



ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εισηγητής: Γιώργος Τζανετόπουλος

Εξέταση Α' Περιόδου 2021-22

1. Να βρεθεί η εξίσωση των επιπέδων που είναι παράλληλα στο  $(\Pi_1): 4x - 4y + 7z - 3 = 0$  κι απέχουν 4 μονάδες από το σημείο  $M (4,1, -2)$ .
2. **α)** Δίνονται οι μιγαδικοί  $z_1, z_2, z_3$  για τους οποίους ισχύουν:  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$  και  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ .  
Να αποδειχθεί ότι  $|z_1 + z_2|^2 = 2 + 2\text{Re}(z_1\overline{z_2})$ .  
**β)** Υπολογίστε την παράσταση:  $(1 + i\sqrt{3})^8 + (1 - i\sqrt{3})^8$ .
3. Έστω  $V$  διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα  $\mathbb{K}$ , και  $v_1, v_2, v_3$  γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του  $V$ . Ορίζουμε τα διανύσματα  $w_1, w_2, w_3 \in V$  ως  $w_1 = v_1 + v_2, w_2 = v_1 + v_3, w_3 = v_2 + v_3$ . Εξετάστε αν τα διανύσματα  $w_1, w_2, w_3$  είναι ή όχι γραμμικά ανεξάρτητα.
4. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$$

5. Έστω ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$  όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να βρεθούν οι τιμές του  $\alpha$  για τις οποίες ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος και για τις τιμές αυτές να υπολογιστεί ο αντίστροφος με τη μέθοδο του προσαρτημένου πίνακα.

**β)** Αν  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  και  $b = [1 \ 2 \ 3]$  να διερευνήσετε και να λύσετε το σύστημα  $AX = b$  για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

6. Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ . Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του  $A$ .

ΘΕΜΑ 1ο:		1,0
ΘΕΜΑ 2ο:	α)	1,0
	β)	1,0
ΘΕΜΑ 3ο:		1,5
ΘΕΜΑ 4ο:		1,5
ΘΕΜΑ 5ο:	α)	1,0
	β)	1,0
ΘΕΜΑ 6ο:		2,0
ΣΥΝΟΛΟ		10,0

## Λύσεις Θεμάτων Τελικής Εξέτασης

### Θέμα 1° :

Το ζητούμενο επίπεδο, λόγω της συνθήκης παραλληλίας με το  $(\Pi_1)$  θα έχει τη μορφή:  $4x - 4y + 7z + \Delta = 0$  ( $\Pi_2$ ). Από τον τύπο της απόστασης θα έχουμε:

$$d(M, \Pi_2) = \frac{|4 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + 7 \cdot (-2) + \Delta|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2}} = 4 \Rightarrow \frac{|\Delta - 2|}{9} = 4 \Rightarrow |\Delta - 2| = 36 \Rightarrow \begin{cases} \Delta - 2 = 36 \\ \text{ή} \\ -\Delta + 2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 38 \\ \text{ή} \\ \Delta = -34 \end{cases}.$$

Συνεπώς δύο επίπεδα πληρούν τις υποθέσεις:  $\boxed{4x - 4y + 7z + 36 = 0}$  ή  $\boxed{4x - 4y + 7z - 34 = 0}$  ( $\Pi_2$ ).

### Θέμα 2° :

α) Είναι:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 = 0 &\Rightarrow z_1 + z_2 = -z_3 \Rightarrow |z_1 + z_2| = |-z_3| = |z_3| = 1 \Rightarrow |z_1 + z_2| = 1 \Rightarrow |z_1 + z_2|^2 = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = 1 \Rightarrow (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = 1 \Rightarrow z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + |z_2|^2 = 1 \Rightarrow 1 + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + 1 = 1 \Rightarrow 2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = 1 = |z_1 + z_2|^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow |z_1 + z_2|^2 = 2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}). \end{aligned}$$

β) Έστω  $w = 1 + i\sqrt{3}$ . Είναι:  $|w| = 2$ . Άρα  $w = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{w = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}$ . Επίσης είναι:

$\overline{w} = \overline{(1 + i\sqrt{3})} \Rightarrow \overline{w} = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\overline{w} = 2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}$ . Τότε από τον τύπο του *De Moivre* παίρνουμε:

$$\begin{aligned} w^8 + \overline{w}^8 &= 2^8 \cdot \left[ \left(\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right) + \left(\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right)\right) \right] = 2^8 \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) = 2^9 \cdot \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &\Rightarrow w^8 + \overline{w}^8 = -2^9 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2^8 \Rightarrow \boxed{w^8 + \overline{w}^8 = -256}. \end{aligned}$$

### Θέμα 3° :

Έστω:  $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = \mathbb{O}$  με  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ . Έχουμε τότε:

$$\begin{aligned} \mathbb{O} &= \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 = \lambda_1(v_1 + v_2) + \lambda_2(v_1 + v_3) + \lambda_3(v_2 + v_3) = \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_1 + \lambda_2 v_3 + \lambda_3 v_2 + \lambda_3 v_3 \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)v_1 + (\lambda_1 + \lambda_3)v_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)v_3 \xrightarrow{v_1, v_2, v_3 \text{ γρ. ανεξάρτητα}} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_1 = -\lambda_3 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Άρα τα διανύσματα  $w_1, w_2, w_3$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

