ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εισηγητής: Γιώργος Τζανετόπουλος *Εξέταση Α' Περιόδου 2023-24*

1. Να λύσετε στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ την εξίσωση:

$$z^2 + (i-2)z = -3 + i$$

2. i) Αποδείξτε ότι για κάθε μιγαδικούς αριθμούς z, w ισχύει ότι: $|1-\bar{z}w|^2 - |z-w|^2 = (1-|z|^2)\cdot(1-|w|^2)$

ii) Αν επιπρόσθετα, $|z| < 1$ και $|w| < 1$, να δείξετε ότι: $\left|\frac{z-w}{1-\bar{z}w}\right| < 1$.

3. i) Υπολογίστε την ορίζουσα: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

ii) Με τη μέθοδο απαλοιφής *Gauss* επιλύστε το σύστημα: $\left\{\begin{array}{rrrrrrrrr} & & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 1 \\ & & & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & & & - & 6x_3 & + & 9x_4 & = & 7 \end{array}\right\}$

4. Δίνεται ο 3×3 πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα.

i. Να δείξετε ότι ο πίνακας A διαγωνιοποιείται.
ii. Βρείτε πίνακα P ώστε ο πίνακας $P^{-1}\cdot A\cdot P$ να είναι διαγώνιος.
iii. Βρείτε το ίχνος και την ορίζουσα του A.
iv. Εξετάστε εάν ο πίνακας A αντιστρέφεται.

ΘΕΜΑ 1ο:		***2.00***
ΘΕΜΑ 2ο:	i)	***1.00***
	ii)	***1.50***
ΘΕΜΑ 3ο:	i)	***1.00***
	ii)	***1.50***
ΘΕΜΑ 4ο:	i)	***1.00***
	ii)	***1.00***
	iii)	***0.50***
	iv)	***0.50***
ΣΥΝΟΛΟ		***10.00***

<u>*Λύσεις Θεμάτων Τελικής Εξέτασης*</u>

Θέμα 1ο

$$z^2+(i-2)z=-3+i \iff z^2-(2-i)z+(3-i)=0\,.$$

Σχηματίζουμε τη διακρίνουσα:

$$\mathcal{D}=(2-i)^2-4\cdot 1\cdot(3-i)=3-4i-12+4i \Rightarrow \mathcal{D}=-9+0i \Rightarrow \mathcal{D}=9(-1+0i)\,.$$

Ο μιγαδικός αριθμός $\mathcal{D}$ βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο αφού $Re(\mathcal{D})<0$ και $Im(\mathcal{D})=0$ οπότε για το πρωτεύων όρισμά του έχουμε ότι: $\cos\theta=-1$ και $\sin\theta=0$ οπότε εύκολα βλέπουμε ότι: $\theta=Arg(\mathcal{D})=\pi$. Άρα η τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού είναι: $\mathcal{D}=9\cdot(\cos\pi+i\ \sin\pi)$. Τότε η τετραγωνική του ρίζα δίνεται ως:

$$\sqrt{\mathcal{D}}=\sqrt{9}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right), k=0,1\,.$$

Για $k=0$ είναι:

$$\sqrt{\mathcal{D}}=3\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{\mathcal{D}}=3\cdot(0+i) \Rightarrow \sqrt{\mathcal{D}}=3i\,.$$

Ενώ για $k=1$ είναι:

$$\sqrt{\mathcal{D}}=3\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{\mathcal{D}}=3\cdot(0-i) \Rightarrow \sqrt{\mathcal{D}}=-3i\,.$$

Συνεπώς οι ρίζες της δοσμένης δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι:

$$\zeta_1=\frac{2-i+3i}{2} \Rightarrow \zeta_1=1+i$$

και

$$\zeta_2=\frac{2-i-3i}{2} \Rightarrow \zeta_2=1-2i\,.$$

Θέμα 2ο

i) $|1-\bar{z}w|^2-|z-w|^2=(1-\bar{z}w)\cdot\overline{(1-\bar{z}w)}-(z-w)\cdot\overline{(z-w)}=(1-\bar{z}w)\cdot(1-z\overline{w})-(z-w)\cdot(\overline{z}-\overline{w})$
$=1-z\overline{w}-\bar{z}w+\bar{z}z\cdot w\overline{w}-(z\bar{z}-z\overline{w}-\bar{z}w+w\overline{w})=1-z\overline{w}-\bar{z}w+|z|^2\cdot|w|^2-|z|^2+z\overline{w}+\bar{z}w-|w|^2$
$=1+|z|^2\cdot|w|^2-|z|^2-|w|^2=(1-|z|^2)\cdot(1-|w|^2)\,.$

ii) $\left|\dfrac{z-w}{1-\bar{z}w}\right|<1 \Leftrightarrow |z-w|<|1-\bar{z}w| \Leftrightarrow |z-w|^2<|1-\bar{z}w|^2 \Leftrightarrow 0<|1-\bar{z}w|^2-|z-w|^2 \overset{\textit{ερώτημα 2i)}}{\Longleftrightarrow}$
$0<(1-|z|^2)\cdot(1-|w|^2)$ η οποία είναι αληθής αφού από υπόθεση $|z|<1$ και $|w|<1$.

