



Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 1: Εισαγωγή και διανύσματα

ECE107 · Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών · ΕΛΜΕΠΑ

Δευτέρα 28 Σεπτεμβρίου 2026

Μανίκης Γιώργος - manikis@hmu.gr



Οργάνωση του μαθήματος

Πότε

- Δευτέρα 11:00 – 13:00
- Τρίτη 11:00 – 13:00

Υλικό (eClass ECE107)

- Διαφάνειες κάθε διάλεξης
- **Φυλλάδιο ασκήσεων** κάθε εβδομάδα, με λύσεις

Αξιολόγηση

Γραπτή εξέταση	90%
Ατομικές ασκήσεις	10%

Βιβλία (Εύδοξος)

- Καραγιαννάκης Δ.
- Θεοχάρη-Αποστολίδη Θ. κ.ά.



Βιβλιογραφία (Εύδοξος)

Σύγγραμμα 1 · κωδικός Ευδόξου 7711838

Καραγιαννάκης Δ., **Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα: συνοπτική θεωρία, παραδείγματα, εφαρμογές και ασκήσεις**. Δίσιγμα, 2015, 184 σελ.
Σύντομο και υπολογιστικό: πίνακες, συστήματα, LU, QR, ελάχιστα τετράγωνα.

Σύγγραμμα 2 · κωδικός Ευδόξου 68369710

Θεοχάρη-Αποστολίδη Θ., Χαραλάμπους Χ., Βαβατσούλας Χ., **Γραμμική Άλγεβρα**. Τζιόλα, 2017, 576 σελ.
Πλήρες θεωρητικό σύγγραμμα: συστήματα, χώροι, ιδιοτιμές.

Διανύσματα και μιγαδικοί: διαφάνειες και φυλλάδια του μαθήματος.



Γνωριμία

Χρησιμοποιήστε τα κινητά σας — **ανώνυμα**, κανείς δεν βλέπει ποιος απάντησε τι.

1. Πόσο άνετα νιώθετε με τα διανύσματα του Λυκείου;

A Καθόλου **B** Πολύ λίγο **Γ** Λίγο **Δ** Αρκετά **E** Πολύ

2. Τι σας έρχεται στο μυαλό όταν ακούτε «Άλγεβρα»;



Πώς περνάει κανείς αυτό το μάθημα

- Έρχεται στο μάθημα. Κάθε διάλεξη αποτελεί συνέχεια της προηγούμενης.
- Λύνει το φυλλάδιο την ίδια εβδομάδα. Όχι στο τέλος του εξαμήνου.

Η Γραμμική Άλγεβρα **δεν είναι δύσκολη**, είναι όμως **σωρευτική**: χρειάζεται λίγη δουλειά **κάθε εβδομάδα**.



Περιεχόμενα του μαθήματος

	Ενότητα	Δίωρα
A	Διανύσματα & γεωμετρία	1 – 4
B	Μιγαδικοί αριθμοί	5 – 6
Γ	Γραμμικά συστήματα (Gauss)	7 – 10
Δ	Διανυσματικές εξισώσεις	11 – 13
E	Μετασχηματισμοί & πίνακες	14 – 19
ΣΤ	Ορίζουσες	20 – 21
Z	Χώροι, ιδιοτιμές, ελάχιστα τετράγωνα	22 – 27



Τι είναι η Γραμμική Άλγεβρα;

Τα μαθηματικά για **πολλές ποσότητες μαζί**, που συνδέονται με **απλές (γραμμικές) σχέσεις**.

Ένας άγνωστος (Λύκειο):

$$3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

Πολλοί άγνωστοι:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 &= -11 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Στο τέλος του εξαμήνου θα ξέρουμε **πότε** ένα σύστημα έχει λύση, **πόσες** λύσεις έχει και **πώς** τις βρίσκουμε.



Εφαρμογές στη μηχανική

- **Κυκλώματα:** οι νόμοι Kirchhoff δίνουν γραμμικά συστήματα
- **Γραφικά:** κάθε περιστροφή περιγράφεται από πίνακα
- **Ρομποτική:** η θέση ενός βραχίονα είναι γινόμενο πινάκων
- **Σήματα:** φίλτρα, μετασχηματισμός Fourier
- **Εικόνες:** μια εικόνα είναι πίνακας από pixels
- **Τεχνητή νοημοσύνη:** τα νευρωνικά δίκτυα βασίζονται σε πολλαπλασιασμούς πινάκων

Σχεδόν κάθε μάθημα του Τμήματος θα τη χρησιμοποιήσει.



Στόχοι της διάλεξης

Στο τέλος θα μπορείτε να:

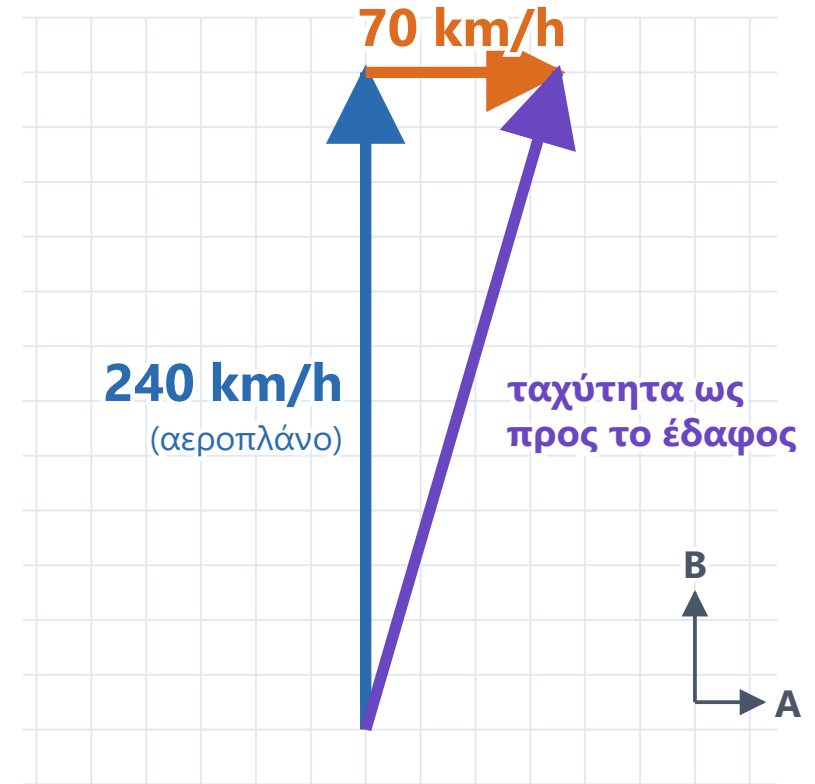
- Εξηγήσετε τι είναι **διάνυσμα**, γεωμετρικά και αλγεβρικά.
- Βρίσκετε το διάνυσμα από ένα σημείο **A** σε ένα σημείο **B**.
- Κάνετε **πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό** με αριθμό.
- Υπολογίζετε **μέτρο** (μήκος) και **απόσταση** δύο σημείων.
- Φτιάχνετε **μοναδιαίο** διάνυσμα.
- Λύνετε ένα απλό πρόβλημα **ταχυτήτων** και **δυνάμεων**.

