ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Διδάσκοντες: Κώστας Μαριάς & Γιώργος Τζανετόπουλος *Τελικό Διαγώνισμα_Β*

1. Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα $\mathbb{K}$, και v_1, v_2, v_3 γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του V. Ορίζουμε τα διανύσματα $w_1, w_2, w_3 \in V$ ως $w_1 = v_1 + v_2, w_2 = v_1 + v_3, w_3 = v_2 + v_3$. Εξετάστε αν τα διανύσματα w_1, w_2, w_3 είναι ή όχι γραμμικά ανεξάρτητα.

2. Έστω οι πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \text{ και } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

όπου ο X είναι μη μηδενικός πίνακας. Να δείξετε ότι:

α) αν $A \cdot X = \lambda X, \lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda + (\alpha\delta - \beta\gamma) = 0$ με $(\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma) \geq 0$.

β) $A^2 - (\alpha + \delta)A + (\alpha\delta - \beta\gamma)I_2 = \mathbb{O}$ όπου I_2 ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας.

3. Να λυθεί με τη μέθοδο της απαλοιφής Gauss το σύστημα: $\left\{\begin{aligned} x - 2y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 5 \end{aligned}\right\}$.

4. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύουν: $|z_1| = |z_2| = 2$ *(Σ₁)* και $\frac{z_1 + z_2}{2 + z_1 z_2} = \frac{1}{3}$ *(Σ₂)*, να βρείτε τους z_1, z_2 . Δίνεται ότι $Im(z_1) > 0$.

5. Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon)\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \qquad (\zeta)\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι ορίζουν ένα επίπεδο και να βρεθεί η εξίσωσή του.