ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Εισηγητής: Γιώργος Τζανετόπουλος *Εξέταση Α’ Περιόδου 2024-25*

1. Υπολογίστε την ποσότητα:

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}\right)^{10}.$$

2. Έστω μιγαδικός αριθμός $z \epsilon \mathbb{C}$ για τον οποίο ισχύει: $|z| = 1$. Αποδείξτε ότι $|w| = 1$, όπου

$$w = \frac{2z-i}{iz+2}.$$

3. Λύστε την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Διερευνήστε και λύστε το σύστημα:

$$\begin{gathered} 6x - 12y + 6z = 6 \\ 3x - 5y + 5z = 13 \\ 2x - 6y + (a-2)z = \beta - 18 \end{gathered}$$

5. Για δύο διανύσματα $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}$ του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$ δείξτε ότι:

$$|\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}}|^2 = |\vec{\boldsymbol{u}}|^2 |\vec{\boldsymbol{v}}|^2 - (\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}})^2 .$$

6. Δίνεται ο 3×3 μιγαδικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Απαντήστε στα ακόλουθα ερωτήματα.

i. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A.
ii. Βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα A.
iii. Για κάθε ιδιοτιμή βρείτε τα ιδιοδιανύσματα της.

ΘΕΜΑ 1ο:		***1,50***
ΘΕΜΑ 2ο:		***1,50***
ΘΕΜΑ 3ο:		***1,50***
ΘΕΜΑ 4ο:		***2,00***
ΘΕΜΑ 5ο:		***1,50***
ΘΕΜΑ 6ο:	i	***0,50***
	ii	***0,75***
	iii	***0,75***
ΣΥΝΟΛΟ		***10,00***

	ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ	
	Τμήμα: ΗΜΜΥ	Εισηγητής:
	Εξάμ.: Α.Μ.:	ΤΖΑΝΕΤΟΠΟΥΛΟΣ
	ΜΑΘΗΜΑ: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ	Επιτηρητές:
	Ημερομηνία: 31-01-2025	
	ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ	Αίθουσα:
	ΛΥΣΕΙΣ ΤΕΛΙΚΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ	ΒΑΘΜΟΣ:

ΘΕΜΑ 1º

Ας είναι: $z = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{(1-\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} = \frac{1^2-2\sqrt{3}i+(\sqrt{3})^2 i^2}{1+(\sqrt{3})^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4} \Rightarrow z = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Καθώς $Re(z)<0$ και $Im(z)<0$ ο αριθμός z βρίσκεται στο 3º τεταρτημόριο οπότε $Arg z \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$.

Επίσης $|z|^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1 \rightarrow |z| = 1$.

Άρα η τριγωνομετρική μορφή του z είναι

$z = |z|\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$ με $|z|=1$, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ και $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta \in (\pi, 3\pi/2)$

Λύνοντας τις εξισώσεις:

$$\cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = \begin{cases} 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ \text{ή} \\ 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}$$

Καθώς $\theta \in (\pi, 3\pi/2)$ η $\theta = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$ απορρίπτεται αφού δεν υπάρχει $k \in \mathbb{Z}$ ώστε η γωνία να είναι μεταξύ π και $3\pi/2$ ενώ η $\theta = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$ ισχύει για $k=1$ και μας δίνει $\theta = \frac{4\pi}{3}$.

Ομοίως $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \theta = \begin{cases} 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \\ \text{ή} \\ 2k\pi + \pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases} \longrightarrow$

$\xrightarrow{\theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})} \theta = \frac{4\pi}{3}$.

Άρα $\operatorname{Arg} z = \theta = \frac{4\pi}{3}$ οπότε:

$$z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

Τότε από Θεώρημα De Moivre παίρνουμε:

$$z^{10} = \cos\frac{40\pi}{3} + i\sin\frac{40\pi}{3} = \cos\left(12\pi + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(12\pi + \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow z^{10} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = z.$$

ΘΕΜΑ 2ο

Ας είναι $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$: $x^2 + y^2 = 1 = |z|^2$.

Τότε $w = \dfrac{2z - i}{iz + 2} = \dfrac{2x + i2y - i}{i(x + iy) + 2} = \dfrac{2x + i(2y-1)}{(2-y) + ix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |w|^2 = \frac{(2x)^2 + (2y-1)^2}{(2-y)^2 + x^2} = \frac{4x^2 + 4y^2 - 4y + 1}{4 - 4y + y^2 + x^2} = \frac{4(x^2+y^2) - 4y + 1}{4 - 4y + (x^2+y^2)}$$

$$= \frac{4\cdot 1 + 1 - 4y}{4 + 1 - 4y} = \frac{5 - 4y}{5 - 4y} = 1 \Leftrightarrow |w|^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |w| = 1.$$