Ένα πρόβλημα

Πρόβλημα

Αεροπλάνο πετάει **βόρεια** με 240 km/h .
Άνεμος φυσάει **ανατολικά** με 70 km/h .

- Πόσο γρήγορα κινείται **πραγματικά**;
- Προς τα πού πάει τελικά;
- Δεν αρκεί να προσθέσουμε $240 + 70$: οι κατευθύνσεις διαφέρουν.





Βαθμωτά και διανυσματικά μεγέθη

Βαθμωτό

Ένας αριθμός φτάνει.

- Θερμοκρασία 25°C
- Αντίσταση $220\ \Omega$
- Μάζα $70\ \text{kg}$

Αν η κατεύθυνση επηρεάζει το αποτέλεσμα, το μέγεθος είναι **διανυσματικό**.

Διανυσματικό

Χρειάζεται μέτρο + κατεύθυνση.

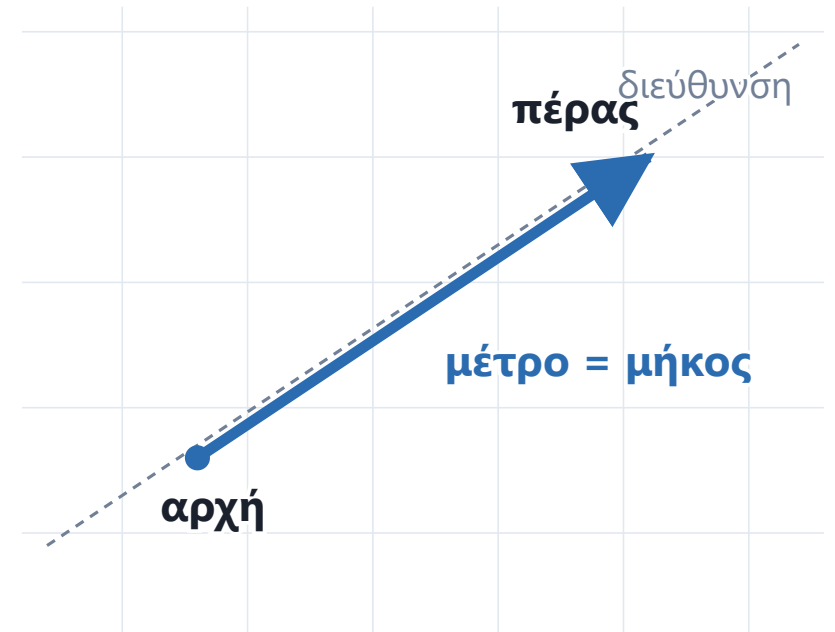
- Ταχύτητα $240\ \text{km/h}$ **βόρεια**
- Δύναμη $50\ \text{N}$ **προς τα κάτω**
- Ηλεκτρικό πεδίο

Τι είναι ένα διάνυσμα

Γεωμετρικά: ένα βέλος.

- **Μέτρο:** πόσο μακρύ είναι.
- **Διεύθυνση:** σε ποια ευθεία βρίσκεται.
- **Φορά:** προς τα πού δείχνει η μύτη.

Γράφουμε $\mathbf{v}$ (έντονο) στις διαφάνειες.
Στο χαρτί γράφουμε $\vec{v}$ (πάντα με βέλος).

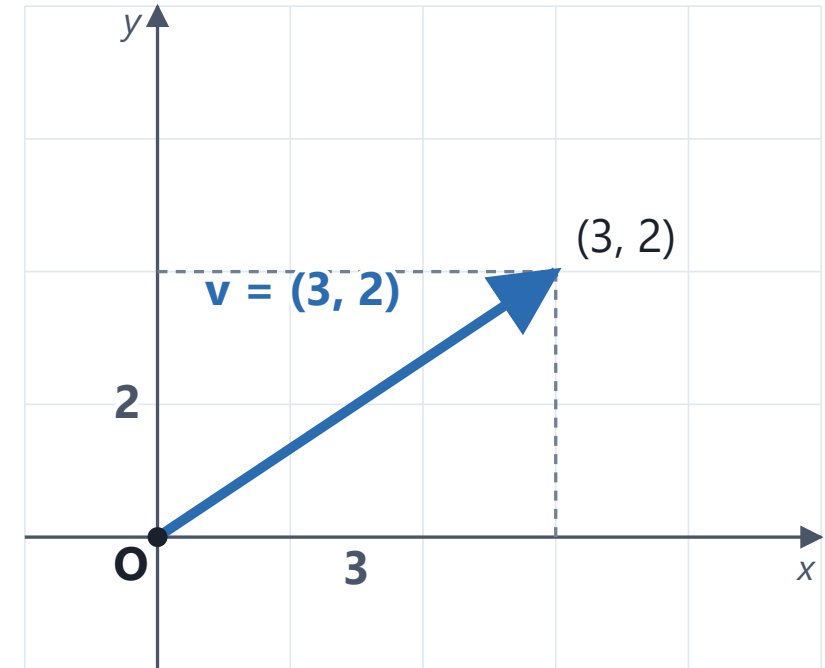


Διάνυσμα στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$

Το βέλος περιγράφεται με **δύο αριθμούς**, τις **συνιστώσες**:

$$\mathbf{v} = (3, 2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- 1η συνιστώσα: **3 βήματα δεξιά** (άξονας x).
- 2η συνιστώσα: **2 βήματα πάνω** (άξονας y).
- Ως γραμμή ή ως στήλη, είναι **το ίδιο** διάνυσμα.



