



Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 3: Εξωτερικό και μικτό γινόμενο

ECE107 · Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών · ΕΛΜΕΠΑ

Δευτέρα 5 Οκτωβρίου 2026

Μανίκης Γιώργος - manikis@hmu.gr



Ανακεφαλαίωση

Εσωτερικό γινόμενο	$(1, 2) \cdot (3, 4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$ (αριθμός)
Γωνία	$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ }$
Κάθετα	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$
Προβολή	$\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}$

Σήμερα: ένα **δεύτερο** γινόμενο δύο διανυσμάτων, που δίνει **διάνυσμα**.



Επανάληψη Διάλεξης 2

1. $(2, 1, 0) \cdot (1, -2, 5) = ?$

A $(2, -2, 0)$ **B** 4 **Γ** 0 **Δ** 5

2. $\|\mathbf{u}\| = 3, \|\mathbf{v}\| = 4, \theta = 90^\circ. \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ?$

A 12 **B** 7 **Γ** 1 **Δ** 0

3. Προβολή του $(5, 2)$ στο $(1, 0)$:

A $(0, 2)$ **B** $(5, 0)$ **Γ** 5 **Δ** $(5, 2)$



[forms.cloud.microsoft/e/](https://forms.cloud.microsoft/e/Ar1rQrMzAX)

Ar1rQrMzAX



Στόχοι της διάλεξης

Στο τέλος θα μπορείτε να:

- Υπολογίζετε μια **ορίζουσα** 2×2 .
- Υπολογίζετε το **εξωτερικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$ και να το **ελέγχετε**.
- Βρίσκετε τη φορά του με τον **κανόνα του δεξιού χεριού**.
- Υπολογίζετε **εμβαδά** παραλληλογράμμων και τριγώνων.
- Υπολογίζετε **όγκους** και ελέγχετε αν τρία διανύσματα είναι **συνεπίπεδα**.
- Λύνετε προβλήματα **ροπής** και **μαγνητικής δύναμης**.

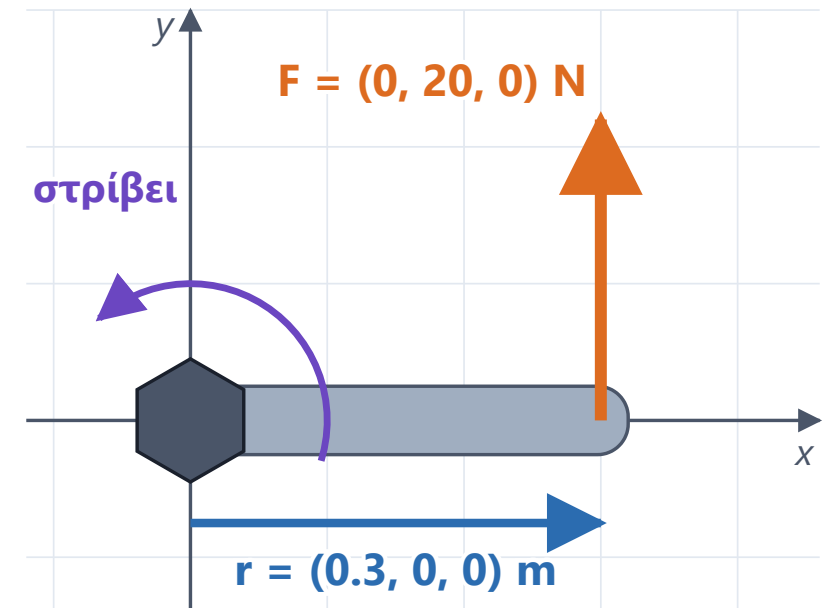
Ένα πρόβλημα

Πρόβλημα

Σφίγγουμε ένα παξιμάδι με κλειδί μήκους **0.3 m**.

Σπρώχνουμε την άκρη του με δύναμη **20 N**, κάθετα στο κλειδί.

- Πόσο «στρίβει» το παξιμάδι;
- **Γύρω από ποιον άξονα** στρίβει;
- Η απάντηση είναι ένα **διάνυσμα**: η **ροπή**.





Από το εσωτερικό στο εξωτερικό γινόμενο

- **Εσωτερικό** γινόμενο: δύο διανύσματα δίνουν έναν **αριθμό**.
- **Εξωτερικό** γινόμενο: δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^3$ δίνουν ένα **διάνυσμα**.
- Το νέο διάνυσμα είναι **κάθετο** και στα δύο.
- Το **μήκος** του είναι το **εμβαδόν** του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν.

