ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εισηγητής: Γιώργος Τζανετόπουλος *Εξέταση Β' Περιόδου 2022-23*

1. i. Βρείτε τον A^{-1} όπου: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$.

ii. Χρησιμοποιείστε τον παραπάνω αντίστροφο για να λύστε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_1 + 8x_3 = 10 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 17 \end{gathered}$$

iii. Αναλύστε τον πίνακα Α σε γινόμενο *LU*.

2. Με την βοήθεια των ιδιοτήτων, υπολογίστε την ορίζουσα: $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$.

3. i. Δίνονται τα διανύσματα: $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$. Είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή εξαρτημένα;

ii. Να βρεθούν οι τιμές των x, y, z ώστε ο πίνακας: $A = \begin{bmatrix} 2 & x^2 & z \\ 2x - y & 4 & y \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ να είναι συμμετρικός.

iii. Έστω τετραγωνικός πίνακας A τέτοιος ώστε $\det(I + A) \neq 0$. Να δείξετε ότι: $(I + A)^{-1} = I - (I + A)^{-1} \cdot A$.

4. Δίνεται ο 3×3 πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα.

i. Να δείξετε ότι ο πίνακας A διαγωνιοποιείται.
ii. Βρείτε πίνακα P ώστε ο πίνακας $P^{-1} \cdot A \cdot P$ να είναι διαγώνιος.
iii. Βρείτε το ίχνος του A.
iv. Εξετάστε εάν ο πίνακας A αντιστρέφεται.

ΘΕΜΑ 1ο:	i)	***1,00***
	ii)	***1,00***
	iii)	***1,00***
ΘΕΜΑ 2ο:		***1,00***
ΘΕΜΑ 3ο:	i)	***1,00***
	ii)	***1,00***
	iii)	***1,00***
ΘΕΜΑ 4ο:	i)	***1,00***
	ii)	***1,00***
	iii)	***0,25***
	iv)	***0,75***
ΣΥΝΟΛΟ		***10,00***

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

Καλή Επιτυχία.

<u>***Λύσεις Θεμάτων Τελικής Εξέτασης***</u>

Θέμα 1ο

i-ii) Σχηματίζουμε το επαυξημένο πίνακα $(A|I)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\1&0&8&0&1&0\\2&5&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\Gamma_3\leftrightarrow\Gamma_3-2\Gamma_1]{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_2-\Gamma_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&5&-1&1&0\\0&1&-3&-2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&0&1\\0&-2&5&-1&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[\Gamma_3\leftrightarrow\Gamma_3+2\Gamma_2]{\Gamma_1\leftrightarrow\Gamma_1-2\Gamma_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&9&5&0&-2\\0&1&-3&-2&0&1\\0&0&-1&-5&1&2\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3\leftrightarrow-\Gamma_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&9&5&0&-2\\0&1&-3&-2&0&1\\0&0&1&5&-1&-2\end{array}\right]\xrightarrow[\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_2+3\Gamma_3]{\Gamma_1\leftrightarrow\Gamma_1-9\Gamma_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-40&9&16\\0&1&0&13&-3&-5\\0&0&1&5&-1&-2\end{array}\right].$$

Άρα: $A^{-1}=\begin{bmatrix}-40&9&16\\13&-3&-5\\5&-1&-2\end{bmatrix}$. Έστω: $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ και $B=\begin{bmatrix}9\\10\\17\end{bmatrix}$, τότε: $AX=B\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B$

$\Rightarrow IX=A^{-1}B\Rightarrow X=A^{-1}B$.

Οπότε: $$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-40&9&16\\13&-3&-5\\5&-1&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}9\\10\\17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-40\cdot 9+9\cdot 10+16\cdot 17\\13\cdot 9-3\cdot 10-5\cdot 17\\5\cdot 9-1\cdot 10-2\cdot 17\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}.$$

iii) Ελέγχουμε αρχικά τις κύριες υποορίζουσες του πίνακα A :

$$A_1=1\neq 0,\ A_2=\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}=-2\neq 0\,.$$

Αφού είναι διαφορετικές του μηδενός ο πίνακας A έχει ανάλυση LU και καθώς $A_3=\det(A)=1\neq 0$ η παραγοντοποίηση LU είναι μοναδική. Οπότε βρίσκουμε την κλιμακωτή μορφή του πίνακα:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\1&0&8&0&1&0\\2&5&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[\Gamma_3\leftrightarrow\Gamma_3-2\Gamma_1]{\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_2-\Gamma_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&5&1&1&0\\0&1&-3&2&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_3\leftrightarrow\Gamma_3+\frac{1}{2}\Gamma_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&5&1&1&0\\0&0&-\frac{1}{2}&2&-\frac{1}{2}&1\end{array}\right].$$

Άρα $L=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$ και $U=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&5\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

