



Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 2: Εσωτερικό γινόμενο

ECE107 · Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών · ΕΛΜΕΠΑ

Τρίτη 29 Σεπτεμβρίου 2026

Μανίκης Γιώργος - manikis@hmu.gr



Ανακεφαλαίωση

Από A σε B	$\overrightarrow{AB} = B - A$
Πρόσθεση	$(4, 1) + (1, 3) = (5, 4)$
Αριθμός $\times$ διάνυσμα	$2(2, 1) = (4, 2)$
Μέτρο	$\ (3, 4)\ = \sqrt{9 + 16} = 5$

Ξέρουμε να **προσθέτουμε** διανύσματα. Δεν ξέρουμε ακόμα να τα **πολλαπλασιάζουμε** μεταξύ τους.



Επανάληψη Διάλεξης 1

1. Απόσταση των σημείων $P(1, 1)$ και $Q(4, 5)$;

☐ A 5 ☐ B 7 ☐ Γ 25 ☐ Δ $\sqrt{7}$

2. Ποιο διάνυσμα είναι μοναδιαίο;

☐ A $(1, 1)$ ☐ B $(1, -1)$ ☐ Γ $(0.5, 0.5)$ ☐ Δ $(0.6, 0.8)$

3. Πάντα ισχύει $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

☐ A Σωστό ☐ B Λάθος



Microsoft Forms



Στόχοι της διάλεξης

Στο τέλος θα μπορείτε να:

- Υπολογίζετε το **εσωτερικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων.
- Βρίσκετε τη **γωνία** δύο διανυσμάτων.
- Ελέγχετε αν δύο διανύσματα είναι **κάθετα**, με μία πράξη.
- Βρίσκετε την **προβολή** ενός διανύσματος σε ένα άλλο.
- Υπολογίζετε το **έργο** μιας δύναμης.

Ένα πρόβλημα

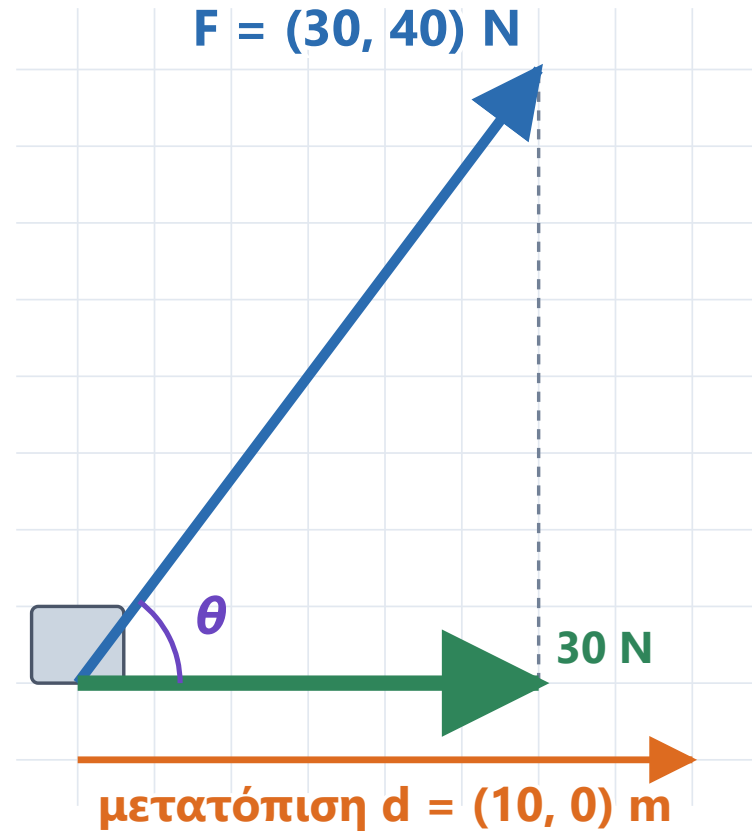
Πρόβλημα

Τραβάμε κιβώτιο με δύναμη $\mathbf{F} = (30, 40)$ N.

Μετακινείται **10 m οριζόντια**.

Πόσο **έργο** κάναμε;

- Η δύναμη τραβάει **λοξά**.
- Μόνο ένα **κομμάτι** της σπρώχνει το κιβώτιο μπροστά.
- Πώς βρίσκουμε αυτό το κομμάτι;





Εσωτερικό γινόμενο: ορισμός

Ορισμός 2.1 (εσωτερικό γινόμενο)

$$\text{Στο } \mathbb{R}^2: \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

$$\text{Στο } \mathbb{R}^3: \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Πολλαπλασιάζουμε **ανά θέση** και **προσθέτουμε** τα γινόμενα.

Λέγεται και **βαθμωτό γινόμενο** (dot product).