Διάνυσμα από σημείο σε σημείο

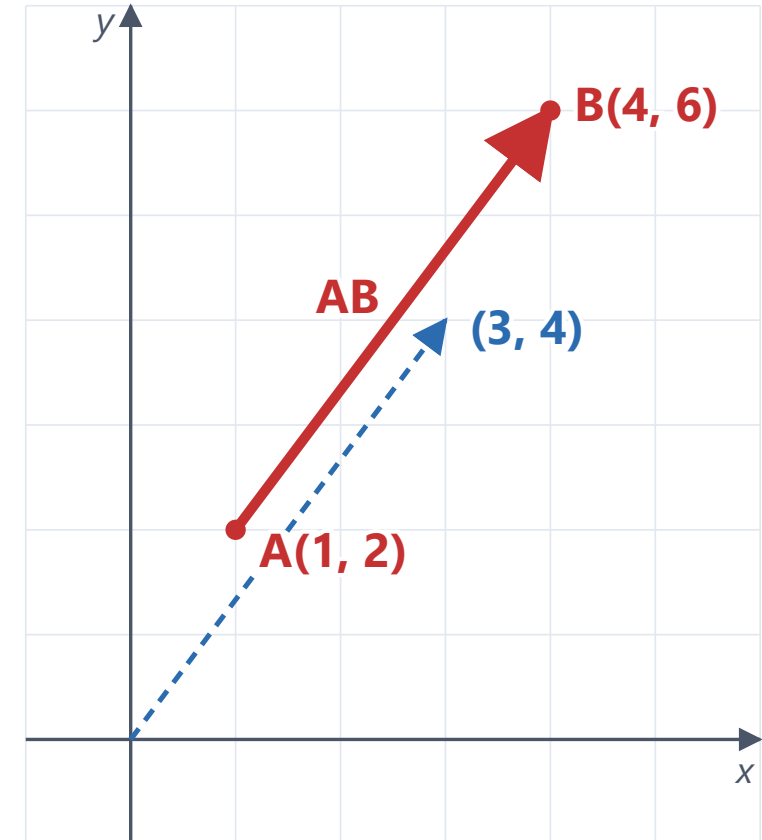
Ορισμός 1.1 (τέλος μείον αρχή)

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

$$A(1, 2), B(4, 6)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 1, 6 - 2) = (3, 4)$$

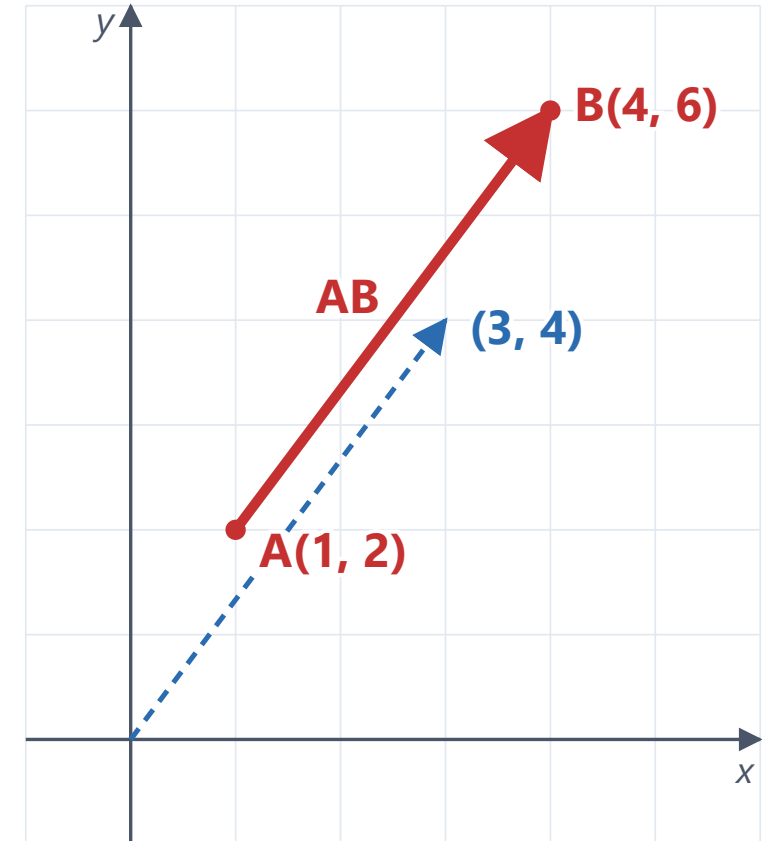
Από το A , με 3 βήματα δεξιά και 4 πάνω, φτάνουμε στο B .



Ελεύθερα διανύσματα

- Το $\overrightarrow{AB}$ και το βέλος από το O στο $(3, 4)$ είναι **το ίδιο διάνυσμα**.
- Ίδιο μήκος και ίδια κατεύθυνση: **η θέση δεν μετράει**.
- Μπορούμε να «σύρουμε» ένα διάνυσμα όπου θέλουμε.

Αλλά: $\overrightarrow{BA} = A - B = (-3, -4) \neq \overrightarrow{AB}$
Ίδιο μήκος, **αντίθετη φορά**.