Γράφεται $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ («u επί v», στα αγγλικά cross product). Ορίζεται **μόνο στο** $\mathbb{R}^3$.



Εργαλείο: η ορίζουσα 2×2

Ορισμός 3.1 (ορίζουσα 2×2)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a d - b c$$

Κύρια διαγώνιος ($a \cdot d$) μείον δευτερεύουσα διαγώνιος ($b \cdot c$).

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 12 - 2 = 10 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 5 = 6 + 5 = 11$$

Τις ορίζουσες θα τις μελετήσουμε αναλυτικά στην εβδομάδα 10. Εδώ τις χρειαζόμαστε μόνο ως **εργαλείο υπολογισμού**.



Εξωτερικό γινόμενο: ορισμός

Ορισμός 3.2 (εξωτερικό γινόμενο)

Για $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2, & -(u_1v_3 - u_3v_1), & u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

- Το αποτέλεσμα είναι **διάνυσμα** με 3 συνιστώσες.
- Κάθε συνιστώσα είναι μια **ορίζουσα 2×2** .
- Η **2η** συνιστώσα έχει **μείον** μπροστά.
- Τον τύπο δεν χρειάζεται να τον αποστηθίσετε: η επόμενη διαφάνεια δείχνει πώς τον θυμόμαστε.



Πώς το θυμόμαστε: «κρύβουμε μία στήλη»

Γράφουμε τα **i, j, k** στην 1η γραμμή, τα **u** και **v** από κάτω:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Συνιστώσα i

κρύβουμε την **1η** στήλη

$$+ \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Συνιστώσα j

κρύβουμε τη **2η** στήλη

$$- \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}$$

Συνιστώσα k

κρύβουμε την **3η** στήλη

$$+ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα 1

Υπολογίστε το $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ για $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (4, 5, 6)$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Βήμα 1: συνιστώσα $\mathbf{i}$

κρύβουμε την 1η στήλη

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ = 12 - 15 = -3$$

Βήμα 2: συνιστώσα $\mathbf{j}$

κρύβουμε τη 2η, με μείον

$$- \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) \\ = -(6 - 12) = 6$$

Βήμα 3: συνιστώσα $\mathbf{k}$

κρύβουμε την 3η στήλη

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \\ = 5 - 8 = -3$$

Αποτέλεσμα. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-3, 6, -3)$



Έλεγχος: κάθετο και στα δύο

Πρόταση 3.1

Το $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ είναι **κάθετο** και στο $\mathbf{u}$ και στο $\mathbf{v}$:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$$

Έλεγχος του Παραδείγματος 1

$$(-3, 6, -3) \cdot (1, 2, 3) = -3 + 12 - 9 = 0 \checkmark$$

$$(-3, 6, -3) \cdot (4, 5, 6) = -12 + 30 - 18 = 0 \checkmark$$

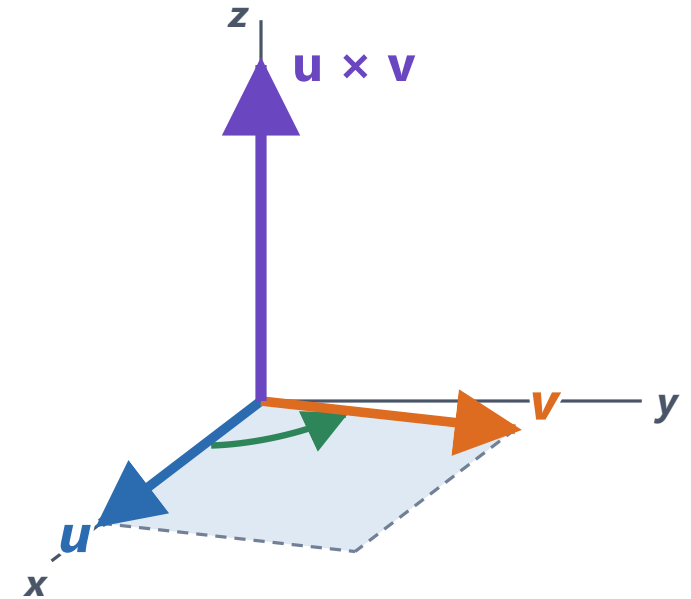
Κάνουμε αυτόν τον έλεγχο **κάθε φορά**: βρίσκει σχεδόν όλα τα λάθη πρόσημου.