Το αποτέλεσμα είναι **αριθμός**, όχι διάνυσμα!



Παράδειγμα 1

Υπολογίστε το $(1, 2, 3) \cdot (4, -5, 6)$.

Βήμα 1. Πολλαπλασιάζουμε ανά θέση:

$$1 \cdot 4 = 4, \quad 2 \cdot (-5) = -10, \quad 3 \cdot 6 = 18$$

Βήμα 2. Προσθέτουμε:

$$4 - 10 + 18 = 12$$

Αποτέλεσμα: ο **αριθμός** 12. Όχι $(4, -10, 18)$!



Παράδειγμα 2: στο επίπεδο

Υπολογίστε τα $(\alpha) (2, -3) \cdot (4, 1)$ $(\beta) (-1, 5) \cdot (3, 2)$.

(α) Βήμα 1. $2 \cdot 4 = 8$, $(-3) \cdot 1 = -3$

Βήμα 2. $8 + (-3) = 5$

(β) Βήμα 1. $(-1) \cdot 3 = -3$, $5 \cdot 2 = 10$

Βήμα 2. $-3 + 10 = 7$

Προσοχή στα πρόσημα: $(-3) \cdot 1 = -3$, όχι $+3$.



Το εσωτερικό γινόμενο στην καθημερινότητα

Λογαριασμός σούπερ μάρκετ

Ποσότητες $\mathbf{q} = (2, 3, 1)$: ψωμιά,
γάλατα, αυγά

Τιμές $\mathbf{p} = (1.20, 1.50, 3.00) \text{ €}$

$$\begin{aligned}\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} &= 2 \cdot 1.20 + 3 \cdot 1.50 + 1 \cdot 3.00 \\ &= 2.40 + 4.50 + 3.00 = 9.90 \text{ €}\end{aligned}$$

Σταθμισμένος μέσος όρος

Βαθμοί $\mathbf{g} = (8, 6, 9)$

Βάρη $\mathbf{w} = (0.5, 0.3, 0.2)$

$$\begin{aligned}\mathbf{g} \cdot \mathbf{w} &= 8 \cdot 0.5 + 6 \cdot 0.3 + 9 \cdot 0.2 \\ &= 4 + 1.8 + 1.8 = 7.6\end{aligned}$$

«Πολλαπλασιάζω ανά ζεύγος και προσθέτω»: αυτό ακριβώς κάνει το εσωτερικό γινόμενο.



Ερμηνεία

- Το $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ μετράει **πόσο «συμφωνούν»** δύο διανύσματα.
- **Μεγάλο Θετικό:** δείχνουν περίπου **προς τα ίδια**.
- **Μηδέν:** είναι **κάθετα**.
- **Αρνητικό:** δείχνουν περίπου **αντίθετα**.

$$(1, 0) \cdot (1, 0) = 1 \quad (1, 0) \cdot (0, 1) = 0 \quad (1, 0) \cdot (-1, 0) = -1$$



Ιδιότητες

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

$$(c \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

- Η σειρά **δεν** μετράει.
- «Ανοίγουμε παρενθέσεις» όπως με αριθμούς.
- Οι αριθμοί **βγαίνουν έξω**.

Άρα λογαριάζουμε με το $\cdot$ σχεδόν όπως με τον συνηθισμένο πολλαπλασιασμό.

Πρόταση 2.1

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \|\mathbf{v}\|^2$$

- Το γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του δίνει το **τετράγωνο του μήκους**.
- Άρα: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$.

$$\mathbf{v} = (2, -1, 2): \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot 2 + (-1)(-1) + 2 \cdot 2 = 4 + 1 + 4 = 9$$

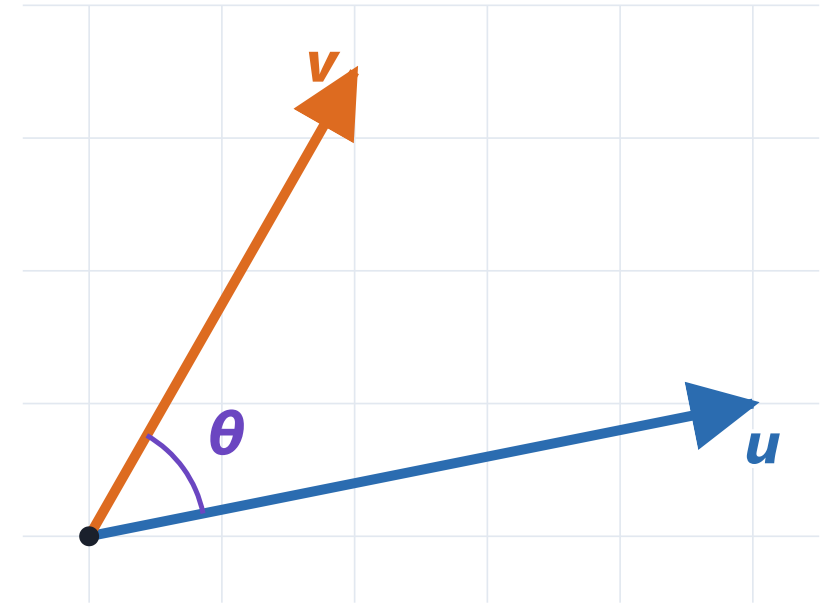
$$\text{Άρα } \|\mathbf{v}\| = \sqrt{9} = 3.$$