Θέμα 3ο

i) $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\b+c&c+a&a+b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a+b+c&a+b+c&a+b+c\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\1&1&1\end{vmatrix}=(a+b+c)\cdot 0=$
$=0\,.$

ii) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος μετασχηματίζεται σε κλιμακωτή μορφή ως ακολούθως:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}0&2&3&-4&1\\0&0&2&3&4\\2&2&-5&2&4\\2&0&-6&9&7\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3\leftrightarrow\Gamma_1}\left[\begin{array}{cccc|c}2&2&-5&2&4\\0&0&2&3&4\\0&2&3&-4&1\\2&0&-6&9&7\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_3}\left[\begin{array}{cccc|c}2&2&-5&2&4\\0&2&3&-4&1\\0&0&2&3&4\\2&0&-6&9&7\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_1\to\Gamma_1-\Gamma_2}\left[\begin{array}{cccc|c}2&0&-8&6&3\\0&2&3&-4&1\\0&0&2&3&4\\2&0&-6&9&7\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_1}\left[\begin{array}{cccc|c}2&0&-8&6&3\\0&2&3&-4&1\\0&0&2&3&4\\0&0&2&3&4\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_4\to\Gamma_4-\Gamma_3}\left[\begin{array}{cccc|c}2&0&-8&6&3\\0&2&3&-4&1\\0&0&2&3&4\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[\Gamma_2\to\Gamma_2-\frac{3}{2}\Gamma_3]{\Gamma_1\to\Gamma_1+4\Gamma_3}\left[\begin{array}{cccc|c}2&0&0&18&19\\0&2&0&-17/2&-5\\0&0&2&3&4\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[\Gamma_3\to\frac{1}{2}\Gamma_3]{\Gamma_1\to\frac{1}{2}\Gamma_1,\ \Gamma_2\to\frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&9&19/2\\0&1&0&-17/4&-5/2\\0&0&1&3/2&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

Άρα το ισοδύναμο προς το αρχικό σύστημα είναι :

$$\begin{Bmatrix} x_1+9x_4=\dfrac{19}{2}\\ x_2-\dfrac{17}{4}x_4=-\dfrac{5}{2}\\ x_3+\dfrac{3}{2}x_4=2\end{Bmatrix}$$

από όπου παίρνουμε απειρία λύσεων με έναν ελεύθερο άγνωστο:

$$x_1=\frac{19}{2}-9x_4\ ,\ x_2=-\frac{5}{2}+\frac{17}{4}x_4,\ x_3=2-\frac{3}{2}x_4\ ,\ x_4\epsilon\mathbb{R}\,.$$

Θέμα 4^ο

Σχηματίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A και παίρνουμε:

$$\det(A-\lambda\mathbb{I})=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&-3\\0&-2-\lambda&0\\-3&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(-2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}1-\lambda&-3\\-3&1-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+2)[(\lambda-1)^2-9]=$$

$$=-(\lambda+2)(\lambda-1-3)(\lambda-1+3)=-(\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda+2)\Longrightarrow p_\lambda(A)=\det(A-\lambda\mathbb{I})=-(\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

i. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det(A-\lambda\mathbb{I})=0$. Οπότε έχουμε δύο ιδιοτιμές την $\lambda_1=-2$ (αλγεβρική πολλαπλότητα 2) και την $\lambda_2=4$ (αλγεβρική πολλαπλότητα 1). Για να εξακριβώσουμε αν ο πίνακας διαγωνιοποιείται πρέπει να βρούμε την γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_1.

- $\lambda_1=-2$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-2$ βρίσκονται ως λύση του συστήματος:

$$(A-(-2)\cdot\mathbb{I})\boldsymbol{x}=\mathbb{O}\Longrightarrow\begin{bmatrix}3&0&-3\\0&0&0\\-3&0&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}3x_1-3x_3=0\\0=0\\-3x_1+3x_3=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2\epsilon\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+x_2\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ x_1,x_2\epsilon\mathbb{R}\,.$$

Οπότε: $\boldsymbol{x}=c_1\cdot(1,0,1)^{\boldsymbol{T}}+c_2\cdot(0,1,0)^{\boldsymbol{T}},c_1,c_2\epsilon\mathbb{R}$. Άρα $\mathcal{V}(\lambda_1)=span\{(1,0,1)^{\boldsymbol{T}},(0,1,0)^{\boldsymbol{T}}\}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-2$. Οπότε $dim\mathcal{V}(\lambda_1)=2$ άρα η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda_1=-2$ είναι ίση με την αλγεβρική, πράγμα που σημαίνει ότι ο δοσμένος πίνακας διαγωνιοποιείται.

- $\lambda_2=4$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2=-1$ βρίσκονται ως λύση του συστήματος:

$$(A-(4)\cdot\mathbb{I})\boldsymbol{x}=\mathbb{O}\Longrightarrow\begin{bmatrix}-3&0&-3\\0&-6&0\\-3&0&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}-3x_1-3x_3=0\\ \quad -6x_2=0\\ -3x_1-3x_3=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=0\end{cases}.$$

$$\Longrightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_3\\0\\x_3\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_3\cdot\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},x_3\epsilon\mathbb{R}.$$

Οπότε: $\boldsymbol{x}=t\cdot(-1,0,1)^T,t\epsilon\mathbb{R}$. Άρα $\mathcal{V}(\lambda_2)=span\{(-1,0,1)^{\boldsymbol{T}}\}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2=4$.

ii. Τότε έχουμε:

$$P=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\text{ και }P^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

οπότε:

$$P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

iii.

Είναι: $tr(A)=\sum_{\kappa=1}^{3}\lambda_\kappa=-2+(-2)+4=0$.

iv.

Έχουμε δείξει ότι: $p_\lambda(A)=\det(A-\lambda\mathbb{I})=-(\lambda+2)^2(\lambda-4)\overset{\lambda=0}{\Longrightarrow}\det(A)=-(2)^2\cdot(-4)\Longrightarrow\det(A)=16$.

Αφού $\det(A)\neq 0$ τότε ο πίνακας A αντιστρέφεται.