Κανόνας του δεξιού χεριού

Ποια από τις δύο κάθετες φορές; Τη δίνει το **δεξί χέρι**:

- Τα **δάχτυλα** δείχνουν προς το $\mathbf{u}$.
- Τα **κλείνουμε** προς το $\mathbf{v}$ (πράσινο τόξο).
- Ο **αντίχειρας** δείχνει το $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Αν αλλάξουμε σειρά ($\mathbf{v} \times \mathbf{u}$), το χέρι γυρίζει ανάποδα και ο αντίχειρας δείχνει **προς τα κάτω**.

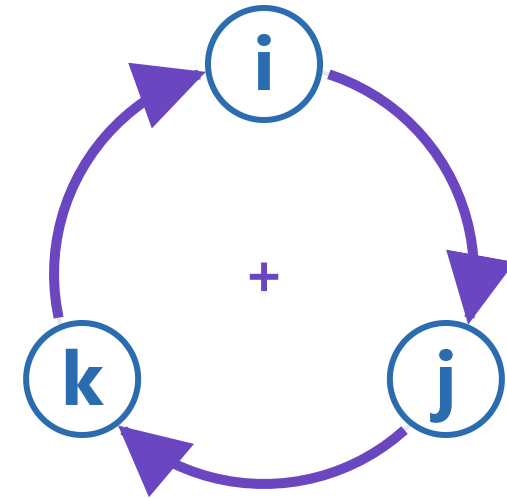


Τα βασικά διανύσματα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

Πρόταση 3.2

$$\begin{aligned}\mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k}, & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i}, & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k}, & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i}, & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j}\end{aligned}$$

Έλεγχος με τον τύπο: $(1, 0, 0) \times (0, 1, 0)$
συνιστώσα k : $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$, οι άλλες 0
άρα $(0, 0, 1) = \mathbf{k} \checkmark$



κατά τη φορά του βέλους: +
αντίθετα: -

Πρόταση 3.3

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \qquad \mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$(c \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = c (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \qquad \mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$$

- **Η σειρά μετράει:** αν την αλλάξουμε, αλλάζει το **πρόσημο**.
- Ένα διάνυσμα «επί» τον εαυτό του δίνει το **μηδενικό** διάνυσμα.
- Οι αριθμοί βγαίνουν έξω και οι παρενθέσεις ανοίγουν όπως συνήθως.

Αντίθετα με το εσωτερικό γινόμενο: εκεί $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.



Παράδειγμα 2: η σειρά μετράει

$$(2, 0, 0) \times (0, 3, 0)$$

συνιστώσα i: $0 \cdot 0 - 0 \cdot 3 = 0$

συνιστώσα j: $-(2 \cdot 0 - 0 \cdot 0) = 0$

συνιστώσα k: $2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 6$

Αποτέλεσμα: $(0, 0, 6)$, προς τα **πάνω**

$$(0, 3, 0) \times (2, 0, 0)$$

συνιστώσα i: $3 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$

συνιστώσα j: $-(0 \cdot 0 - 0 \cdot 2) = 0$

συνιστώσα k: $0 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = -6$

Αποτέλεσμα: $(0, 0, -6)$, προς τα **κάτω**

Ίδιο μήκος (6), **αντίθετη φορά**, όπως λέει η Πρόταση 3.3.

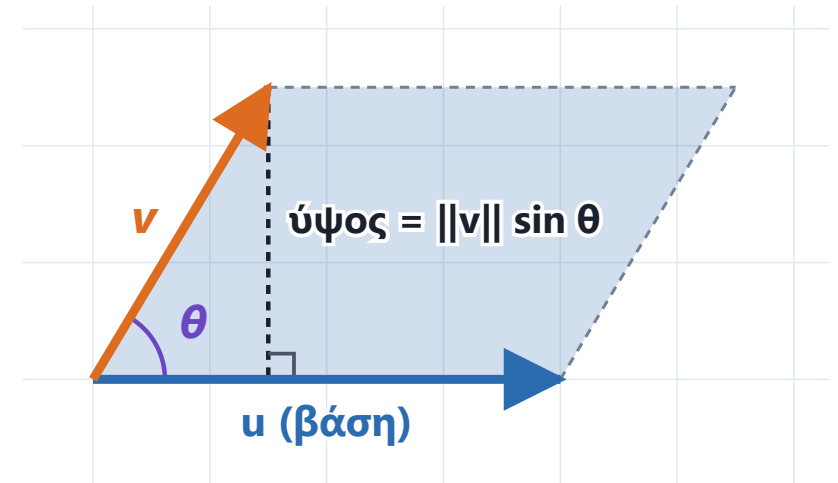
Μέτρο: το εμβαδόν του παραλληλογράμμου

Πρόταση 3.4

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$$

= **εμβαδόν** του παραλληλογράμμου με πλευρές $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

- Βάση $\|\mathbf{u}\|$, ύψος $\|\mathbf{v}\| \sin \theta$.
- Εμβαδόν = βάση $\times$ ύψος.
- **Τρίγωνο** με πλευρές $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$: το **μισό**.





