ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εισηγητής: Γιώργος Τζανετόπουλος *Εξέταση Β' Περιόδου 2021-22*

1. Βρείτε τις κυβικές ρίζες του μιγαδικού αριθμού $z = 2 + 2i$ και γράψτε τες σε καρτεσιανή και πολική μορφή.

2. Δίνονται οι μιγαδικοί $z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R}$ για τους οποίους υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right) + \left(\frac{z-\overline{z}}{2}\right) = \alpha + (1-\alpha)i\,.$$

Να δείξετε ότι:

α) αν $Im(z) = 0$, τότε $\alpha = 1$.

β) αν $\alpha = 0$, τότε $z^2 + 1 = 0$.

γ) για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι: $0 \le \alpha \le 1$.

3. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε επίσης τα διανύσματα: $u = (1,1,1)$, $v = (2,1,1)$ και $w = (1, \alpha, 2)$ του $\mathbb{R}^3$.

α) Βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα δοσμένα διανύσματα u, v, w είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

β) Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ το διάνυσμα $r = (0,1,1)$ ανήκει στο διανυσματικό υπόχωρο που παράγουν τα διανύσματα u, v, w.

4. Με χρήση των ιδιοτητών των οριζουσών (και μόνο) υπολογίστε την ακόλουθη ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} y+z & x & x^3 \\ z+x & y & y^3 \\ x+y & z & z^3 \end{vmatrix}.$$

5. Έστω ο πίνακας $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & x_1 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & x_2 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & x_3 \end{bmatrix}$ όπου $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3$. Βρείτε τα $x_i \in \mathbb{R}$ ώστε ο Q να είναι ορθογώνιος.

6. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A. Εξετάστε εάν ο πίνακας A αντιστρέφεται.

ΘΕΜΑ 1ο:		***1,0***
ΘΕΜΑ 2ο:	**α)**	***0,5***
	β)	***0,5***
	γ)	***0,5***
ΘΕΜΑ 3ο:	**α)**	***1,0***
	β)	***1,0***
ΘΕΜΑ 4ο:		***1,5***
ΘΕΜΑ 5ο:		***2,0***
ΘΕΜΑ 6ο:		***2,0***
ΣΥΝΟΛΟ		***10,0***

Λύσεις Θεμάτων Τελικής Εξέτασης

Θέμα 1ο :

Είναι: $|z| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8}$. Επίσης: $\theta_0 = arctan\left(\frac{|2|}{|2|}\right) = arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, αφού ο μιγαδικός z βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Συνεπώς θα είναι $Arg(z) = \frac{\pi}{4}$. Οπότε: $z = \sqrt{8}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$. Τότε:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2+2i} = \sqrt[3]{|z|}\, e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}}, k = 0,1,2 \Rightarrow \sqrt[3]{2+2i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\, e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}}, k = 0,1,2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt{\sqrt[3]{8}}\, e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}}, k = 0,1,2 \Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{12}+2k\frac{\pi}{3}\right)}, k = 0,1,2.$$

Άρα:

$$\zeta_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}, \zeta_1 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}, \zeta_2 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)} \Rightarrow \zeta_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}, \zeta_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{9\pi}{12}}, \zeta_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{17\pi}{12}} \Rightarrow$$

$$\zeta_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}, \zeta_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}, \zeta_2 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\pi+\frac{5\pi}{12}\right)} \Rightarrow \boxed{\zeta_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}, \zeta_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}, \zeta_2 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)}}.$$

Για τη μετατροπή των $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες χρειαζόμαστε:

$$cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sin\left(\frac{\pi}{3}\right)sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = sin\left(\frac{\pi}{3}\right)cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - sin\left(\frac{\pi}{4}\right)cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0\cdot cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1\cdot sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) = sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - sin\left(\frac{\pi}{12}\right)cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1\cdot cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - 0\cdot sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Άρα:

$$\zeta_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\, sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \boxed{\zeta_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$$

$$\zeta_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\, sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\zeta_1 = -1+i}$$

$$\zeta_2 = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)} = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right) + i\, sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-sin\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\, cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \zeta_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \boxed{\zeta_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}+1}{2}}.$$