Η γεωμετρική σημασία

Πρόταση 2.2 (γωνία)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

- θ : η γωνία ανάμεσά τους, από 0° έως 180° .
- **Δύο τρόποι** για το ίδιο νόημα: με συνιστώσες ή με μήκη και γωνία.
- Συνδυάζοντάς τους, **βρίσκουμε τη γωνία**.





Πώς αλλάζει το $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ με τη γωνία

Κρατάμε σταθερά τα μήκη, $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = 3$, και αλλάζουμε **μόνο τη γωνία**:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2 \cdot 3 \cdot \cos \theta = 6 \cos \theta$$

θ	0°	60°	90°	120°	180°
$\cos \theta$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	6	3	0	-3	-6

- **Ίδια κατεύθυνση** (0°): το μεγαλύτερο δυνατό, $\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$.
- **Κάθετα** (90°): μηδέν.
- **Αντίθετα** (180°): το μικρότερο δυνατό, $-\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$.



Υπολογισμός της γωνίας

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

- **Βήμα 1.** Υπολογίζω το $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
- **Βήμα 2.** Υπολογίζω τα μήκη $\|\mathbf{u}\|$ και $\|\mathbf{v}\|$.
- **Βήμα 3.** Διαιρώ και βρίσκω το $\cos \theta$.
- **Βήμα 4.** Βρίσκω τη γωνία (πίνακας ή κομπιουτεράκι).

Έλεγχος: πάντα $-1 \leq \cos \theta \leq 1$.



Χρήσιμες τιμές συνημιτόνου

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

- Από 0° σε 180° το $\cos \theta$ **μικραίνει** από 1 σε -1 .
- Θετικό μέχρι τις 90° , αρνητικό μετά.
- Χρήσιμο: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$.
- Για άλλες τιμές: κομπιουτεράκι, $\theta = \cos^{-1}(\dots)$.



Παράδειγμα 3: οξεία γωνία

Βρείτε τη γωνία των $\mathbf{u} = (1, 1, 0)$ και $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$.

Βήμα 1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$

Βήμα 2. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Βήμα 3. Επειδή $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Βήμα 4. Ποια γωνία έχει συνημίτονο $\frac{1}{2}$; Από τον πίνακα: $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, άρα $\theta = 60^\circ$

Παράδειγμα 4: αμβλεία γωνία

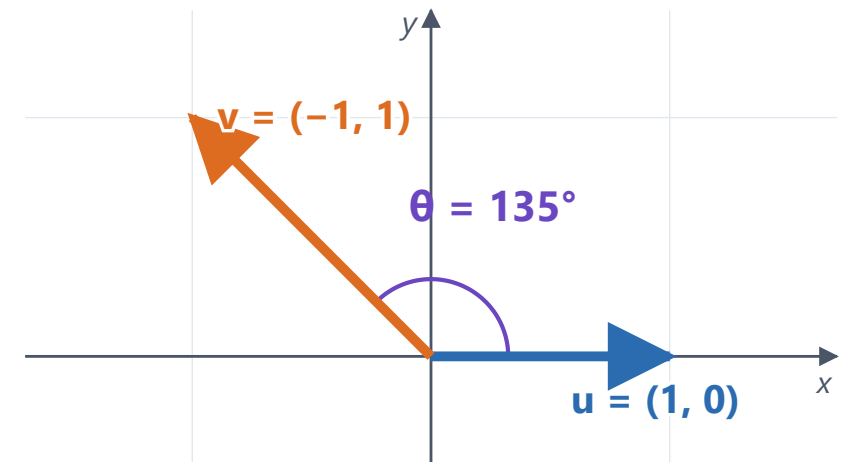
Γωνία των $\mathbf{u} = (1, 0)$ και $\mathbf{v} = (-1, 1)$.