Παράλληλα διανύσματα

Πρόταση 3.5

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \iff$ τα $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ είναι παράλληλα.

Γιατί: παράλληλα σημαίνει $\theta = 0^\circ$ ή 180° , και $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$. Το «παραλληλόγραμμα» δεν έχει εμβαδόν.

Παράδειγμα 3: $(1, 2, 3) \times (2, 4, 6)$

$$i: 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 0 \quad j: -(1 \cdot 6 - 3 \cdot 2) = 0 \quad k: 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

Αποτέλεσμα $(0, 0, 0)$: πράγματι $(2, 4, 6) = 2(1, 2, 3)$, είναι παράλληλα.



Ψηφοφορία Α: εξωτερικό γινόμενο

1. Το $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ είναι:

☐ Α αριθμός ☐ Β διάνυσμα ☐ Γ πίνακας ☐ Δ γωνία

2. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = ?$

☐ Α 0 ☐ Β 1 ☐ Γ $-\mathbf{k}$ ☐ Δ $\mathbf{k}$

3. Αν $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (1, -2, 3)$, τότε $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = ?$

☐ Α $(-1, 2, -3)$ ☐ Β $(1, -2, 3)$ ☐ Γ $(3, -2, 1)$ ☐ Δ 0



forms.cloud.microsoft/e/
4WGqzNqc18



Διάλειμμα

Συνεχίζουμε με εμβαδά, όγκους, ροπή και δύναμη Lorentz

Παράδειγμα 4: εμβαδόν τριγώνου (1/3)

Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$.

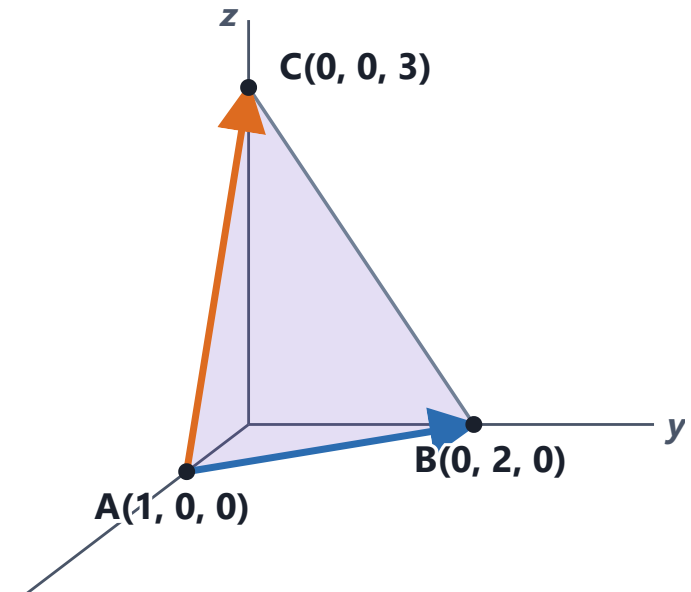
Σχέδιο λύσης:

1. Δύο πλευρές από την **ίδια κορυφή** A .
2. Το **εξωτερικό γινόμενο** τους.
3. **Μέτρο** = εμβαδόν **παραλληλογράμμου**.
4. Το **μισό** = εμβαδόν **τριγώνου**.