Θέμα 2ο :

Είναι:

$$z + \overline{z} = (x+yi) + (x-yi) \Rightarrow z + \overline{z} = 2x \Rightarrow \frac{z+\overline{z}}{2} = x \text{ και}$$

$$z - \overline{z} = (x+yi) - (x-yi) \Rightarrow z - \overline{z} = 2yi \Rightarrow \frac{z-\overline{z}}{2} = yi$$

Άρα από την δοσμένη υπόθεση έχουμε: $\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right) + \left(\frac{z-\overline{z}}{2}\right) = \alpha + (1-\alpha)i \Leftrightarrow x + yi = a + (1-a)i \Leftrightarrow Re(z) = x = a$ και $Im(z) = y = (1-a)$

α) $Im(z) = 0 \Longrightarrow 1 - a = 0 \Longrightarrow a = 1$.

β) $\alpha = 0 \Longrightarrow x = 0$ και $y = 1$. Άρα $z = i \Longrightarrow z^2 = -1 \Longrightarrow z^2 + 1 = 0$.

γ) Λόγω του σφάλματος στην εκφώνηση οι μονάδες του ερωτήματος μεταφέρονται στα δύο προηγούμενα. Έτσι η σωστή λύση των α) και β) δίνει 1,5 μονάδες.

Θέμα 3ο :

α) Έστω: $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = \mathbb{O}$ με $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Έχουμε τότε:

$$\mathbb{O} = \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(2,1,1) + \lambda_3(1,\alpha,2) = (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \,, \lambda_1 + \lambda_2 + \alpha\lambda_3 \,, \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \alpha\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του παραπάνω συστήματος και εφαρμόζουμε τη μέθοδο της απαλοιφής *Gauss* ώστε να διαπιστώσουμε αν έχει ή όχι μόνον τη μηδενική λύση (ώστε να είναι τα δοσμένα διανύσματα γραμμικά ανεξάρτητα) :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha - 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \alpha & 0 \end{array}\right]$$

Από τον παραπάνω επαυξημένο πίνακα παίρνουμε ότι όταν $2 - \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 2$, το σύστημα έχει μόνον την μηδενική λύση.

β) Έστω: $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = (0,1,1)$ με $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ για κάποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$. Έχουμε τότε:

$$(0,1,1) = \lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(2,1,1) + \lambda_3(1,\alpha,2)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \alpha\lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του παραπάνω συστήματος και εφαρμόζουμε τη μέθοδο της απαλοιφής *Gauss* ώστε να το λύσουμε (εντοπίζοντας κατ' αυτό τον τρόπο την τιμή ή τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1]{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha - 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha - 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \alpha & 0 \end{array}\right]$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για το $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $\alpha \neq 2$. Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + (\alpha - 1)\lambda_3 = 1 \\ (2 - \alpha)\lambda_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

- $\alpha = 2$. Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ 0\lambda_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3\lambda_3 + 2 \\ \lambda_2 = \lambda_3 - 1 \\ \lambda_3 \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Από τα παραπάνω δείξαμε ότι το αρχικό σύστημα έχει λύση για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και επιπρόσθετα ότι $2u - v = (0,1,1)$.

Θέμα 4ο :

$$\begin{vmatrix} y + z & x & x^3 \\ z + x & y & y^3 \\ x + y & z & z^3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \to \Sigma_1 + \Sigma_2} \begin{vmatrix} x + y + z & x & x^3 \\ x + y + z & y & y^3 \\ x + y + z & z & z^3 \end{vmatrix} = (x + y + z) \begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_3]{\Gamma_1 \to \Gamma_1 - \Gamma_3}$$