Βήμα 1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -1$

Βήμα 2. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1,$
 $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

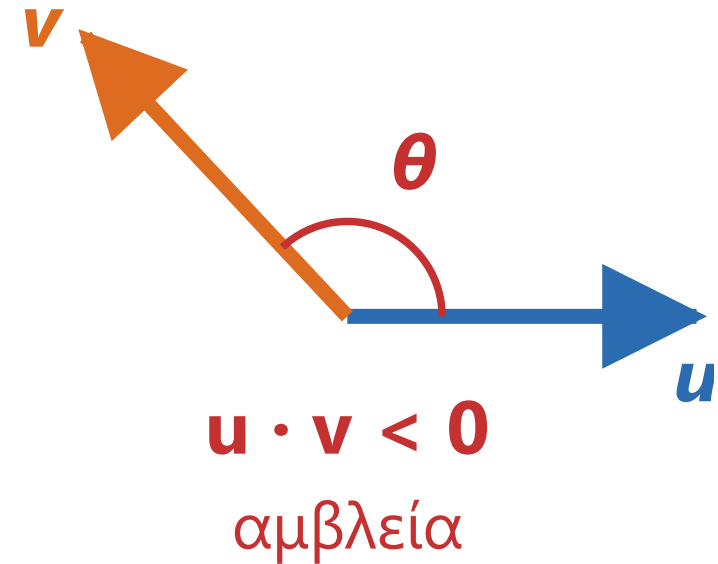
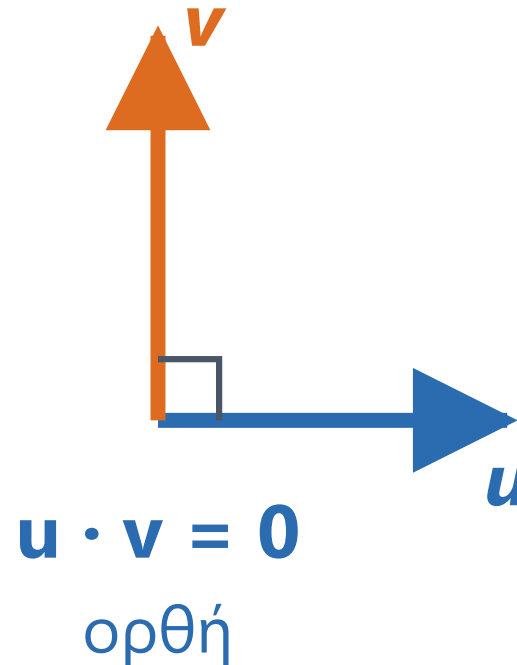
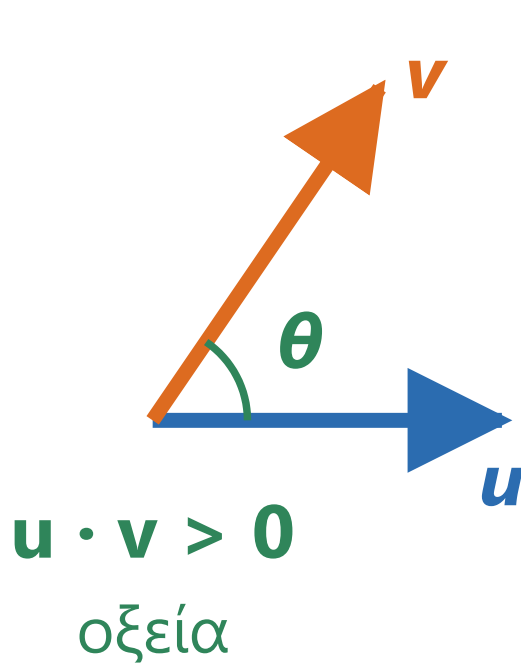
Βήμα 3. $\cos \theta = \frac{-1}{1 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.707$

Βήμα 4. Από τον πίνακα: $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, άρα
 $\theta = 135^\circ$



Αρνητικό $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$: αμβλεία γωνία.

Τι λέει το πρόσημο



Για το είδος της γωνίας αρκεί το **πρόσημο**· δεν χρειάζονται μήκη ούτε συνημίτονο.



Κάθετα διανύσματα

Πρόταση 2.3 (καθετότητα)

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \iff \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Γιατί: $\cos 90^\circ = 0$. Ο έλεγχος καθετότητας είναι **μία πράξη**.

$$(2, -1, 3) \cdot (4, 5, -1) = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 5 + 3 \cdot (-1) = 8 - 5 - 3 = 0$$

Άρα είναι **κάθετα**.

Το **0** θεωρείται κάθετο σε όλα.



Κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο

Το (a, b) είναι κάθετο στο $(-b, a)$.

- **Αλλάζω θέσεις και αλλάζω ένα πρόσημο.**
- Έλεγχος: $(a, b) \cdot (-b, a) = -ab + ba = 0 \checkmark$

Κάθετο στο $(3, 4)$: $(-4, 3)$. Έλεγχος: $3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 = -12 + 12 = 0 \checkmark$

Και το $(4, -3)$ είναι κάθετο. Και κάθε πολλαπλάσιο τους.