Βήμα 1. Οι πλευρές από το A (τέλος μείον αρχή):

$$\overrightarrow{AB} = (0 - 1, 2 - 0, 0 - 0) = (-1, 2, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0 - 1, 0 - 0, 3 - 0) = (-1, 0, 3)$$



Παράδειγμα 4: εμβαδόν τριγώνου (2/3)

Βήμα 2. Εξωτερικό γινόμενο των δύο πλευρών:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

i: κρύβουμε την 1η στήλη **j:** κρύβουμε τη 2η, **με μείον** **k:** κρύβουμε την 3η στήλη

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ = 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \\ = 6 - 0 = 6$$

$$- \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ = -((-1) \cdot 3 - 0 \cdot (-1)) \\ = -(-3 - 0) = 3$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ = (-1) \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \\ = 0 + 2 = 2$$

Αποτέλεσμα. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6, 3, 2)$

Παράδειγμα 4: εμβαδόν τριγώνου (3/3)

Έλεγχος. Κάθετο και στις δύο πλευρές:

$$(6, 3, 2) \cdot (-1, 2, 0) = -6 + 6 + 0 = 0 \checkmark$$

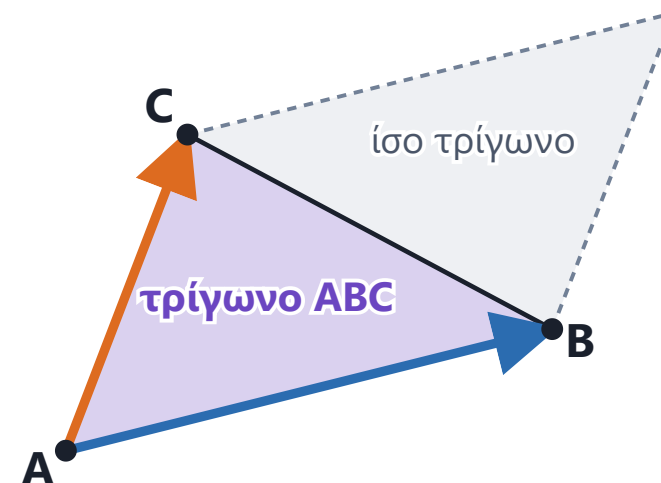
$$(6, 3, 2) \cdot (-1, 0, 3) = -6 + 0 + 6 = 0 \checkmark$$

Βήμα 3. Το μέτρο είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές AB και AC :

$$\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

Βήμα 4. Η διαγώνιος BC χωρίζει το παραλληλόγραμμα σε **δύο ίσα τρίγωνα**, άρα

$$E_{ABC} = \frac{7}{2} = 3.5$$



Παράδειγμα 5: εμβαδόν στο επίπεδο

Εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές $\mathbf{u} = (3, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 2)$.

Βήμα 1. Το εξωτερικό γινόμενο θέλει $\mathbb{R}^3$:
βάζουμε $z = 0$, δηλαδή $(3, 1, 0)$ και $(1, 2, 0)$.

Βήμα 2. $(3, 1, 0) \times (1, 2, 0)$:

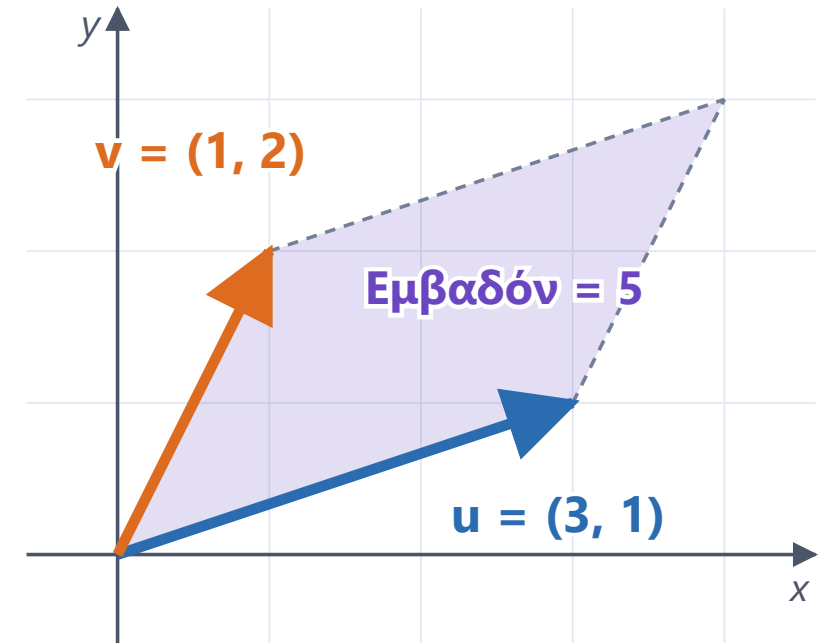
i: $1 \cdot 0 - 0 \cdot 2 = 0$

j: $-(3 \cdot 0 - 0 \cdot 1) = 0$

k: $3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 6 - 1 = 5$

Βήμα 3. $\|(0, 0, 5)\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 5^2} = 5$

Συντόμευση στο επίπεδο: $|3 \cdot 2 - 1 \cdot 1| = 5$





Μικτό γινόμενο

Ορισμός 3.3 (μικτό γινόμενο)

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

Πρώτα το **εξωτερικό** $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, μετά το **εσωτερικό** με το $\mathbf{w}$. Αποτέλεσμα: **αριθμός**.

