_1, v_2\} \subseteq span\{v_1, v_3\}$ (3).

Ομοίως έστω $w \in span\{v_1, v_3\} \Rightarrow \exists \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{F}: w = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_3 \overset{(2)}{\Rightarrow} w = \gamma_1 v_2 + \gamma_2 \left(-\frac{\lambda}{\kappa} v_1 - \frac{\mu}{\kappa} v_2\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow w = -\gamma_2 \frac{\lambda}{\kappa} v_1 + \left(\gamma_1 - \gamma_2 \frac{\mu}{\kappa}\right) v_2 \Rightarrow w \in span\{v_1, v_2\}$$

Άρα: $span\{v_1, v_3\} \subseteq span\{v_1, v_2\}$ (4). Από τις (3) και (4) προκύπτει το ζητούμενο.

3. Το δοσμένο σύστημα γίνεται ισοδύναμα σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας την απαλοιφή *Gauss* στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος παίρνουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 3k & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & 3 & 2-2k & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \frac{1}{3}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3}(k-1) & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_3 - 5\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3}(k-1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3}(k-1) & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \frac{3}{10}\Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3}(1-k) & 0 \\ 0 & 0 & (k-1) & 0 \end{array}\right]$$

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το :

$$\left\{\begin{aligned} x - 2y + kz = 1 \\ y - \frac{2}{3}(k-1)z = 0 \\ (k-1)z = 0 \end{aligned}\right\} (\Sigma')$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις βασιζόμενοι στην παράσταση $k-1$ της τελευταίας εξίσωσης:

- $k \neq 1$. Τότε από την τελευταία εξίσωση έχουμε $z = 0$ από τη δεύτερη εξίσωση $y = 0$ και από την πρώτη εξίσωση $x = 1$. Δηλαδή το σύστημα έχει μοναδική λύση την $\boxed{(x, y, z) = (1{,}0{,}0)}$.
- $k = 1$. Τότε το σύστημα (Σ') γίνεται:

$$\left\{\begin{aligned} x - 2y + z = 1 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x + z = 1 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x = 1 - z \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Δηλαδή έχουμε άπειρες λύσεις της μορφής: $\boxed{(x, y, z) = (1 - z, 0, z),\ z \in \mathbb{R}}$.

4. **α)** $|z - 10| = 3|z - 2| \Rightarrow |z - 10|^2 = 9|z - 2|^2 \Rightarrow (z - 10)(\overline{z - 10}) = 9(z - 2)(\overline{z - 2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (z - 10)(\overline{z} - 10) = 9(z - 2)(\overline{z} - 2) \Rightarrow |z|^2 - 10z - 10\overline{z} + 100 = 9(|z|^2 - 2z - 2\overline{z} + 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow 8|z|^2 - 8z - 8\overline{z} - 64 = 0 \Rightarrow |z|^2 - z - \overline{z} - 8 = 0 \Rightarrow z\overline{z} - z - \overline{z} - 8 = 0 \Rightarrow z\overline{z} - z - \overline{z} + 1 = 9$

$\Rightarrow (z - 1)(\overline{z} - 1) = 9 \Rightarrow |z - 1|^2 = 9 \Rightarrow \boxed{|z - 1| = 3}$.

β) $5(z+1)^{2014}+(4+3i)(z-1)^{2014}=0 \Rightarrow 5(z+1)^{2014}=-(4+3i)(z-1)^{2014} \Rightarrow$

$\Rightarrow |5(z+1)^{2014}|=|-(4+3i)(z-1)^{2014}| \Rightarrow 5|z+1|^{2014}=|4+3i||z-1|^{2014} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5|z+1|^{2014}=5|z-1|^{2014} \Rightarrow |z+1|=|z-1| \Rightarrow |z+1|^2=|z-1|^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (z+1)(\overline{z}+1)=(z-1)(\overline{z}-1) \Rightarrow z\overline{z}+z+\overline{z}+1=z\overline{z}-z-\overline{z}+1 \Rightarrow 2z=-2\overline{z} \Rightarrow$

$\Rightarrow z+\overline{z}=0 \Rightarrow 2\mathcal{R}e(z)=0 \Rightarrow \mathcal{R}e(z)=0.$

5. Έστω ότι η ζητούμενη εξίσωση είναι: $Ax+By+Cz+D=0$. Για να διέρχεται το επίπεδο από το σημείο $P\ (3,-2,4)$ θα ισχύει: $\boxed{3A-2B+4C+D=0}$ $(E1)$. Επίσης από τη υπόθεση καθετότητας έχουμε:

$$\boxed{\frac{A}{2}=\frac{B}{2}=\frac{C}{-3}}\ (E2).$$

Λύνοντας το σύστημα των *(E1)* και *(E2)* παίρνουμε: $A=B=\frac{1}{5}D, C=-\frac{3}{10}D$. Δηλαδή η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$\frac{1}{5}Dx+\frac{1}{5}Dy-\frac{3}{10}Dz+D=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}y-\frac{3}{10}z+1\right)D=0 \Rightarrow \boxed{2x+2y-3z+10=0}$$

καθώς η μεταβλητή D μπορεί να πάρει οποιαδήποτε αυθαίρετη τιμή (π.χ. $D=10$).