Παράδειγμα 5: εύρεση παραμέτρου

Για ποιο k είναι κάθετα τα $(k, 2)$ και $(3, -6)$;

Βήμα 1. Κάθετα σημαίνει εσωτερικό γινόμενο **μηδέν**:

$$(k, 2) \cdot (3, -6) = 0$$

Βήμα 2. Πολλαπλασιάζουμε ανά θέση: $k \cdot 3 + 2 \cdot (-6) = 3k - 12$, άρα
 $3k - 12 = 0$

Βήμα 3. Λύνουμε: $3k = 12 \Rightarrow k = 4$

Έλεγχος. $(4, 2) \cdot (3, -6) = 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) = 12 - 12 = 0 \checkmark$



Ψηφοφορία A: ορισμός και γωνία

1. Το αποτέλεσμα του $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ είναι:

☐ A διάνυσμα ☐ B αριθμός ☐ Γ πίνακας ☐ Δ εξαρτάται

2. $(2, 0, 1) \cdot (1, 3, -2) = ?$

☐ A 0 ☐ B 4 ☐ Γ $(2, 0, -2)$ ☐ Δ -1

3. Αν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, η γωνία τους είναι:

☐ A 0° ☐ B 45° ☐ Γ 90° ☐ Δ 180°



Microsoft Forms

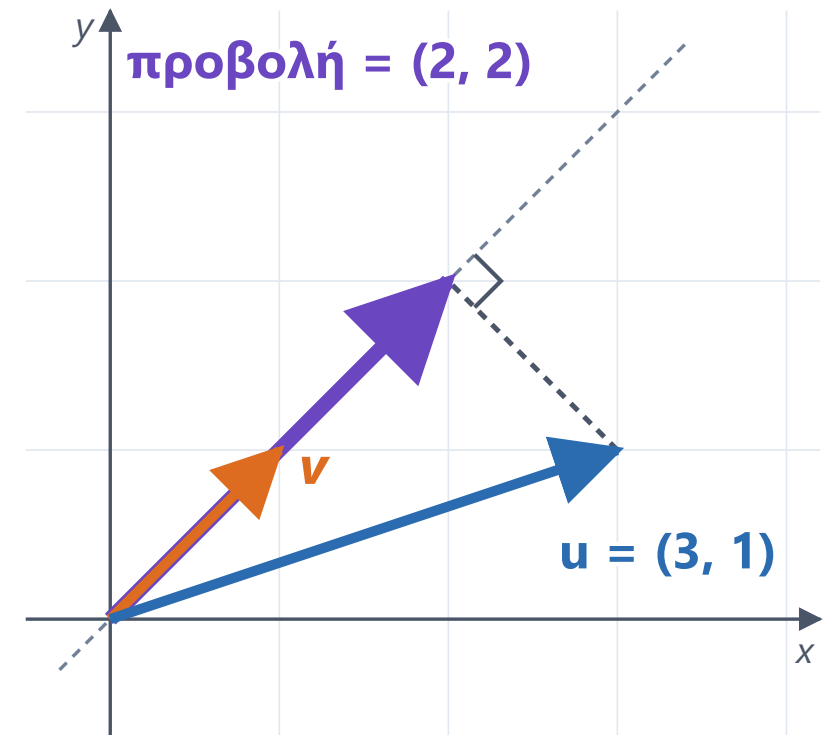


Διάλειμμα

Συνεχίζουμε με προβολή, έργο δύναμης και εφαρμογές

Προβολή: η «σκιά» ενός διανύσματος

- Φωτίζουμε το **u** **κάθετα** πάνω στην ευθεία του **v**.
- Η **σκιά** του είναι η **προβολή**.
- Είναι το κομμάτι του **u** που πάει **στην κατεύθυνση** του **v**.
- Αυτό ψάχνουμε στο πρόβλημα του κιβωτίου!





Προβολή: ο τύπος

Ορισμός 2.2 (προβολή)

$$\text{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$$

- Το κλάσμα είναι **αριθμός**: πόσες φορές το $\mathbf{v}$.
- Το αποτέλεσμα είναι **διάνυσμα**, παράλληλο στο $\mathbf{v}$.
- Το **μήκος** της σκιάς: $\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$.



Προβολή σε άξονα

Προβολή του $\mathbf{u} = (4, 3)$ στον άξονα x , δηλαδή στο $\mathbf{i} = (1, 0)$.

Βήμα 1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 4$

Βήμα 2. $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$

Βήμα 3. $\text{proj}_{\mathbf{i}} \mathbf{u} = \frac{4}{1} (1, 0) = (4, 0)$

- Η προβολή στον άξονα x είναι η **x -συνιστώσα**: η «σκιά» του βέλους στο πάτωμα.
- Όμοια, η προβολή στον άξονα y είναι $(0, 3)$.
- Ο τύπος της προβολής γενικεύει αυτή την ιδέα σε **οποιαδήποτε** κατεύθυνση.