$$(x + y + z) \begin{vmatrix} 0 & x - z & x^3 - z^3 \\ 0 & y - z & y^3 - z^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} = (x + y + z)(x - z)(y - z) \begin{vmatrix} 0 & 1 & x^2 + xz + z^2 \\ 0 & 1 & y^2 + yz + z^2 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+y+z)(x-z)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & x^2+xz+z^2 \\ 1 & y^2+yz+z^2 \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)(y-z)\left(y^2+yz+z^2-(x^2+xz+z^2)\right) =$$
$$= (x+y+z)(x-z)(y-z)(y^2+yz+z^2-x^2-xz-z^2) = (x+y+z)(x-z)(y-z)(y^2+yz-x^2-xz) =$$
$$= (x+y+z)(x-z)(y-z)(y^2-x^2+(y-x)z) = (x+y+z)(x-z)(y-z)(x+y+z)(y-x) =$$
$$= (x+y+z)^2(x-z)(y-z)(y-x) = (x+y+z)^2(x-y)(y-z)(z-x)\,.$$

Θέμα 5ο:

Ο πίνακας Q είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν $Q^TQ = \mathbb{I}$. Άρα θα πρέπει:

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{14} & 1/\sqrt{14} & 1/\sqrt{14} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & x_1 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & x_2 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{14} & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3/\sqrt{42} & \dfrac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}} \\ 3/\sqrt{42} & 3/14 & \dfrac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{14}} \\ \dfrac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{3}} & \dfrac{x_1+x_2+x_3}{\sqrt{14}} & {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Από την τελευταία ισότητα γίνεται αντιληπτό ότι δεν υπάρχουν τιμές για τα $x_i \in \mathbb{R}, i = 1,2,3$ ώστε ο δοσμένος πίνακας Q να είναι ορθογώνιος.

Θέμα 6ο :

Σχηματίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A και παίρνουμε:

$$\det(A-\lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)[\lambda(\lambda-3)+4] - 2[2(3-\lambda)-2] + [4-\lambda] = -(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+4) + 4(\lambda-3) + 4 + 4 - \lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda + \lambda^2 - 3\lambda + 4 + 4\lambda - 12 + 4 + 4 - \lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda$$

$$\Longrightarrow \det(A-\lambda\mathbb{I}) = -\lambda(\lambda^2-4\lambda+4) \Longrightarrow \det(A-\lambda\mathbb{I}) = -\lambda(\lambda-2)^2\,.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det(A-\lambda\mathbb{I}) = 0$. Οπότε έχουμε δύο ιδιοτιμές την $\lambda = 0$ και την $\lambda = 2$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 2. Αφού ο πίνακας έχει ιδιοτιμή την $\lambda = 0$ δεν αντιστρέφεται.

- $\lambda = 0$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = 0$ βρίσκονται ως λύση του συστήματος:

$$(A-0\cdot\mathbb{I})\boldsymbol{x} = \mathbb{O} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3 = 0 \\ 2x_1-2x_3 = 0 \\ -x_1+2x_2+3x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3 = 0 \\ 2x_1-2x_3 = 0 \\ 4x_2+4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+x_3 = 0 \\ x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3, x_3 \epsilon \mathbb{R}\,.$$

Οπότε: $\boldsymbol{x} = t\cdot(1,-1,1), t\epsilon\mathbb{R}$. Άρα $span\{(1,-1,1)\}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = 0$.

- $\lambda = 2$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = 2$ βρίσκονται ως λύση του συστήματος:

$$(A-2\cdot\mathbb{I})\boldsymbol{x}=\mathbb{O}\Rightarrow\left\{\begin{bmatrix}1&2&1\\2&0&-2\\1&2&3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\right\}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}-1&2&1\\2&-2&-2\\1&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3=0\\2x_1-2x_2+2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3=0\\x_1-x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x_1+2x_2+x_3=0\\x_1-x_2+x_3=0\\3x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\ \\3x_2=0\end{cases}.$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}x_3,x_3\epsilon\mathbb{R}.$$

Οπότε: $\boldsymbol{x}=t\cdot(1,0,1), t\epsilon\mathbb{R}$. Άρα $span\{(1,0,1)\}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda=2$.