Πρόταση 3.6

$|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}| = \text{όγκος}$ του παραλληλεπιπέδου με ακμές $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

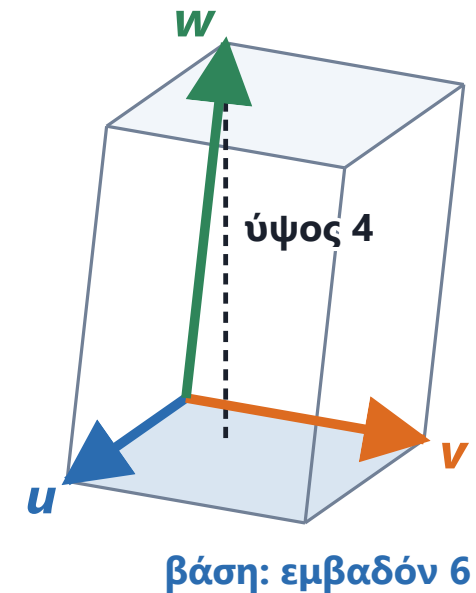
Ισχύει και $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$: θα το δείτε γραμμένο και έτσι.

Προσοχή

Το $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \times \mathbf{w}$ **δεν ορίζεται**: το $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ είναι αριθμός, και εξωτερικό γινόμενο κάνουμε μόνο μεταξύ **διανυσμάτων**.

Γιατί δίνει τον όγκο;

- Τα $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ φτιάχνουν τη **βάση** (μπλε).
- Το $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ είναι **κάθετο** στη βάση και το μήκος του είναι το **εμβαδόν της βάσης**.
- Το εσωτερικό γινόμενο με το $\mathbf{w}$ «κρατάει» μόνο το κομμάτι του $\mathbf{w}$ που είναι **κάθετο** στη βάση: το **ύψος**.
- Άρα: εμβαδόν βάσης $\times$ ύψος = **όγκος**.





Παράδειγμα 6: όγκος

$\mathbf{u} = (2, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 3, 0)$, $\mathbf{w} = (1, 1, 4)$: το παραλληλεπίπεδο του σχήματος. Βρείτε τον όγκο.

Βήμα 1. Η βάση: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (2, 0, 0) \times (1, 3, 0)$

$$\text{i: } 0 \cdot 0 - 0 \cdot 3 = 0 \qquad \text{j: } -(2 \cdot 0 - 0 \cdot 1) = 0 \qquad \text{k: } 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 = 6$$

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (0, 0, 6)$: κάθετο στη βάση (κατά z), μήκος 6 = **εμβαδόν βάσης**.

Βήμα 2. $(0, 0, 6) \cdot (1, 1, 4) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 6 \cdot 4 = 24$

Βήμα 3. Όγκος = $|24| = 24$

Ταιριάζει με το σχήμα: **εμβαδόν βάσης 6** $\times$ **ύψος 4** (η z -συνιστώσα του $\mathbf{w}$) = 24 ✓



Συνεπίπεδα διανύσματα

Πρόταση 3.7

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0 \iff$ τα $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ είναι **συνεπίπεδα**: το «κουτί» είναι επίπεδο, όγκος μηδέν.

Παράδειγμα 7: $\mathbf{u} = (1, 2, 3), \mathbf{v} = (4, 5, 6), \mathbf{w} = (7, 8, 9)$

Βήμα 1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-3, 6, -3)$: το βρήκαμε ήδη στο Παράδειγμα 1.