Θέμα 2ο

Στην 1η Γραμμή προσθέτουμε τις άλλες τρεις και μετά βγάζουμε τον κοινό της παράγοντα παίρνοντας:

$$\begin{vmatrix}x&a&a&a\\a&x&a&a\\a&a&x&a\\a&a&a&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+3a&x+3a&x+3a&x+3a\\a&x&a&a\\a&a&x&a\\a&a&a&x\end{vmatrix}=(x+3a)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&x&a&a\\a&a&x&a\\a&a&a&x\end{vmatrix}=$$

Αφαιρούμε την 1η Στήλη από τις άλλες τρεις και αναπτύσσουμε ως προς την 1η Γραμμή παίρνοντας:

$$=(x+3a)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\a&x-a&0&0\\a&0&x-a&0\\a&0&0&x-a\end{vmatrix}=(x+3a)\begin{vmatrix}x-a&0&0\\0&x-a&0\\0&0&x-a\end{vmatrix}=(x+3a)(x-a)^3\,.$$

Θέμα 3ο

i) Τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα καθώς $v=w-2u$.

ii) Ένας τετραγωνικός πίνακας ονομάζεται συμμετρικός αν και μόνο αν $A=A^T$. Με βάση αυτό έχουμε:

$$A=\begin{bmatrix}2&x^2&z\\2x-y&4&y\\0&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2x-y&0\\x^2&4&1\\z&y&-1\end{bmatrix}=A^T\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x^2=2x-y\\y=1\\z=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x^2=2x-1\\y=1\\z=0\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} x^2-2x+1=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} (x-1)^2=0 \\ y=1 \\ z=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x=1 \\ y=1 \\ z=0 \end{Bmatrix}.$$

iii) Αφού $\det(I+A) \neq 0$, τότε ο πίνακας $I+A$ αντιστρέφεται και έχουμε:

$$(I+A)^{-1}(I+A)=I \Rightarrow (I+A)^{-1}\cdot I+(I+A)^{-1}\cdot A=I \Rightarrow (I+A)^{-1}\cdot I=I-(I+A)^{-1}\cdot A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (I+A)^{-1}=I-(I+A)^{-1}\cdot A$$

Θέμα 4ο

Σχηματίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A και παίρνουμε:

$$\det(A-\lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)(4-\lambda)+2] =$$

$$= -(\lambda-1)[\lambda^2-5\lambda+6] = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$\Rightarrow \det(A-\lambda\mathbb{I}) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\,.$$

i) Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $\det(A-\lambda\mathbb{I})=0$. Οπότε έχουμε τρεις ιδιοτιμές την $\lambda_1=1$, την $\lambda_2=2$ και την $\lambda_3=3$. Αφού ο πίνακας έχει τρεις διακριτές μεταξύ τους ιδιοτιμές τότε διαγωνιοποιείται.

ii)

- $\lambda_1=1$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=-2$ βρίσκονται ως λύση του συστήματος:

$$(A-1\cdot\mathbb{I})\boldsymbol{x}=\mathbb{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1+x_3=0 \\ -2x_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2\epsilon\mathbb{R}\,.$$

Οπότε: $\boldsymbol{x}=t\cdot(0,1,0)^T, t\epsilon\mathbb{R}$. Άρα $span\{(0,1,0)^{\boldsymbol{T}}\}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1=1$.

- $\lambda_2=2$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2=-1$ βρίσκονται ως λύση του συστήματος:

$$(A-(-1)\cdot\mathbb{I})\boldsymbol{x}=\mathbb{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1+x_3=0 \\ -2x_1-x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=-2x_1 \\ x_2=-2x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, x_3\epsilon\mathbb{R}\,.$$

Οπότε: $\boldsymbol{x}=t\cdot(1,-2,-2)^T, t\epsilon\mathbb{R}$. Άρα $span\{(1,-2,-2)^{\boldsymbol{T}}\}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2=2$.

- $\lambda_3=3$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_3=3$ βρίσκονται ως λύση του συστήματος:

$$(A-\mathbb{I})\boldsymbol{x}=\mathbb{O} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_3=0 \\ -2x_1-2x_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=-x_1 \\ \\ x_2=-x_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, x_1 \epsilon \mathbb{R} \,.$$

Οπότε: $\boldsymbol{x} = t \cdot (1, -1, -1)^T, t\epsilon\mathbb{R}$. Άρα $span\{(1, -1, -1)^{\boldsymbol{T}}\}$ είναι ο διανυσματικός χώρος των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = 1$.

Τότε έχουμε:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ και } P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

οπότε:

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

iii)

Είναι: $\quad tr(A) = \sum_{\kappa=1}^{3} \lambda_\kappa = 1 + 2 + 3 = 6 \,.$

iv)

Έχουμε δείξει ότι: $\quad \det(A - \lambda\mathbb{I}) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) \overset{\lambda=0}{\Longrightarrow} \det(A) = -(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) = 6 \,.$