ΘΕΜΑ 3ο

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \to \Gamma_4 - \Gamma_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4-x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (4-x^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2-x^2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - \Gamma_1} (4-x^2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-x^2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (4-x^2)(1-x^2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (x^2-4)(x^2-1)(1-4) = -3(x^2-4)(x^2-1).$$

Άρα: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -3(x^2-4)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-2)(x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x+2=0$ ή $x-2=0$ ή $x+1=0$ ή $x-1=0)$

$\Leftrightarrow (x=-2$ ή $x=2$ ή $x=-1$ ή $x=1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Σχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 6 & 6 \\ 3 & -5 & 5 & 13 \\ 2 & -6 & a-2 & b-18 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_1 \to \frac{1}{6}\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 5 & 13 \\ 2 & -6 & a-2 & b-18 \end{array}\right] \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 - 2\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 3\Gamma_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & -2 & a-4 & b-20 \end{array}\right] \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 2\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & a & b \end{array}\right]$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

I) $a=0,\ b\neq 0$. Το σύστημα είναι ασυμβίβαστο (καμία λύση)

II) $a=0,\ b=0$. Το σύστημα είναι αόριστο (άπειρες λύσεις)

Πράγματι: $y+2z=10 \Rightarrow y = 10-2z$

$x-2y+z=1 \Rightarrow x = 1+2y-z \Rightarrow x = 1+2(10-2z)-z$

$\Rightarrow x = 21-5z$

Άρα $(x, y, z)^T = (21-5z,\ 10-2z,\ z)^T$, $z \in \mathbb{R}$

III) $a \neq 0$. Το σύστημα είναι συμβιβαστό (μοναδική λύση).

$az = b \Rightarrow z = b/a$

$y + 2z = 10 \Rightarrow y = 10 - 2z \Rightarrow y = 10 - 2 \cdot b/a \Rightarrow y = \frac{10a-2b}{a}$

$x - 2y + z = 1 \Rightarrow x = 1 + 2y - z \Rightarrow x = 1 + 2\frac{10a-2b}{a} - \frac{b}{a}$

$\Rightarrow x = \frac{21a-5b}{a}$

Άρα $(x, y, z)^T = \left(\frac{21a-5b}{a}, \frac{10a-2b}{a}, \frac{b}{a}\right)^T$.

ΘΕΜΑ 5ο

Αν είναι $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$ Τότε:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 =$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 =$$

$$= |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 - (\vec{u}, \vec{v})^2$$

ΘΕΜΑ 6ο

(i)

$$\underset{\det(A-\lambda I)}{P_A(\lambda)} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)\cdot\left[(3-\lambda)^2+4\right] = -(\lambda-5)\cdot\left[\lambda^2-6\lambda+9+4\right] =$$

$$= -(\lambda-5)(\lambda^2-6\lambda+13) = -(\lambda-5)(\lambda-(3-2i))(\lambda-(3+2i))$$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = -(\lambda-5)(\lambda-(3-2i))(\lambda-(3+2i))$$

(ii)

$$P_A(\lambda)=0 \Leftrightarrow \left[\lambda-5=0 \text{ ή } \lambda-(3-2i)=0 \text{ ή } \lambda-(3+2i)=0\right]$$

$$\Leftrightarrow \lambda=5 \text{ ή } \lambda=3-2i \text{ ή } \lambda=3+2i$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1=5$, $\lambda_2=3-2i$, $\lambda_3=3+2i$

(iii) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1=5$

$$(A-\lambda_1 I)\cdot\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2x_1-2x_2=0 \\ 2x_1-2x_2=0 \\ x_3\in\mathbb{R} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1=-x_2 \\ x_1=x_2 \\ x_3\in\mathbb{R} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3\in\mathbb{R} \end{Bmatrix}$$

Άρα στην ιδιοτιμή $\lambda_1=5$ αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα $(0,0,x_3)^T$, $x_3\in\mathbb{R}$ οπότε ο ιδιοχώρος αυτός παράγεται από το $v_1=(0,0,1)^T$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3-2i$

$$(A-\lambda_2 I)\cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2i & -2 & 0 \\ 2 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 2+2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2i x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2i x_2 = 0 \\ (2+2i)x_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -i x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Άρα στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3-2i$ αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα $(-ix_2, x_2, 0)$, $x_2 \in \mathbb{R}$ οπότε ο ιδιοχώρος τους παράγεται από το $\vec{V_2} = (-i, 1, 0)^T$

Τέλος για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 3+2i$

$$(A-\lambda_3 I)\cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2i & -2 & 0 \\ 2 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 2-2i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2i x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2i x_2 = 0 \\ (2-2i)x_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = i x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

Άρα στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = 3+2i$ αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα $(ix_2, x_2, 0)^T$, $x_1 \in \mathbb{R}$, οπότε ο ιδιοχώρος τους παράγεται από το $\vec{V_3} = (i, 1, 0)^T$.