Παράδειγμα 6: προβολή

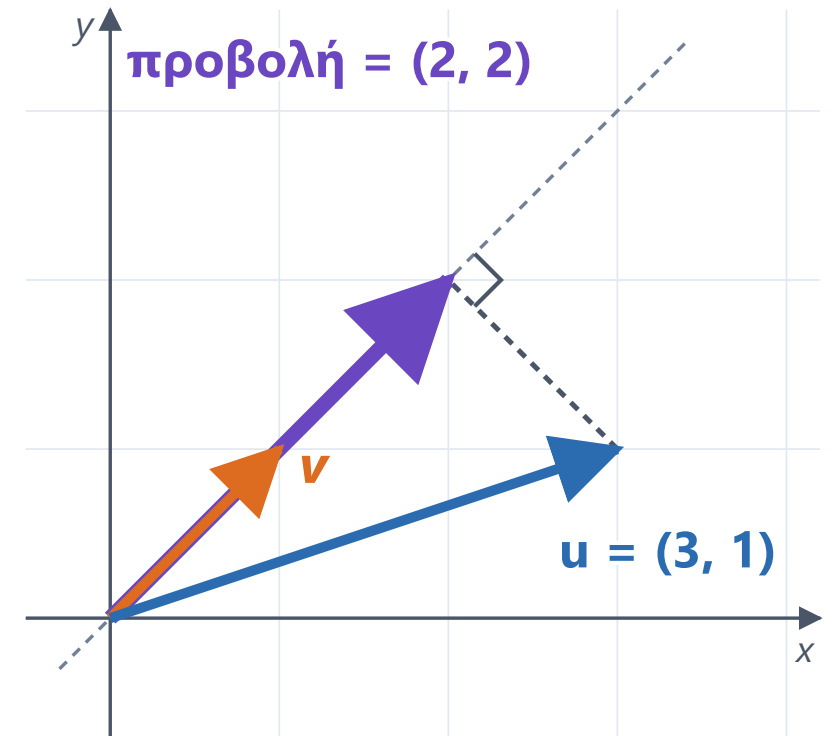
Προβολή του $\mathbf{u} = (3, 1)$ στο $\mathbf{v} = (1, 1)$.

Βήμα 1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4$

Βήμα 2. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$

Βήμα 3. Κλάσμα: $\frac{4}{2} = 2$

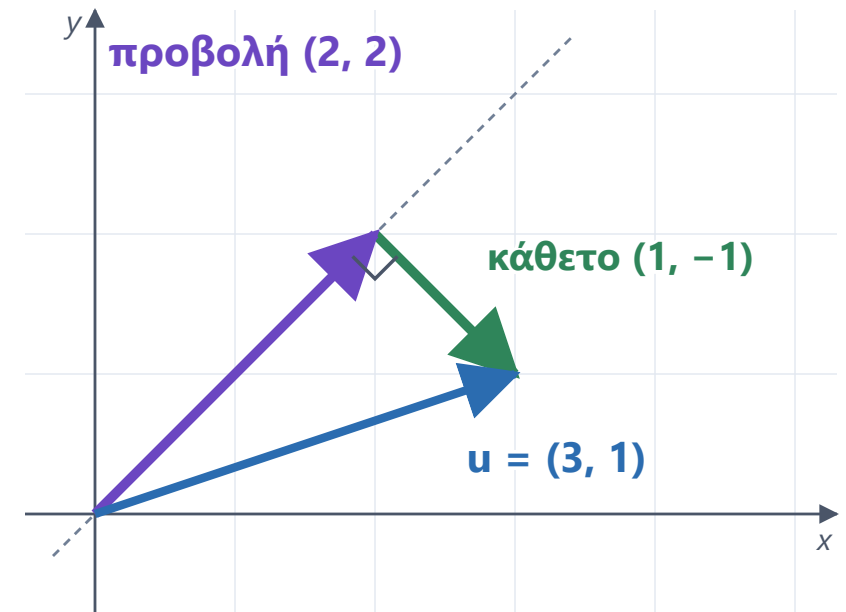
Βήμα 4. $2 \cdot (1, 1) = (2, 2)$



Ανάλυση σε δύο κάθετα κομμάτια

- Κάθε $\mathbf{u}$ σπάει σε: **προβολή** + **κάθετο** κομμάτι.
- Κάθετο κομμάτι = $\mathbf{u}$ μείον προβολή:
 $(3, 1) - (2, 2) = (1, -1)$
- Άρα $(3, 1) = (2, 2) + (1, -1)$
- Έλεγχος: $(1, -1) \cdot (1, 1) = 1 - 1 = 0 \checkmark$

Έτσι αναλύουμε μια δύναμη: **κατά μήκος** της κίνησης και **κάθετα** σε αυτή.



