

Παραγοντοποίηση $A = LU$

Κάθε τετραγωνικός πίνακας A μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο ενός κάτω τριγωνικού πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο και ενός άνω τριγωνικού πίνακα U .

- ▶ Ο L έχει τους πολλαπλασιαστές της απαλοιφής κάτω απο την διαγώνιο
- ▶ Ο U τα στοιχεία του A όπως αυτά προκύπτουν μετά την απαλοιφή

Ύπαρξη και μοναδικότητα LU

Θεώρημα

Οι πίνακες L U που περιγράφθηκαν παραπάνω

- ▶ υπάρχουν και
- ▶ και αν ο A είναι αντιστρέψιμος είναι μοναδικοί.

Απόδειξη.

$$L_k L_{k-1} \cdots L_3 L_2 L_1 A = U \rightarrow A = (L_1)^{-1} (L_2)^{-1} (L_3)^{-1} \cdots (L_{k-1})^{-1} (L_k)^{-1} U$$

$$L_1 U_1 = L_2 U_2 \rightarrow (L_2)^{-1} L_1 = U_2 (U_1)^{-1}$$



Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 14 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Παράδειγμα

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = LU$

Να λυθεί το $A\underline{x}$ αν γνωρίζουμε την LU
παραγοντοποίηση του

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = LU$

Να λυθεί το $A\underline{x}$ αν γνωρίζουμε την LU παραγοντοποίηση του

$$\blacktriangleright A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow LU\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow L(U\underline{x}) = \underline{b}$$

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = LU$

Να λυθεί το $A\underline{x}$ αν γνωρίζουμε την LU παραγοντοποίηση του

- ▶ $A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow LU\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow L(U\underline{x}) = \underline{b}$
- ▶ Θέτω $\underline{y} = U\underline{x}$ και έχω $L\underline{y} = \underline{b}$

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = LU$

Να λυθεί το $A\underline{x}$ αν γνωρίζουμε την LU παραγοντοποίηση του

- ▶ $A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow LU\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow L(U\underline{x}) = \underline{b}$
- ▶ Θέτω $\underline{y} = U\underline{x}$ και έχω $L\underline{y} = \underline{b}$
- ▶ Λύνω το $L\underline{y} = \underline{b}$ για να υπολογίσω το $\underline{y}$

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = LU$

Να λυθεί το $A\underline{x}$ αν γνωρίζουμε την LU παραγοντοποίηση του

- ▶ $A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow LU\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow L(U\underline{x}) = \underline{b}$
- ▶ Θέτω $\underline{y} = U\underline{x}$ και έχω $L\underline{y} = \underline{b}$
- ▶ Λύνω το $L\underline{y} = \underline{b}$ για να υπολογίσω το $\underline{y}$
- ▶ Λύνω το $U\underline{x} = \underline{y}$ για να υπολογίσω το $\underline{x}$

Παράδειγμα

$$\text{Να λυθεί το } \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\text{Να λυθεί το } \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{L}\underline{y} = \underline{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\text{Να λυθεί το } \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{L}\underline{y} = \underline{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\text{Να λυθεί το } \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$L\underline{y} = \underline{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$U\underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\text{Να λυθεί το } \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$L\underline{y} = \underline{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$U\underline{x} = \underline{y} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παραγοντοποίηση $A = PLU$

Κάθε τετραγωνικός πίνακας A μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο ενός πίνακα αντιμετάθεσης P , ενός κάτω τριγωνικού πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο και ενός άνω τριγωνικού πίνακα U .

- ▶ Ο P καθορίζεται από τις εναλλαγές γραμμών που απαιτεί η διαδικασία της απαλοιφής με οδήγηση.
- ▶ Ο L έχει τους πολλαπλασιαστές της απαλοιφής κάτω από την διαγώνιο.
- ▶ Ο U τα στοιχεία του A όπως αυτά προκύπτουν μετά την απαλοιφή.

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$A = PLU$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} =$$

Παράδειγμα

$$A = PLU$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = PLU$

Να λυθεί το $Ax = b$ αν γνωρίζουμε την PLU παραγοντοποίηση του

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = PLU$

Να λυθεί το $Ax = b$ αν γνωρίζουμε την PLU παραγοντοποίηση του

$$\blacktriangleright Ax = b \Rightarrow PLUx = b \Rightarrow L(Ux) = P^{-1}b$$

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = PLU$

Να λυθεί το $Ax = b$ αν γνωρίζουμε την PLU παραγοντοποίηση του

- ▶ $Ax = b \Rightarrow PLUx = b \Rightarrow L(Ux) = P^{-1}b$
- ▶ Θέτω $y = Ux$ και έχω $Ly = P^{-1}b$