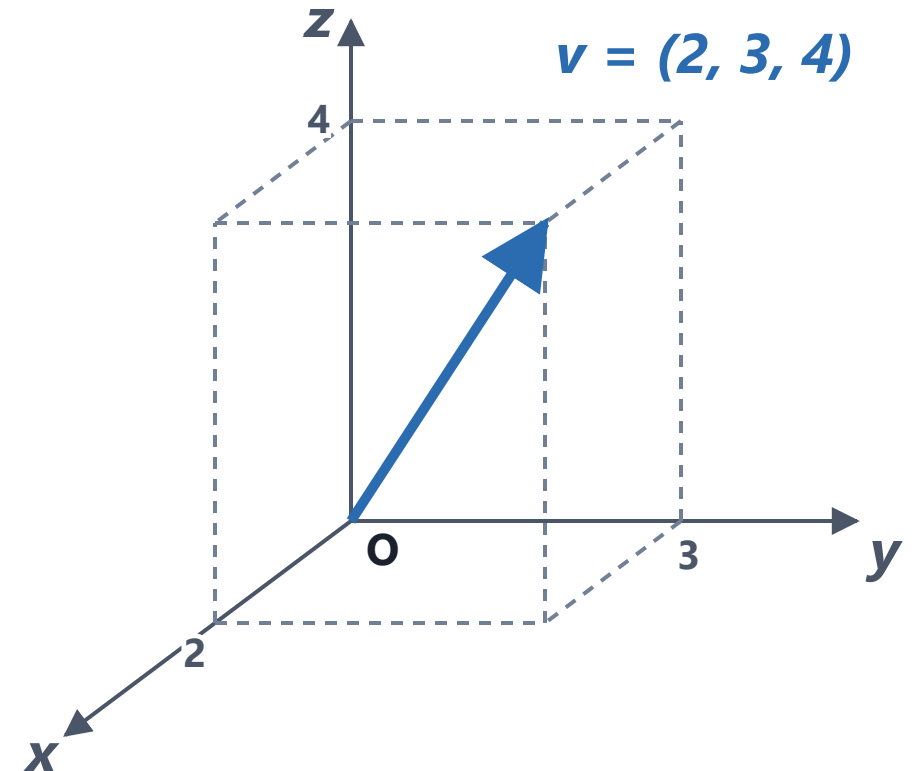


Διάνυσμα στον χώρο $\mathbb{R}^3$

Στον χώρο: **τρεις** αριθμοί.

$$\mathbf{v} = (2, 3, 4)$$

- 2 κατά x , 3 κατά y , 4 κατά z .
- Όλοι οι κανόνες ισχύουν **ίδιοι**.
- Απλώς **μία** συνιστώσα παραπάνω.





Ο χώρος $\mathbb{R}^n$

Διάνυσμα = **λίστα από n αριθμούς** με σειρά. Δεν χρειάζεται να το «δούμε».

Παράδειγμα	Διάνυσμα	Χώρος
Χρώμα pixel (R, G, B)	(255, 128, 0)	$\mathbb{R}^3$
Τάσεις σε 4 κόμβους κυκλώματος	(5, 3.2, 1.8, 0)	$\mathbb{R}^4$
Ήχος 1 δευτερολέπτου	44 100 δείγματα	$\mathbb{R}^{44100}$

Στα κυκλώματα θα λύνουμε για **διανύσματα τάσεων και ρευμάτων**.



Ισότητα & μηδενικό διάνυσμα

Ορισμός 1.2 (ισότητα)

Δύο διανύσματα είναι ίσα $\Leftrightarrow$ **όλες** οι συνιστώσες τους είναι ίσες, μία προς μία.

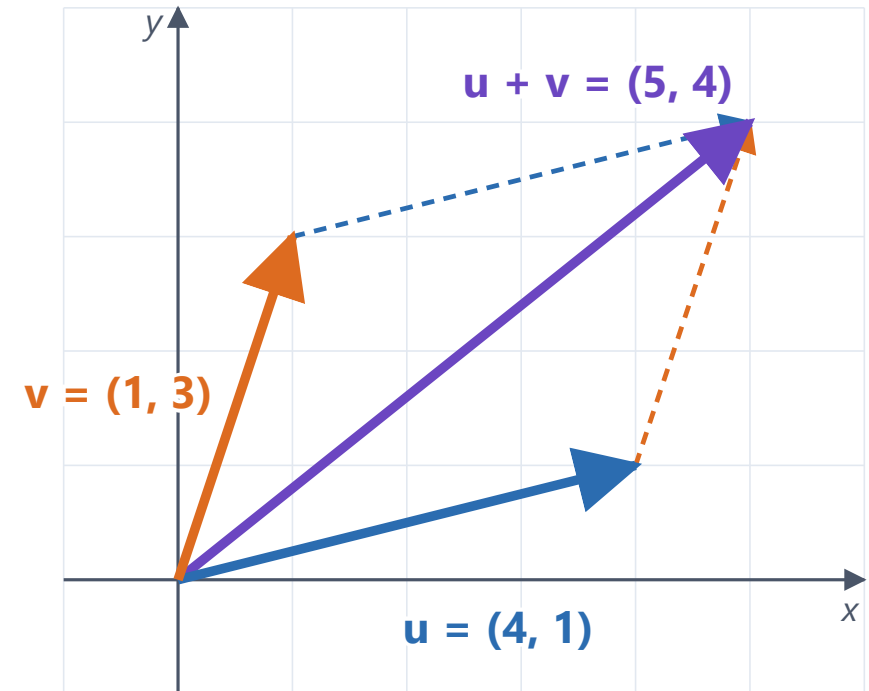
$$(x + 1, 2y) = (4, -6) \Rightarrow x + 1 = 4 \text{ και } 2y = -6 \Rightarrow x = 3, y = -3$$

- **Η σειρά μετράει:** $(1, 2) \neq (2, 1)$.
- **Μηδενικό:** $\mathbf{0} = (0, 0)$ ή $(0, 0, 0)$. Μήκος 0, καμία κατεύθυνση.

Ορισμός 1.3 (πρόσθεση)

$$(4, 1) + (1, 3) = (4 + 1, 1 + 3) = (5, 4)$$

- **Κανόνας τριγώνου:** η αρχή του $\mathbf{v}$ στη μύτη του $\mathbf{u}$.
- Το άθροισμα: από την αρχή του $\mathbf{u}$ στη μύτη του $\mathbf{v}$.
- Φυσικά: δύο μετακινήσεις στη σειρά.

