ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διδάσκοντες: Κώστας Μαριάς & Γιώργος Τζανετόπουλος *Τελικό Διαγώνισμα_Α*

1. Θεωρούμε *3* γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα u_1, u_2, u_3 ενός διανυσματικού χώρου V πάνω σε ένα σώμα $\mathbb{F}$ και το γραμμικό συνδυασμό τους $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ με $\lambda_i \in \mathbb{F}, 1 \leq i \leq 3$. Δείξτε ότι τα διανύσματα $u_1 - u,\ u_2 - u,\ u_3 - u$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \neq 1$.

2. Να λυθεί η εξίσωση: $\begin{vmatrix} x^3-1 & x^2-1 & x-1 \\ x^3-8 & x^2-4 & x-2 \\ x^3-27 & x^2-9 & x-3 \end{vmatrix} = 0.$

3. Να λυθεί με τη μέθοδο της απαλοιφής Gauss το σύστημα: $\left\{\begin{array}{r} x+2y-3z=4 \\ x+3y+z=11 \\ 2x+5y-4z=13 \end{array}\right\}.$

4. Θεωρούμε του μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi,\ \ x, y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $\left(\frac{z+\bar{\bar{z}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{\bar{z}}}{2i}\right)^2 i = a + (1-a)i$ (1). Να αποδείξετε τα ακόλουθα:

α) αν $Im(z) = 0$, τότε $a = 1$.

β) αν $\alpha = 0$, τότε $z^2 + 1 = 0$.

γ) για τον πραγματικό αριθμό $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $0 \leq a \leq 1$.

δ) οι εικόνες Μ των μιγαδικών z ανήκουν σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

5. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon)\ \ x - 1 = y = 2 - z$, το επίπεδο $(\pi)\ \alpha x + y - z = 2$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε:

α) η ευθεία (ε) να τέμνει το επίπεδο (π),

β) η ευθεία (ε) να είναι παράλληλη στο επίπεδο (π),

γ) η ευθεία (ε) να είναι κάθετη στο επίπεδο (π).