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = PLU$

Να λυθεί το $Ax = b$ αν γνωρίζουμε την PLU παραγοντοποίηση του

- ▶ $Ax = b \Rightarrow PLUx = b \Rightarrow L(Ux) = P^{-1}b$
- ▶ Θέτω $y = Ux$ και έχω $Ly = P^{-1}b$
- ▶ Λύνω το $Ly = P^{-1}b$ για να υπολογίσω το y

Επίλυση Συστήματος με Παραγοντοποίηση $A = PLU$

Να λυθεί το $Ax = b$ αν γνωρίζουμε την PLU παραγοντοποίηση του

- ▶ $Ax = b \Rightarrow PLUx = b \Rightarrow L(Ux) = P^{-1}b$
- ▶ Θέτω $y = Ux$ και έχω $Ly = P^{-1}b$
- ▶ Λύνω το $Ly = P^{-1}b$ για να υπολογίσω το y
- ▶ Λύνω το $Ux = y$ για να υπολογίσω το x

Παράδειγμα

Χρησιμοποιήστε την ανάλυση *PLU* του A που βρήκατε παραπάνω για να υπολογίσετε την λύση του συστήματος

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ανάλυση συμμετρικού πίνακα σε LDL^T

Θεώρημα

Κάθε συμμετρικός πίνακας A μπορεί να αναλυθεί στην μορφή $A = LDL^T$ όπου

- ▶ L κάτω τριγωνικός με μονάδες στην διαγώνιο και τους πολλαπλασιαστές κάτω από αυτή και
- ▶ D διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τα οδηγία στοιχεία.

Απόδειξη.

Αν $A = A^T$ και $A = LU \Rightarrow A = LD\tilde{U}$ τότε

$$LD\tilde{U} = (LD\tilde{U})^T = \tilde{U}^T D L^T$$

Ανάλυση συμμετρικού πίνακα σε LDL^T

Θεώρημα

Κάθε συμμετρικός πίνακας A μπορεί να αναλυθεί στην μορφή $A = LDL^T$ όπου

- ▶ L κάτω τριγωνικός με μονάδες στην διαγώνιο και τους πολλαπλασιαστές κάτω από αυτή και
- ▶ D διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τα οδηγία στοιχεία.

Απόδειξη.

Αν $A = A^T$ και $A = LU \Rightarrow A = LD\tilde{U}$ τότε

$$LD\tilde{U} = (LD\tilde{U})^T = \tilde{U}^T D L^T$$

Απο την μοναδικότητα της παραγοντοποίησης LU έχουμε

$$LD = \tilde{U}^T D \Rightarrow L = \tilde{U}^T \Rightarrow \tilde{U} = L^T$$

Άσκηση

Θεώρημα

Ο ανάστροφος του γινομένου δύο πινάκων ισούται με το ανάστροφο γινόμενο των αναστρόφων των πινάκων.

Άσκηση

Θεώρημα

Ο ανάστροφος του γινομένου δύο πινάκων ισούται με το ανάστροφο γινόμενο των αναστρέφων των πινάκων. Δηλαδή

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Άσκηση

Θεώρημα

Ο ανάστροφος του γινομένου δύο πινάκων ισούται με το ανάστροφο γινόμενο των αναστρόφων των πινάκων. Δηλαδή

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Απόδειξη.

Γράφουμε το στοιχείο του πίνακα $(AB)^T$ στην θέση i, j το οποίο είναι το στοιχείο του πίνακα AB στην θέση j, i το οποίο ισούται με το εσωτερικό γινόμενο της j γραμμής του A με την i στήλη του B

...



Άσκηση

Θεώρημα

Ο αντίστροφος του αναστρέφου ενός πίνακα ισούται με τον ανάστροφο του αντιστρέφου.

Απόδειξη.

Πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$



Προσοχή

Απο εδώ και πέρα έχουμε

$$n \neq m$$

Άνω κλιμακωτός πίνακας

Ένας πίνακας είναι σε **άνω κλιμακωτή μορφή** αν

Άνω κλιμακωτός πίνακας

Ένας πίνακας είναι σε **άνω κλιμακωτή μορφή** αν

- όλες οι μηδενικές σειρές του βρίσκονται στον κάτω μέρος του, και

Άνω κλιμακωτός πίνακας

Ένας πίνακας είναι σε **άνω κλιμακωτή μορφή** αν

- ▶ όλες οι μηδενικές σειρές του βρίσκονται στον κάτω μέρος του, και
- ▶ το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής, το οποίο λέγεται **οδηγό στοιχείο**, βρίσκεται στα δεξιά του οδηγού στοιχείου της προηγούμενης γραμμής.

Άνω κλιμακωτός πίνακας

Ένας πίνακας είναι σε **άνω κλιμακωτή μορφή** αν

- ▶ όλες οι μηδενικές σειρές του βρίσκονται στον κάτω μέρος του, και
- ▶ το πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής, το οποίο λέγεται **οδηγό στοιχείο**, βρίσκεται στα δεξιά του οδηγού στοιχείου της προηγούμενης γραμμής.

Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} \$ & * & * & * & * & * \\ 0 & \$ & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \$ & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\$ = μη-μηδενικό στοιχείο ή **οδηγό** στοιχείο, * = οτιδήποτε στοιχείο

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} =$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παραγοντοποίηση $A = PLU$ ($n \neq m$)

Κάθε $n \times m$ πίνακας A μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο ενός πίνακα αντιμετάθεσης P , ενός κάτω τριγωνικού πίνακα L με μονάδες στην διαγώνιο και ενός άνω κλιμακωτού πίνακα U .

- ▶ Ο P καθορίζεται από τις εναλλαγές γραμμών που απαιτεί η διαδικασία της απαλοιφής με οδήγηση.
- ▶ Ο L έχει τους πολλαπλασιαστές της απαλοιφής κάτω από την διαγώνιο.
- ▶ Ο U τα στοιχεία του A όπως αυτά προκύπτουν μετά την απαλοιφή.

Ορισμοί

$x_{\text{γενικη}}$: όλες οι λύσεις του $Ax = b$

Ορισμοί

$x_{\text{γενικη}}$: όλες οι λύσεις του $Ax = b$

$x_{\text{ομογενους}}$: όλες οι λύσεις του $Ax = 0$

Ορισμοί

$x_{\text{γενικη}}$: όλες οι λύσεις του $Ax = b$

$x_{\text{ομογενους}}$: όλες οι λύσεις του $Ax = 0$

$x_{\text{ειδικη}}$: μια οποιαδήποτε λύση του
 $Ax = b$

Ορισμοί

$x_{\text{γενικη}}$: όλες οι λύσεις του $Ax = b$

$x_{\text{ομογενους}}$: όλες οι λύσεις του $Ax = 0$

$x_{\text{ειδικη}}$: μια οποιαδήποτε λύση του
 $Ax = b$

Ελεύθερες μεταβλητές: όλες οι
συνιστώσες της λύσης που
δεν αντιστοιχούν σε στήλη
με οδηγό.

Υπολογισμός Γενικευμένης Λύσης $Ax = b$

1. Απαλοιφή στο $A\underline{x} = \underline{b}$ ($A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow U\underline{x} = \underline{c}$)

Υπολογισμός Γενικευμένης Λύσης $Ax = b$

1. Απαλοιφή στο $A\underline{x} = \underline{b}$ ($A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow U\underline{x} = \underline{c}$)
2. Μηδένισε τις ελεύθερες μεταβλητές και λύσε ($x_{\text{ειδική}}$)

Υπολογισμός Γενικευμένης Λύσης $Ax = b$

1. Απαλοιφή στο $A\underline{x} = \underline{b}$ ($A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow U\underline{x} = \underline{c}$)
2. Μηδένισε τις ελεύθερες μεταβλητές και λύσε ($x_{\text{ειδικη}}$)
3. Θέσε $\underline{b} = \underline{0}$ και διαδοχικά, σε κάθε ελεύθερη μεταβλητή 1 θέτοντας ταυτόχρονα τις υπόλοιπες μεταβλητές ίσες με 0 και βρες μια ομογενή λύση ($\underline{x}_{\text{ομογενους}}$)

Υπολογισμός Γενικευμένης Λύσης $Ax = b$

1. Απαλοιφή στο $A\underline{x} = \underline{b}$ ($A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow U\underline{x} = \underline{c}$)
2. Μηδένισε τις ελεύθερες μεταβλητές και λύσε ($\underline{x}_{\text{ειδικη}}$)
3. Θέσε $\underline{b} = \underline{0}$ και διαδοχικά, σε κάθε ελεύθερη μεταβλητή 1 θέτοντας ταυτόχρονα τις υπόλοιπες μεταβλητές ίσες με 0 και βρες μια ομογενή λύση ($\underline{x}_{\text{ομογενους}}$)
4. $\underline{x}_{\text{γενικη}} = \underline{x}_{\text{ειδικη}} + \underline{x}_{\text{ομογενους}}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_{\epsilon\iota\delta\iota\kappa\eta} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x_{\gamma\epsilon\nu\kappa\eta} = x_{\epsilon\iota\delta\iota\kappa\eta} + x_{\omicron\mu\omicron\gamma\epsilon\nu\omicron\varsigma}$$

$$x_{\gamma\epsilon\nu\iota\kappa\eta} = x_{\epsilon\iota\delta\iota\kappa\eta} + x_{\omicron\mu\omicron\gamma\epsilon\nu\omicron\varsigma}$$

$$x_{\gamma\epsilon\nu\iota\kappa\eta} = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_{\gamma\epsilon\nu\iota\kappa\eta} = x_{\epsilon\iota\delta\iota\kappa\eta} + x_{\omicron\mu\omicron\gamma\epsilon\nu\omicron\varsigma}$$

$$x_{\gamma\epsilon\nu\iota\kappa\eta} = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$