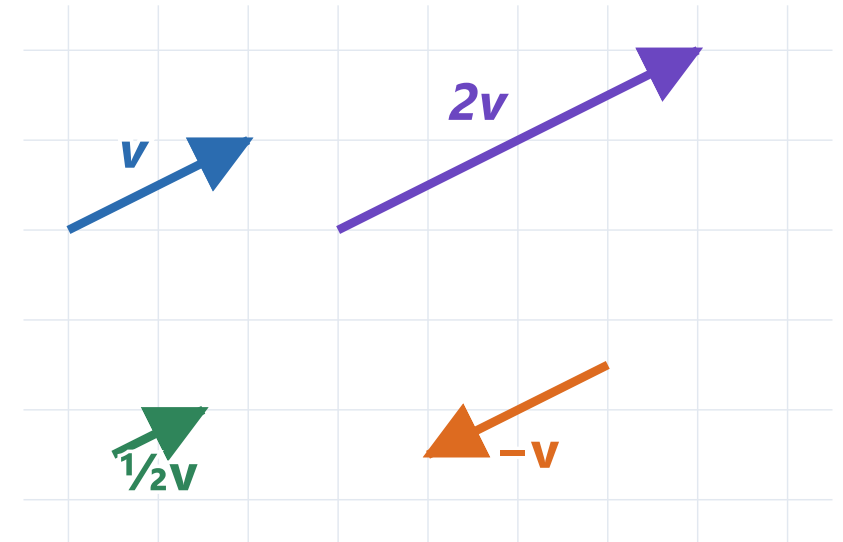


Πολλαπλασιασμός με αριθμό

Ορισμός 1.4 (πολλαπλασιασμός με αριθμό)

$$2(2, 1) = (2 \cdot 2, 2 \cdot 1) = (4, 2)$$

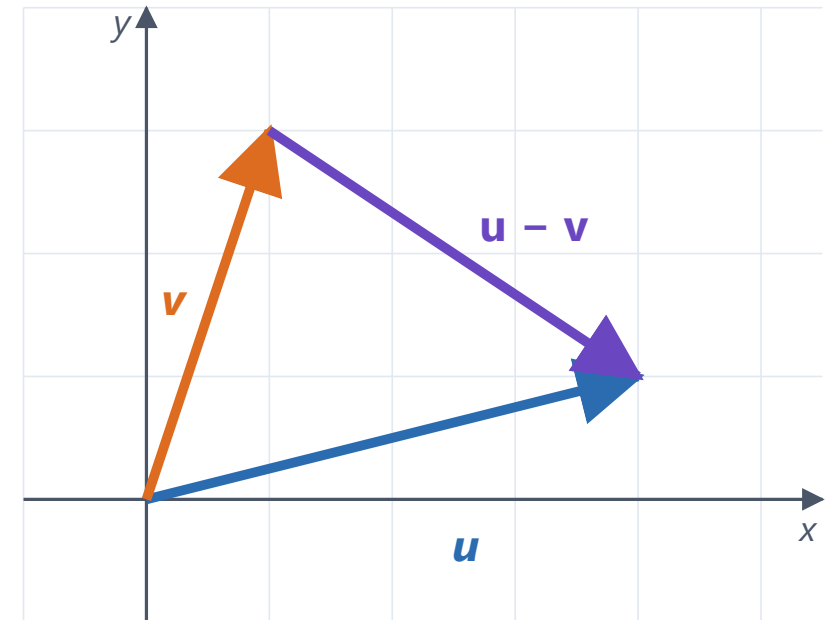
- $c > 1$: μεγαλώνει, ίδια φορά.
- $0 < c < 1$: μικραίνει, ίδια φορά.
- $c < 0$: γυρνάει ανάποδα.
- Το $c \mathbf{v}$ είναι πάντα παράλληλο στο $\mathbf{v}$.



Ορισμός 1.5 (αφαίρεση)

$$(4, 1) - (1, 3) = (4 - 1, 1 - 3) = (3, -2)$$

- $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.
- Γεωμετρικά: από τη μύτη του $\mathbf{v}$ στη μύτη του $\mathbf{u}$.
- Είναι ο ίδιος κανόνας με το «τέλος μείον αρχή».





Ιδιότητες των πράξεων

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

$$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$$

$$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

Οι πράξεις με διανύσματα γίνονται **όπως με αριθμούς**.

Εξαίρεση: το γινόμενο δύο διανυσμάτων χρειάζεται ειδικό ορισμό (Διάλεξη 2).



Παράδειγμα 1

$\mathbf{u} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 4, -2)$. Υπολογίστε το $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

Βήμα 1. Πρώτα οι πολλαπλασιασμοί, σε κάθε συνιστώσα:

$$3\mathbf{u} = (3 \cdot 2, 3 \cdot (-1), 3 \cdot 3) = (6, -3, 9)$$

$$2\mathbf{v} = (2 \cdot 1, 2 \cdot 4, 2 \cdot (-2)) = (2, 8, -4)$$

Βήμα 2. Μετά η αφαίρεση, θέση προς θέση:

$$3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = (6 - 2, -3 - 8, 9 - (-4)) = (4, -11, 13)$$

Προσοχή: $9 - (-4) = 9 + 4 = 13$. Εδώ γίνονται τα περισσότερα λάθη.



