ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εισηγητής: Γιώργος Τζανετόπουλος *Εξέταση Β' Περιόδου 2023-24*

1. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός: $z = -1 - i$. Υπολογίστε τις κυβικές ρίζες του μιγαδικού αριθμού z^2 . Γράψτε τις απαντήσεις σας σε εκθετική μορφή.

2. Έστω μιγαδικός αριθμός $z \epsilon \mathbb{C}$ για τον οποίο ισχύουν: $z \neq \pm i$ και $Im(z) \neq 0$. Αποδείξτε την ισοδυναμία:

$$\frac{z}{1+z^2} \epsilon \mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2 = 1 .$$

3. Δίνεται ότι: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$. Υπολογίστε τις ακόλουθες ορίζουσες:

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$ και ii) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$.

4. Βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

και χρησιμοποιείστε τον για να λύσετε το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

5. Δίνεται ο 3×3 μιγαδικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{bmatrix}$. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα.

i. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A.
ii. Βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα A.
iii. Για κάθε ιδιοτιμή βρείτε τα ιδιοδιανύσματα της.

ΘΕΜΑ 1ο:		***1,50***
ΘΕΜΑ 2ο:		***2,00***
ΘΕΜΑ 3ο:	i)	***1,00***
	ii)	***1,00***
ΘΕΜΑ 4ο:	i)	***1,00***
	ii)	***0,50***
ΘΕΜΑ 5ο:	i)	***1,00***
	ii)	***1,00***
	iii)	***1,00***
ΣΥΝΟΛΟ		***10,00***

Λύσεις Θεμάτων Τελικής Εξέτασης

Θέμα 1ο

Είναι:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \Longrightarrow |z| = \sqrt{2}\,.$$

Ο μιγαδικός αριθμός z βρίσκεται στο 3ο τεταρτημόριο αφού $Re(z) < 0$ και $Im(z) < 0$ οπότε για το πρωτεύων όρισμά του έχουμε ότι: $\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ και $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ οπότε εύκολα βλέπουμε ότι: $\theta = Arg(z) = \frac{5\pi}{4}$. Άρα η τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού είναι: $z = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\sin\frac{5\pi}{4}\right) \Longrightarrow z = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{5\pi}{4}}$. Τότε:

$$z^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(e^{i\frac{5\pi}{4}}\right)^2 \Longrightarrow z^2 = 2\cdot e^{i\,2\cdot\frac{5\pi}{4}} \Longrightarrow z^2 = 2\cdot e^{i\frac{5\pi}{2}} = 2\cdot e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)} = 2\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Από τον τύπο του *De Moivre* εκπεφρασμένο σε εκθετική μορφή, ήτοι $\zeta_k = \sqrt[3]{2}\cdot e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)}, k = 0,1,2$ παίρνουμε ότι οι τρίτες ρίζες του z^2 είναι:

$$\zeta_0 = \sqrt[3]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{6}},\ \zeta_1 = \sqrt[3]{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)},\ \zeta_2 = \sqrt[3]{2}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)}$$

και κάνοντας τις πράξεις και απλοποιώντας:

$$\zeta_0 = \sqrt[3]{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{6}},\ \zeta_1 = \sqrt[3]{2}\cdot e^{i\frac{5\pi}{6}},\ \zeta_2 = \sqrt[3]{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{2}}.$$

Θέμα 2ο

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{z\cdot\overline{(z^2+1)}}{(z^2+1)\cdot\overline{(z^2+1)}} = \frac{z\cdot\left(\overline{z}^{\,2}+1\right)}{|z^2+1|^2} = \frac{z\cdot\overline{z}^{\,2}+z}{|z^2+1|^2} = \frac{z\cdot\overline{z}\cdot\overline{z}+z}{|z^2+1|^2} \Longrightarrow \frac{z}{z^2+1} = \frac{|z|^2\cdot\overline{z}+z}{|z^2+1|^2}\ (1)\,.$$

" $\Longrightarrow$ "

$$\frac{z}{z^2+1}\,\epsilon\mathbb{R} \overset{(1)}{\Longrightarrow} |z|^2\cdot\overline{z}+z\,\epsilon\mathbb{R} \Longrightarrow |z|^2\cdot\{Re(z) - Im(z)\cdot i\} + \{Re(z) + Im(z)\cdot i\}\,\epsilon\mathbb{R} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (|z|^2+1)Re(z) - (|z|^2-1)\cdot Im(z)\cdot i\epsilon\mathbb{R} \Longrightarrow (|z|^2-1)\cdot Im(z) = 0 \xRightarrow{Im(z)\neq 0} (|z|^2-1) = 0 \Longrightarrow |z|^2 = 1\,.$$