Εφαρμογή: έργο δύναμης

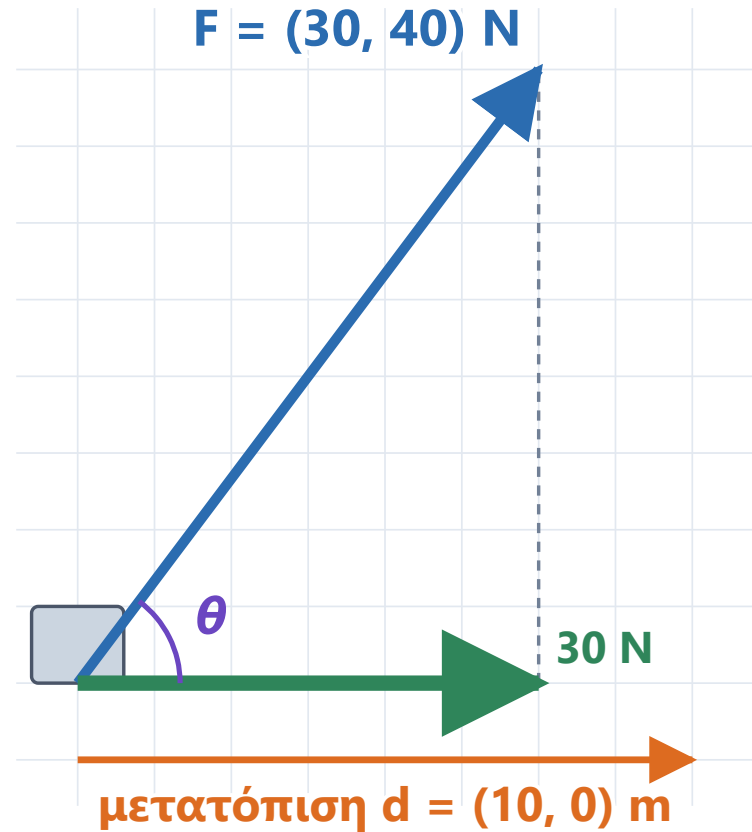
Έργο = δύναμη · μετατόπιση

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$$

Βήμα 1. $\mathbf{F} = (30, 40)$, $\mathbf{d} = (10, 0)$

Βήμα 2. $W = 30 \cdot 10 + 40 \cdot 0 = 300 \text{ J}$

Τα 40 N (κατακόρυφα) είναι **κάθετα** στην κίνηση, άρα δεν παράγουν έργο.





Έργο με γνωστή γωνία

Πρόβλημα

Τραβάμε βαλίτσα με δύναμη **50 N**, που σχηματίζει γωνία **60°** με το έδαφος, για **10 m**.

Βήμα 1. Ξέρουμε **μέτρα και γωνία**, άρα γεωμετρικός τύπος: $W = \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{d}\| \cos \theta$

Βήμα 2. $W = 50 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 500 \cdot \frac{1}{2} = 250 \text{ J}$

Προσοχή: το πρόβλημα της αρχής είναι **άλλο**. Ίδια δύναμη 50 N, αλλά γωνία $\approx 53^\circ$ ($\cos \theta = \frac{30}{50} = 0.6$), όχι 60° .

Γεωμετρικά: $50 \cdot 10 \cdot 0.6 = 300 \text{ J}$, ίδιο με τον αλγεβρικό τύπο

$$30 \cdot 10 + 40 \cdot 0 = 300 \text{ J } \checkmark$$

Μικρότερη γωνία: **περισσότερο** έργο.



Εφαρμογή: κινητή τηλεφωνία (CDMA)

- Πολλοί χρήστες στέλνουν **ταυτόχρονα**, στην **ίδια συχνότητα**.
- Κάθε χρήστης έχει έναν **κωδικό**, δηλαδή ένα διάνυσμα.

$$\mathbf{c}_A = (1, 1, 1, 1), \quad \mathbf{c}_B = (1, -1, 1, -1)$$

$$\mathbf{c}_A \cdot \mathbf{c}_B = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

Επειδή οι κωδικοί είναι **κάθετοι**, ο δέκτης ξεχωρίζει τους χρήστες με **ένα εσωτερικό γινόμενο**.

