



ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εισηγητής: Γιώργος Τζανετόπουλος

Εξέταση Α' Περιόδου 2022-23

1. Εφαρμόστε τη μέθοδο Gauss-Jordan για να λύσετε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 10 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 26 \end{bmatrix}$$

2. Αποδείξτε ότι:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 x^3 + \beta_1 x^2 + \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 x^3 + \beta_2 x^2 + \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 x^3 + \beta_3 x^2 + \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

3. i. Ποιοι από τους επόμενους πίνακες είναι ίσοι με $(A + B)^2$ όπου A και B $n \times n$ πραγματικοί πίνακες.

α) $(A + B)^2$ β) $(A + B) \cdot (B + A)$ γ) $A^2 + AB + BA + B^2$ δ) $A^2 + 2AB + B^2$

ii. Έστω τετραγωνικός πίνακας A . Δείξτε ότι ο πίνακας $(A + A^T)$ είναι συμμετρικός, ενώ ο πίνακας $(A - A^T)$ είναι αντισυμμετρικός. Γράψτε τον παρακάτω πίνακα ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Δίνεται ο 3×3 πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα.

- i. Να δείξετε ότι ο πίνακας A διαγωνιοποιείται.
- ii. Βρείτε πίνακα P ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι διαγώνιος.
- iii. Βρείτε το ίχνος του A .
- iv. Εξετάστε εάν ο πίνακας A αντιστρέφεται.

ΘΕΜΑ 1ο:		2,50
ΘΕΜΑ 2ο:		2,50
ΘΕΜΑ 3ο:	i)	1,50
	ii)	1,00
ΘΕΜΑ 4ο:	i)	0,75
	ii)	1,00
	iii)	0,2
	iv)	0,50
ΣΥΝΟΛΟ		10,0

Λύσεις Θεμάτων Τελικής Εξέτασης

Θέμα 1°

Σχηματίζουμε το επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 2 & 10 \\ 4 & 10 & 10 & 26 \end{array} \right] \xrightarrow[\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_3 - 4\Gamma_1]{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \\ 0 & -2 & -6 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow -\frac{1}{2}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Άρα το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2(3x_3 + 3) + 3x_3 + 3 = 5 \\ x_2 = -3x_3 + 3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 5x_3 - 1 \\ x_2 = -3x_3 + 3 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_3 - 1 \\ -3x_3 + 3 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Θέμα 2°

Είναι:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 x^3 + \beta_1 x^2 + \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 x^3 + \beta_2 x^2 + \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 x^3 + \beta_3 x^2 + \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 x^3 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 x^3 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 x^3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 x^2 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2 x^2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_3 x^2 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= x^3 \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} + x^2 \cdot \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= x^3 \cdot 0 + x^2 \cdot 0 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Θέμα 3°

i)

α) $A + B = A + B \Rightarrow (A + B) \cdot (A + B) = (A + B) \cdot (A + B) \Rightarrow (A + B)^2 = (A + B)^2.$

β) $(A + B) \cdot (B + A) = (A + B) \cdot (A + B) = (A + B)^2.$

γ) $(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A \cdot (A + B) + B \cdot (A + B) = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2.$

δ) $(A + B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2) = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2 - A^2 - 2A \cdot B - B^2 = B \cdot A - A \cdot B \neq 0$ εν γένει.
Άρα: $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

ii)

Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται συμμετρικός αν και μόνο αν $A = A^T$, ενώ λέγεται αντισυμμετρικός αν και μόνο αν $A = -A^T$. Με βάση τους ορισμούς αυτούς έχουμε:

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$$

και

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -A + A^T = -(A - A^T).$$

Επίσης ισχύει ότι:

$$\frac{1}{2} \cdot (A + A^T) + \frac{1}{2} \cdot (A - A^T) = A.$$

Δίνεται: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ τότε είναι: $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -7 & 6 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$

$$\text{Οπότε: } \frac{1}{2} \cdot (A + A^T) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -7 & 6 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & -14 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & -7 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{και } \frac{1}{2} \cdot (A - A^T) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -7 & 6 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -5 & 3 \\ 5 & 0 & -11 \\ -3 & 11 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5/2 & 3/2 \\ 5/2 & 0 & -11/2 \\ -3/2 & 11/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Συνεπώς } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & -7 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5/2 & 3/2 \\ 5/2 & 0 & -11/2 \\ -3/2 & 11/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Θέμα 4^ο

Σχηματίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A και παίρνουμε:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -2 \\ -1 & 1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)\lambda(\lambda + 3) + 2(1 - \lambda) =$$

$$= -(\lambda - 1)[\lambda(\lambda + 3) + 2] = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda \mathbb{I}) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

i. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$. Οπότε έχουμε τρεις ιδιοτιμές την $\lambda_1 = -2$, την $\lambda_2 = -1$ και την $\lambda_3 = 1$. Αφού ο πίνακας έχει τρεις διακριτές μεταξύ τους ιδιοτιμές τότε διαγωνιοποιείται.

ii.

• $\lambda_1 = -2$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ βρίσκονται ως λύση του συστήματος:

$$(A - (-2) \cdot \mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbb{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Οπότε: $\mathbf{x} = t \cdot (0, 1, 1)^T, t \in \mathbb{R}$. Άρα $\text{span}\{(0, 1, 1)^T\}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$.

• $\lambda_2 = -1$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$ βρίσκονται ως λύση του συστήματος:

$$(A - (-1) \cdot \mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbb{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Οπότε: $\mathbf{x} = t \cdot (0, 2, 1)^T, t \in \mathbb{R}$. Άρα $\text{span}\{(0, 2, 1)^T\}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$.

- $\lambda_3 = 1$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = 1$ βρίσκονται ως λύση του συστήματος:

$$(A - \mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbb{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{R}.$$

Οπότε: $\mathbf{x} = t \cdot (1, 1, 0)^T, t \in \mathbb{R}$. Άρα $\text{span}\{(1, 1, 0)^T\}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = 1$.

Τότε έχουμε:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

οπότε:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

iii.

$$\text{Είναι: } \text{tr}(A) = \sum_{\kappa=1}^3 \lambda_{\kappa} = -2 + (-1) + 1 = -2.$$

iv.

$$\text{Έχουμε δείξει ότι: } \det(A - \lambda \mathbb{I}) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 2) \stackrel{\lambda=0}{\implies} \det(A) = -(-1) \cdot 1 \cdot 2 \implies \det(A) = 2.$$