" $\Longleftarrow$ "

$$(1) \Longrightarrow \frac{z}{z^2+1} = \frac{|z|^2\cdot\overline{z}+z}{|z^2+1|^2} \xRightarrow{|z|^2=1} \frac{z}{z^2+1} = \frac{\overline{z}+z}{|z^2+1|^2} \Longrightarrow \frac{z}{z^2+1} = \frac{2Re(z)}{|z^2+1|^2}\ \epsilon\,\mathbb{R}\,.$$

Θέμα 3ο

i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & b \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = 2\cdot 0 = 0\,.$

ii) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix} = -3\left\{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -4d & -4e & -4f \end{vmatrix}\right\} =$

$-3\left\{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix}\right\} = -3\{-6 - 4\cdot 0\} = 18\,.$

Θέμα 4ο

$$[A|I]=$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&3&1&1&0&0\\3&3&1&0&1&0\\2&4&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_1]{\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&3&1&1&0&0\\1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\2&3&1&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\\2&3&1&1&0&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&3&1&3&-2&0\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3\to\Gamma_3-3\Gamma_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1&1&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&6&-2&-3\end{array}\right]\Longrightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\6&-2&-3\end{bmatrix}.$$

Συνεπώς η λύση του δοσμένου συστήματος δίνεται από:

$$\begin{bmatrix}2&3&1\\3&3&1\\2&4&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\Longrightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\6&-2&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&3&1\\3&3&1\\2&4&1\end{bmatrix}}_{I_3}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\6&-2&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-4\end{bmatrix}.$$

Θέμα 5ο

i) Σχηματίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A και παίρνουμε:

$$\det(A-\lambda\mathbb{I})=\begin{vmatrix}2-i-\lambda&0&i\\0&1+i-\lambda&0\\i&0&2-i-\lambda\end{vmatrix}=(1+i-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}2-i-\lambda&i\\i&2-i-\lambda\end{vmatrix}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\det(A-\lambda\mathbb{I})=(1+i-\lambda)\cdot[(2-i-\lambda)^2-i^2]=(1+i-\lambda)\cdot[2-i-\lambda-i]\cdot[2-i-\lambda+i]\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\det(A-\lambda\mathbb{I})=(1+i-\lambda)\cdot(2-2i-\lambda)\cdot(2-\lambda)\Longrightarrow\boxed{p_\lambda(A)=-(\lambda-2)\cdot\big(\lambda-(1+i)\big)\cdot\big(\lambda-(2-2i)\big)}.$$

ii) Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, $p_\lambda(A)=0$. Οπότε έχουμε τρείς ιδιοτιμές την $\lambda_1=2$ (με αλγεβρική πολλαπλότητα 1), την $\lambda_2=1+i$ (με αλγεβρική πολλαπλότητα 1) και την $\lambda_3=2-2i$ (επίσης με αλγεβρική πολλαπλότητα 1).

iii) Ιδιοδιανύσματα

- $\lambda_1=2$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=2$ βρίσκονται ως λύση του συστήματος:

$$(A-2\cdot\mathbb{I})\boldsymbol{x}=\mathbb{O}\Longrightarrow\begin{bmatrix}-i&0&i\\0&-1+i&0\\i&0&-i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}-ix_1+ix_3=0\\(-1+i)x_2=0\\+ix_1-ix_3=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=0\\\end{cases}$$

Άρα: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\0\\x_1\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ x_1\,\epsilon\,\mathbb{C}$.

- $\lambda_2=1+i$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2=1+i$ βρίσκονται ως λύση του συστήματος:

$$(A-(1+i)\cdot\mathbb{I})\boldsymbol{x}=\mathbb{O}\Longrightarrow\begin{bmatrix}1-2i&0&i\\0&0&0\\i&0&1-2i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}(1-2i)x_1+ix_3=0\\0=0\\ix_1+(1-2i)x_3=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2\epsilon\mathbb{R}\\x_3=0\end{cases}.$$

Άρα: $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\x_2\\0\end{bmatrix}\Longrightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=x_2\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},x_2\,\epsilon\,\mathbb{C}$.

- $\lambda_3=2-2i$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2 - 2i$βρίσκονται ως λύση του συστήματος:

$$(A - (2-2i)\cdot \mathbb{I})\boldsymbol{x} = \mathbb{O} \Longrightarrow \begin{bmatrix} i & 0 & i \\ 0 & -1+3i & 0 \\ i & 0 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} ix_1 + ix_3 = 0 \\ (-1+3i)x_2 = 0 \\ ix_1 + ix_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Άρα: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 \epsilon\, \mathbb{C}$.