Εφαρμογή: μηχανή αναζήτησης (1/2)

Πρόβλημα

Γράφουμε στη μηχανή αναζήτησης: «**διάνυσμα πίνακας**». Ποιο από τρία κείμενα πρέπει να δείξει **πρώτο**;

Ιδέα: μετράμε πόσες φορές εμφανίζεται κάθε λέξη, οπότε κάθε κείμενο γίνεται **διάνυσμα**. Πιο σχετικό κείμενο = **μικρότερη γωνία** με την αναζήτηση.

	«διάνυσμα»	«πίνακας»	«ποδόσφαιρο»	Διάνυσμα
Αναζήτηση q	1	1	0	(1, 1, 0)
K1: σημειώσεις ΓΑ	3	3	0	(3, 3, 0)
K2: βιβλίο Φυσικής	4	0	0	(4, 0, 0)
K3: αθλητικό άρθρο	0	0	5	(0, 0, 5)

Εφαρμογή: μηχανή αναζήτησης (2/2)

Υπολογίζουμε $\cos \theta = \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{K}}{\|\mathbf{q}\| \|\mathbf{K}\|}$ με $\mathbf{q} = (1, 1, 0)$, $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$:

$\mathbf{K}_1 = (3, 3, 0)$: $\mathbf{q} \cdot \mathbf{K}_1 = 3 + 3 + 0 = 6$, $\|\mathbf{K}_1\| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$
 $\cos \theta = \frac{6}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}} = \frac{6}{\sqrt{36}} = \frac{6}{6} = 1$, δηλαδή $\theta = 0^\circ$: **ίδιο θέμα**

$\mathbf{K}_2 = (4, 0, 0)$: $\mathbf{q} \cdot \mathbf{K}_2 = 4 + 0 + 0 = 4$, $\|\mathbf{K}_2\| = 4$
 $\cos \theta = \frac{4}{\sqrt{2} \cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$, δηλαδή $\theta = 45^\circ$: **μερικώς σχετικό**

$\mathbf{K}_3 = (0, 0, 5)$: $\mathbf{q} \cdot \mathbf{K}_3 = 0 + 0 + 0 = 0$, άρα $\cos \theta = 0$, $\theta = 90^\circ$: **άσχετο**

Σειρά: $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3$. Το $\cos \theta$ κοιτάει την **κατεύθυνση**, όχι πόσο μεγάλο είναι το κείμενο.



Συνήθη λάθη

$(1, 2) \cdot (3, 4) = (3, 8) \times$ Σωστό: $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$ (αριθμός).

$(2, -3) \cdot (1, -2) = 2 - 6 \times$ Σωστό: $(-3)(-2) = +6$, άρα 8

Βρήκα $\cos \theta = 1.4 \times$ Αδύνατο· ελέγξτε τις πράξεις.

Στην προβολή διαιρώ με $\|\mathbf{v}\|$ αντί για $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 \times$

Ψηφοφορία Β: καθετότητα και προβολή

1. $(1, 2) \cdot (3, -1) = ?$

☐ Α $(3, -2)$ ☒ Β 1 ☐ Γ 5 ☐ Δ -1

2. Αν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$, η γωνία είναι:

☐ Α οξεία ☒ Β ορθή ☐ Γ αμβλεία ☐ Δ δεν ξέρουμε

3. Ποιο είναι κάθετο στο $(2, 1)$;

☐ Α $(1, 2)$ ☒ Β $(-1, 2)$ ☐ Γ $(2, -1)$ ☐ Δ $(1, 1)$



Microsoft Forms



Άσκηση στην τάξη (10')

1. Υπολογίστε $(2, -1, 2) \cdot (1, 3, -4)$. Οξεία ή αμβλεία γωνία;
2. Είναι κάθετα τα $(3, -2, 1)$ και $(1, 2, 1)$;
3. Βρείτε τη γωνία των $(1, 0)$ και $(1, 1)$.
4. Βρείτε την προβολή του $(1, 3)$ στο $(2, 1)$.



Λύσεις

1. $2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-4) = 2 - 3 - 8 = -9 < 0$, άρα **αμβλεία**

2. $3 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3 - 4 + 1 = 0$, άρα **κάθετα**

3. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$, $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, άρα $\theta = 45^\circ$

4. $\frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 1}{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1} = \frac{5}{5} = 1$, άρα $\text{proj} = 1 \cdot (2, 1) = (2, 1)$

Στο 4 η προβολή βγήκε **ίση** με το $\mathbf{v}$. αυτό οφείλεται στους συγκεκριμένους αριθμούς.



Σύνοψη

Εσωτερικό γινόμενο	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ (αριθμός)
Μέτρο	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \ \mathbf{v}\ ^2$
Γωνία	$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ }$
Κάθετα	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$
Προβολή	$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$
Έργο	$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$

Για το σπίτι: Φυλλάδιο 1 (eClass). **Επόμενη διάλεξη:** εξωτερικό γινόμενο, εμβαδά, όγκοι, ροπή.