Ψηφοφορία Α: πράξεις

1. $(2, -1) + (-3, 4) = ?$

☐ Α $(-1, 3)$ ☐ Β $(5, -5)$ ☐ Γ $(-1, -3)$ ☐ Δ $(-6, -4)$

2. $(5, 2) - (1, 4) = ?$

☐ Α $(4, -2)$ ☐ Β $(6, 6)$ ☐ Γ $(4, 2)$ ☐ Δ $(-4, 2)$

3. $(2, 5) + 3 = ?$

☐ Α $(5, 8)$ ☐ Β $(6, 15)$ ☐ Γ δεν ορίζεται ☐ Δ $(2, 8)$



Microsoft Forms



Διάλειμμα

Συνεχίζουμε με μέτρο, απόσταση, μοναδιαίο διάνυσμα και εφαρμογές

Μέτρο (μήκος) διανύσματος

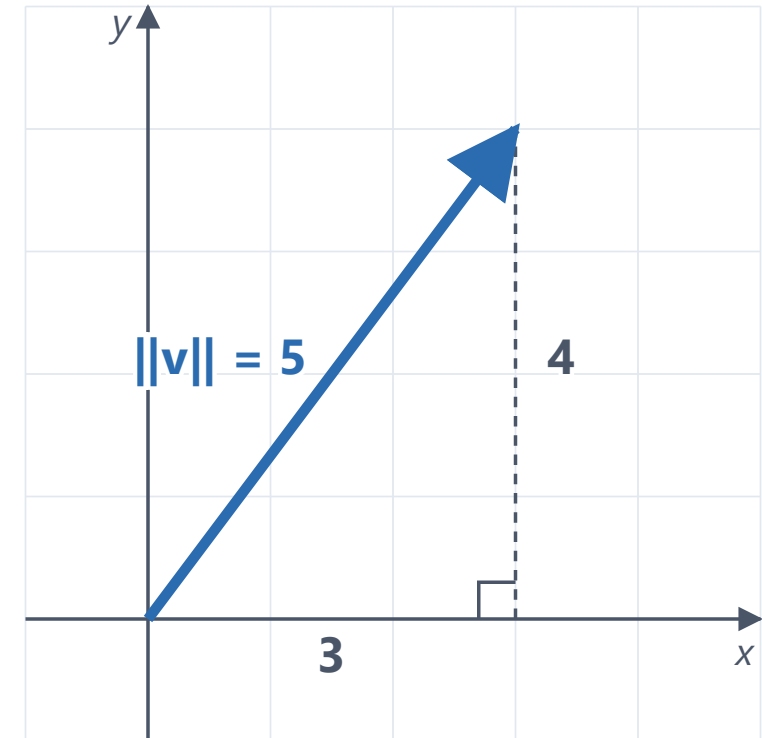
Ορισμός 1.6 (μέτρο)

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$$\text{Στο } \mathbb{R}^3: \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

$$\|(3, 4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

- Τετράγωνα, άθροισμα, ρίζα (Πυθαγόρειο θεώρημα).
- Πάντα $\|\mathbf{v}\| \geq 0$.





Παράδειγμα 2: απόσταση δύο σημείων

Πόση είναι η απόσταση των $P(1, -2, 3)$ και $Q(3, 1, 9)$;

Ιδέα: απόσταση = **μήκος** του διανύσματος που τα ενώνει.

Βήμα 1. Τέλος μείον αρχή:

$$\overrightarrow{PQ} = (3 - 1, 1 - (-2), 9 - 3) = (2, 3, 6)$$

Βήμα 2. Μέτρο:

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$



Μέτρο πολλαπλασίου

$$\|c \mathbf{v}\| = |c| \cdot \|\mathbf{v}\|$$

- Διπλάσιο διάνυσμα έχει **διπλάσιο μήκος**.
- Το μείον αλλάζει **μόνο τη φορά**, όχι το μήκος.

$$\mathbf{v} = (3, 4), \quad \|\mathbf{v}\| = 5. \quad \text{Τότε} \quad \|-3\mathbf{v}\| = |-3| \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15.$$

$$\begin{aligned} \text{Έλεγχος: } -3\mathbf{v} &= (-3 \cdot 3, -3 \cdot 4) = (-9, -12), \\ \sqrt{(-9)^2 + (-12)^2} &= \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15 \quad \checkmark \end{aligned}$$



Μοναδιαίο διάνυσμα

Ορισμός 1.7 (μοναδιαίο διάνυσμα)

Μοναδιαίο λέγεται ένα διάνυσμα με **μήκος 1**. Το μοναδιαίο στην κατεύθυνση του $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ είναι

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v}$$

- Διαιρούμε **κάθε συνιστώσα** του $\mathbf{v}$ με το μήκος του.
- Η κατεύθυνση **δεν αλλάζει**: πολλαπλασιάζουμε με θετικό αριθμό.
- Το μήκος γίνεται 1: αν $\|\mathbf{v}\| = 3$, τότε $\|\frac{1}{3}\mathbf{v}\| = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$.



Παράδειγμα 3: μοναδιαίο διάνυσμα

Βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\mathbf{v} = (2, -1, 2)$.

Βήμα 1. Μήκος του $\mathbf{v}$: τετράγωνα, άθροισμα, ρίζα.

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

Βήμα 2. Διαιρούμε κάθε συνιστώσα με το 3:

$$\hat{\mathbf{v}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Βήμα 3 (έλεγχος). Το μήκος του $\hat{\mathbf{v}}$ πρέπει να είναι 1:

$$\|\hat{\mathbf{v}}\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1 \checkmark$$



Τα κανονικά μοναδιαία $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

Στο $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{i} = (1, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1)$$

$$(3, 2) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

Στο $\mathbb{R}^3$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ κατά x, y, z

$$(2, 3, 4) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

- Κάθε διάνυσμα **φτιάχνεται** από αυτά τα βασικά.
- Στη Φυσική: $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$. Σε λίγες εβδομάδες: **βάση**.