### Θέμα 4° :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3x-1 & 3x-1 & 3x-1 & 3x-1 \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (3x-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0 &\Leftrightarrow (3x-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & -1-x & 0 & 0 \\ x & 0 & -1-x & 0 \\ x & 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (3x-1)(-1-x)^3 = 0 &\Leftrightarrow -(3x-1)(1+x)^3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ή } x = -1. \end{aligned}$$

### Θέμα 5° :

α) Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη του αντιστρόφου του πίνακα  $A$  είναι  $\det(A) \neq 0$ . Υπολογίζοντας την ορίζουσα του πίνακα  $A$  έχουμε:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\alpha - 6 + 2 - 6 = 2(\alpha - 5) \Rightarrow \det(A) = 2(\alpha - 5).$$

Άρα ο πίνακας  $A$  αντιστρέφεται αν και μόνο αν  $\alpha \neq 5$ . Για να βρούμε τον αντίστροφο θεωρούμε τον επαυξημένο του πίνακα  $A$  με τον ταυτοτικό και με γραμμοπράξεις έχουμε:

$$(A|\mathbb{I}) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_3 - 3\Gamma_1}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha - 3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\Gamma_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}\Gamma_2 \\ \Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2}} \boxed{\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 5 & -2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right)} (*)$$

$$\xrightarrow{\substack{\Gamma_3 \leftrightarrow \frac{1}{\alpha-5}\Gamma_3 \\ \Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_3}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\alpha-9}{\alpha-5} & \frac{\alpha-3}{2(\alpha-5)} & \frac{-2}{\alpha-5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{\alpha-5} & -\frac{1}{2(\alpha-5)} & \frac{1}{\alpha-5} \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_1 - \Gamma_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha-3}{\alpha-5} & \frac{1}{2(\alpha-5)} & \frac{-1}{\alpha-5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\alpha-9}{\alpha-5} & \frac{\alpha-3}{2(\alpha-5)} & \frac{-2}{\alpha-5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{\alpha-5} & -\frac{1}{2(\alpha-5)} & \frac{1}{\alpha-5} \end{array} \right)$$

$$= (\mathbb{I}|A^{-1}). \text{ Συνεπώς } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha-3}{\alpha-5} & \frac{1}{2(\alpha-5)} & \frac{-1}{\alpha-5} \\ -\frac{\alpha-9}{\alpha-5} & \frac{\alpha-3}{2(\alpha-5)} & \frac{-2}{\alpha-5} \\ -\frac{2}{\alpha-5} & -\frac{1}{2(\alpha-5)} & \frac{1}{\alpha-5} \end{bmatrix}.$$

**β)** Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις για το  $\alpha$  :

- $\alpha \neq 5$ . Τότε  $AX = b \Rightarrow X = A^{-1}b \Rightarrow x = \begin{bmatrix} \frac{\alpha-3}{\alpha-5} & \frac{1}{2(\alpha-5)} & \frac{-1}{\alpha-5} \\ -\frac{\alpha-9}{\alpha-5} & \frac{\alpha-3}{2(\alpha-5)} & \frac{-2}{\alpha-5} \\ -\frac{2}{\alpha-5} & -\frac{1}{2(\alpha-5)} & \frac{1}{\alpha-5} \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 2 \quad 3] \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

- $\alpha = 5$ . Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα  $(A|b)$  και εκτελούμε πράξεις για να τον φέρουμε σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή. Από την επαυξημένη μορφή του πίνακα  $(A|\mathbb{I})$  και την  $(*)$  για  $\alpha = 5$  παίρνουμε:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) (**)$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας στο αριστερό μέρος είναι σε κλιμακωτή μορφή οπότε πολλαπλασιάζοντας την στήλη  $b^T = [1 \quad 2 \quad 3]^T$  με τον πίνακα του δεξιού μέρους παίρνουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα:

$$(A|b) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = -2z. \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Οπότε:  $(x, y, z) = (1 - z, -2z, z) = (1, 0, 0) + z(-1, -2, 1), z \in \mathbb{R}.$

**Θέμα 6<sup>ο</sup> :**

Σχηματίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα  $A$  και παίρνουμε:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 5) \cdot [(\lambda - 3)^2 - 4] =$$

$$= -(\lambda - 5) \cdot (\lambda - 3 - 2) \cdot (\lambda - 3 + 2) = -(\lambda - 5) \cdot (\lambda - 5) \cdot (\lambda - 1) \Rightarrow \boxed{\det(A - \lambda \mathbb{I}) = -(\lambda - 5)^2 \cdot (\lambda - 1)}.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$ . Οπότε έχουμε δύο ιδιοτιμές την  $\lambda = 5$  με αλγεβρική πολλαπλότητα 2 και την  $\lambda = 1$ .

•  $\lambda = 1$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda = 1$  βρίσκονται ως λύση του συστήματος:

$$(A - 1 \cdot \mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbb{0} \Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0] \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Οπότε:  $\mathbf{x} = (1, 1, 0) \cdot t, t \in \mathbb{R}$ . Άρα  $\text{span}\{(1, 1, 0)\}$  είναι ο διανυσματικός χώρος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda = 1$ .

•  $\lambda = 5$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda = 5$  βρίσκονται ως λύση του συστήματος:

$$(A - 5 \cdot \mathbb{I})\mathbf{x} = \mathbb{0} \Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0] \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 0x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Οπότε:  $\mathbf{x} = r(-1, 1, 0) + t(0, 0, 1), r, t \in \mathbb{R}$ . Άρα  $\text{span}\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  είναι ο διανυσματικός χώρος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή  $\lambda = 5$ .