Συνήθη λάθη

$$\overrightarrow{AB} = A - B \quad \chi \quad \text{Σωστό: τέλος μείον αρχή, } B - A$$

$$(-3)^2 = -9 \quad \chi \quad \text{Σωστό: } (-3)^2 = +9$$

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad \chi \quad \text{Γενικά } \textbf{δεν} \text{ ισχύει (επόμενη διαφάνεια).}$$

$$(2, 5) + 3 \quad \chi \quad \textbf{Δεν} \text{ προσθέτουμε αριθμό σε διάνυσμα.}$$

Γιατί $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \neq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

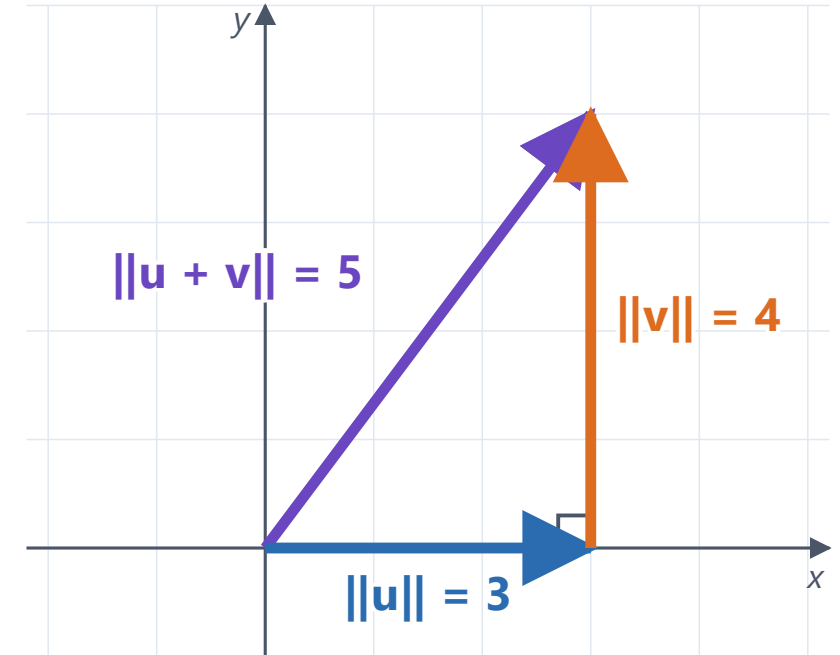
Παράδειγμα: $\mathbf{u} = (3, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 4)$

Βήμα 1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3 + 0, 0 + 4) = (3, 4)$

Βήμα 2. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Βήμα 3. $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| = 3 + 4 = 7$

- Τα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ είναι οι **κάθετες πλευρές**, το $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ η **υποτείνουσα**.
- Η ευθεία διαδρομή είναι **συντομότερη** από τον δρόμο «δεξιά και μετά πάνω».



Τριγωνική ανισότητα

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

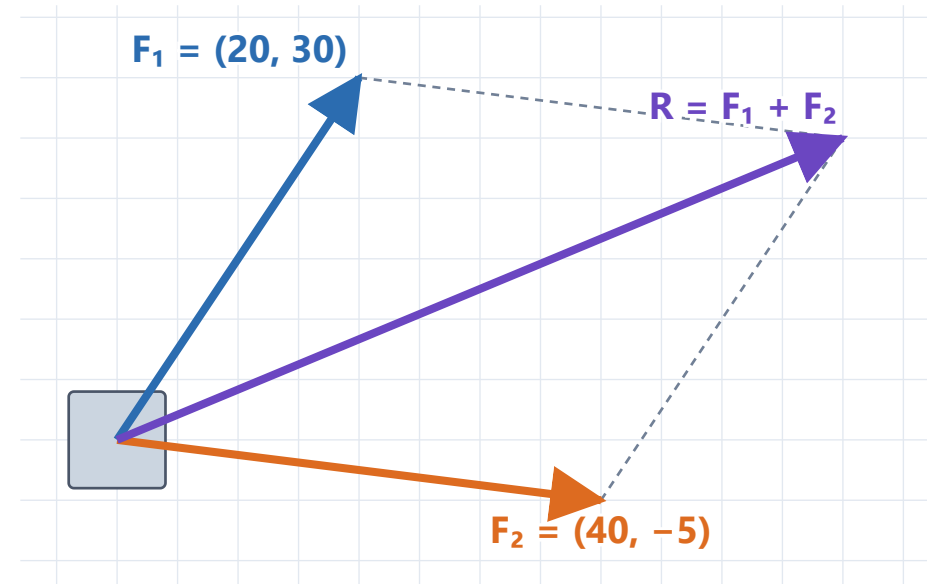
Εφαρμογή 1: συνισταμένη δυνάμεων

Δύο σχοινιά τραβούν κιβώτιο:

$$\mathbf{F}_1 = (20, 30) \text{ N}$$

$$\mathbf{F}_2 = (40, -5) \text{ N}$$

Συνολική δύναμη = **άθροισμα**.



Βήμα 1. $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (20 + 40, 30 - 5) = (60, 25)$

Βήμα 2. $\|\mathbf{R}\| = \sqrt{60^2 + 25^2} = \sqrt{3600 + 625} = \sqrt{4225} = 65 \text{ N}$

Εφαρμογή 2: το αεροπλάνο

Βήμα 1. Άξονες: x = ανατολή, y = βορράς.

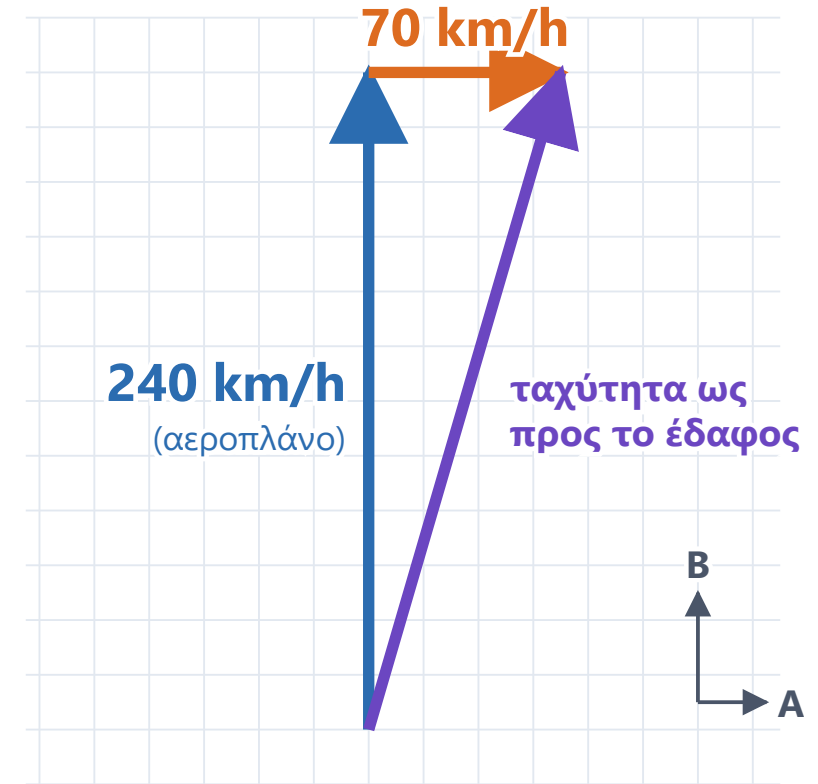
$$\mathbf{a} = (0, 240), \quad \mathbf{w} = (70, 0)$$

Βήμα 2. Πραγματική ταχύτητα = άθροισμα:

$$\mathbf{a} + \mathbf{w} = (0 + 70, 240 + 0) = (70, 240)$$

Βήμα 3. Μέτρο:

$$\sqrt{70^2 + 240^2} = \sqrt{4900 + 57600} = \sqrt{62500} = \mathbf{250 \text{ km/h}}$$



Εφαρμογή 2: η γωνία της πορείας

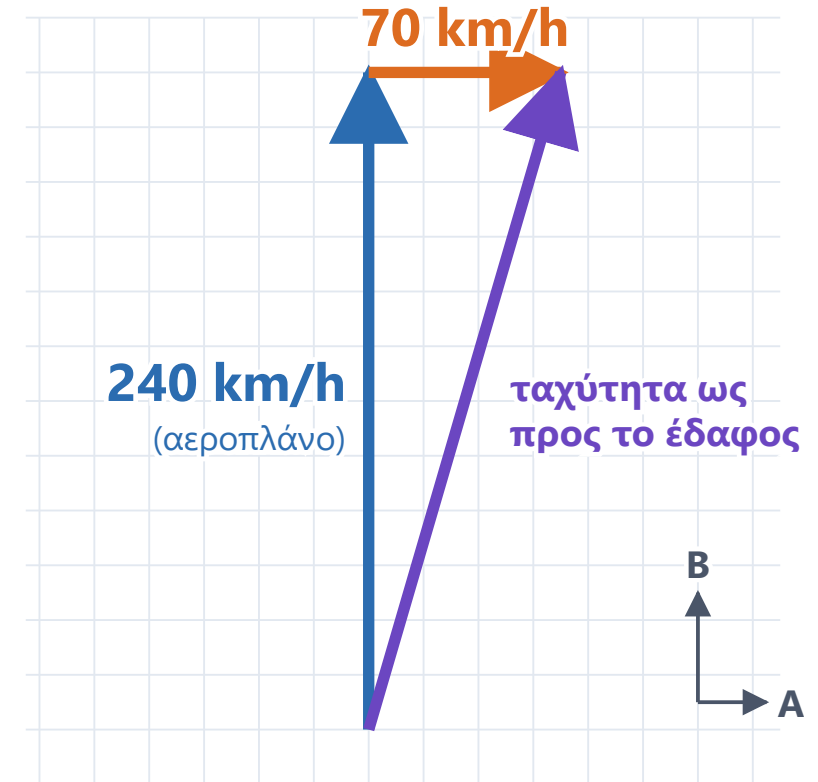
Βήμα 4. Στο ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος, εφαπτομένη = απέναντι / προσκείμενη πλευρά:

$$\tan \theta = \frac{70}{240} \approx 0.29$$

Με κομπιουτεράκι ($\tan^{-1}$): $\theta \approx 16^\circ$

250 km/h, περίπου 16° ανατολικά του βορρά.

Σκεφτείτε: προς τα πού πρέπει να στρίψει ο πιλότος για να πάει **ακριβώς** βόρεια;





Ψηφοφορία Β: μέτρο

1. $A(1, 1)$, $B(3, 4)$. Το $\overrightarrow{AB}$ είναι:
- ☐ Α (2, 3) ☐ Β $(-2, -3)$ ☐ Γ (4, 5) ☒ Δ (3, 4)
2. $\|(6, 8)\| = ?$
- ☐ Α 14 ☐ Β 10 ☐ Γ 100 ☒ Δ 48
3. Το $-2\mathbf{v}$ σε σχέση με το $\mathbf{v}$:
- ☐ Α ίδια φορά, διπλό μήκος
☐ Β αντίθετη φορά, διπλό μήκος
☐ Γ αντίθετη φορά, μισό μήκος



Microsoft Forms



Άσκηση στην τάξη (10')

$$\mathbf{u} = (1, 2), \mathbf{v} = (3, -1)$$

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = ?$

2. $2\mathbf{u} - \mathbf{v} = ?$

3. $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = ?$

$$A(2, 0, 1), B(4, 3, 7)$$

4. Πόση είναι η απόσταση των A και B ;



1. $(1 + 3, 2 + (-1)) = (4, 1)$

2. $2\mathbf{u} = (2, 4),$
 $(2 - 3, 4 - (-1)) = (-1, 5)$

3.

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (1 - 3, 2 - (-1)) = (-2, 3)$$
$$\sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3.6$$

4.

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 2, 3 - 0, 7 - 1) = (2, 3, 6)$$
$$\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$$

Βρήκατε $(-2, -3, -6)$ στο 4; Κάνατε $A - B$. Το μήκος βγαίνει πάλι 7, **αλλά** το διάνυσμα είναι λάθος.



Σύνοψη

Από A σε B	$\overrightarrow{AB} = B - A$ (τέλος μείον αρχή)
Πρόσθεση / αφαίρεση	συνιστώσα προς συνιστώσα
Αριθμός $\times$ διάνυσμα	κάθε συνιστώσα, παράλληλο διάνυσμα
Μέτρο	$\ \mathbf{v}\ = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
Απόσταση P, Q	$\ \overrightarrow{PQ}\ $
Μοναδιαίο	$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} / \ \mathbf{v}\ $

Για το σπίτι: Φυλλάδιο 1 (eClass). **Επόμενη διάλεξη:** εσωτερικό γινόμενο, γωνίες, καθετότητα.