Βήμα 2.

$$(-3, 6, -3) \cdot (7, 8, 9) = (-3) \cdot 7 + 6 \cdot 8 + (-3) \cdot 9 = -21 + 48 - 27 = 0$$

Συμπέρασμα. Είναι **συνεπίπεδα**. Πράγματι $\mathbf{w} = 2\mathbf{v} - \mathbf{u}$:

$$2(4, 5, 6) - (1, 2, 3) = (8 - 1, 10 - 2, 12 - 3) = (7, 8, 9) \checkmark$$

Εφαρμογή 1: ροπή (λύση)

Ροπή δύναμης $\mathbf{F}$ στη θέση $\mathbf{r}$: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$$\mathbf{r} = (0.3, 0, 0) \text{ m}, \quad \mathbf{F} = (0, 20, 0) \text{ N}$$

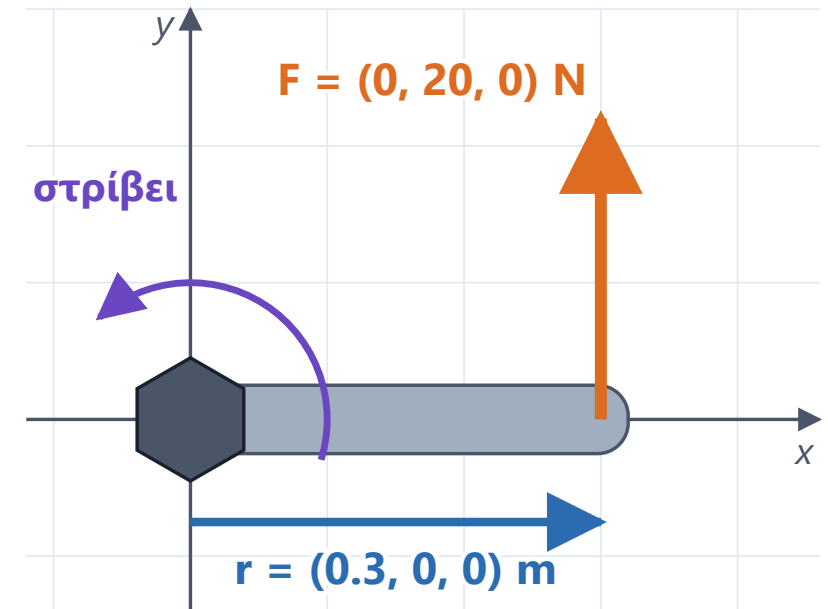
Βήμα 1. i: $0 \cdot 0 - 0 \cdot 20 = 0$

Βήμα 2. j: $-(0.3 \cdot 0 - 0 \cdot 0) = 0$

Βήμα 3. k: $0.3 \cdot 20 - 0 \cdot 0 = 6$

$$\boldsymbol{\tau} = (0, 0, 6) \text{ N}\cdot\text{m}$$

Μέτρο **6 N·m**. Η ροπή δείχνει κατά τον άξονα z :
το παξιμάδι στρίβει **γύρω από τον z** .



Εφαρμογή 1: και αν σπρώξουμε λοξά;

Ίδιο κλειδί $\mathbf{r} = (0.3, 0, 0)$, αλλά δύναμη $\mathbf{F} = (10, 20, 0)$ N.

$$i: 0 \cdot 0 - 0 \cdot 20 = 0 \quad j: -(0.3 \cdot 0 - 0 \cdot 10) = 0 \quad k: 0.3 \cdot 20 - 0 \cdot 10 = 6$$

$$\boldsymbol{\tau} = (0, 0, 6) \text{ N}\cdot\text{m}$$

Ίδια ροπή!

- Τα **10 N** κατά μήκος του κλειδιού δεν στρίβουν τίποτα: τραβούν απλώς το κλειδί.
- Στρίβει **μόνο η κάθετη** συνιστώσα της δύναμης.

Σύγκριση: το εσωτερικό γινόμενο «κρατάει» το **παράλληλο** κομμάτι (έργο), το εξωτερικό το **κάθετο** (ροπή).

Εφαρμογή 2: δύναμη Lorentz

Φορτίο q , ταχύτητα $\mathbf{v}$, μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$:

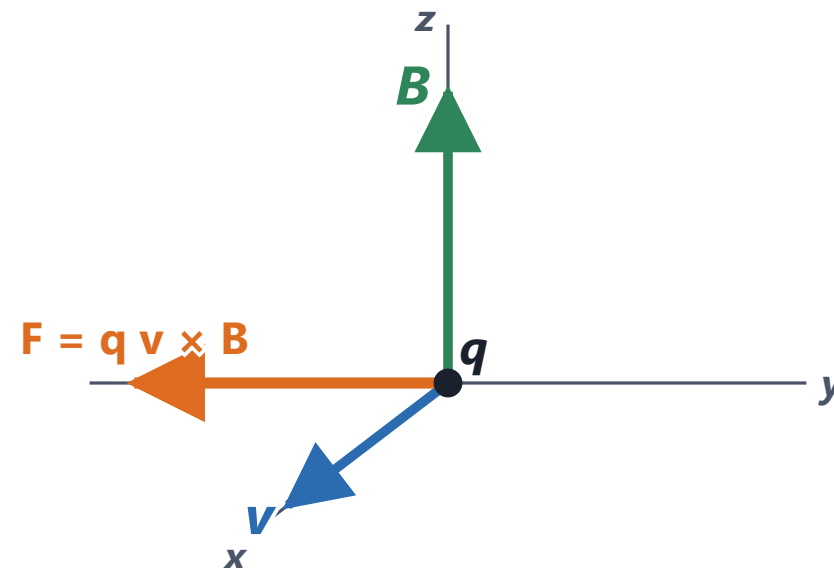
$$\mathbf{F} = q (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$q = 0.5 \text{ C}, \quad \mathbf{v} = (4, 0, 0) \text{ m/s}, \quad \mathbf{B} = (0, 0, 2) \text{ T}$$

Βήμα 1. $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$: i: $0 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 0$, j: $-(4 \cdot 2 - 0 \cdot 0) = -8$, k: $4 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$

Βήμα 2. $\mathbf{F} = 0.5 \cdot (0, -8, 0) = (0, -4, 0) \text{ N}$

Η δύναμη είναι **κάθετη** στην ταχύτητα: στρίβει την πορεία. Έτσι δουλεύουν οι **ηλεκτρικοί κινητήρες**.





Εσωτερικό ή εξωτερικό;

	Εσωτερικό $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	Εξωτερικό $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$
Αποτέλεσμα	αριθμός	διάνυσμα
Πού ορίζεται	κάθε $\mathbb{R}^n$	μόνο $\mathbb{R}^3$
Με τη γωνία	$\ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \cos \theta$	μέτρο $\ \mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \sin \theta$
Μηδέν όταν	κάθετα	παράλληλα
Αλλαγή σειράς	ίδιο αποτέλεσμα	αλλάζει πρόσημο
Εφαρμογή	έργο, προβολή	ροπή, εμβαδόν, όγκος



Συνήθη λάθη

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} \ \chi$ Σωστό: $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

Ξεχνάω το **μείον** στη συνιστώσα j χ Σωστό: $-(u_1v_3 - u_3v_1)$

$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \ \chi$ Σωστό: $\sin \theta$ (το $\cos \theta$ είναι του εσωτερικού)

$(1, 2) \times (3, 4) \ \chi$ Ορίζεται μόνο στο $\mathbb{R}^3$: γράφουμε $(1, 2, 0) \times (3, 4, 0)$



Ψηφοφορία Β: εμβαδά και όγκοι

1. $\|\mathbf{u}\| = 2, \|\mathbf{v}\| = 5, \theta = 90^\circ. \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = ?$

☐ Α 0 ☐ Β 7 ☐ Γ 10 ☐ Δ 3

2. Αν $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (μη μηδενικά), τα $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ είναι:

☐ Α κάθετα ☐ Β παράλληλα ☐ Γ μοναδιαία ☐ Δ κανένα

3. Αν $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$, τα $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ είναι:

☐ Α κάθετα ☐ Β ίσα ☐ Γ μοναδιαία ☐ Δ συνεπίπεδα



forms.cloud.microsoft/e/
MzbSU76N2Q



Άσκηση στην τάξη (10')

1. Υπολογίστε το $(1, 0, 2) \times (0, 1, 3)$ και ελέγξτε ότι είναι κάθετο και στα δύο.
2. Εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές $(3, 0, 0)$ και $(1, 2, 0)$.
3. Είναι συνεπίπεδα τα $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$;
4. Ροπή της δύναμης $\mathbf{F} = (10, 0, 0)$ N στη θέση $\mathbf{r} = (0, 0.5, 0)$ m.



Λύσεις (1/2)

1. $(1, 0, 2) \times (0, 1, 3)$:

$$i: 0 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = -2 \quad j: -(1 \cdot 3 - 2 \cdot 0) = -3 \quad k: 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

Αποτέλεσμα $(-2, -3, 1)$. Έλεγχος:

$$(-2, -3, 1) \cdot (1, 0, 2) = -2 + 0 + 2 = 0 \checkmark$$

$$(-2, -3, 1) \cdot (0, 1, 3) = 0 - 3 + 3 = 0 \checkmark$$

2. $(3, 0, 0) \times (1, 2, 0)$:

$$i: 0 \cdot 0 - 0 \cdot 2 = 0 \quad j: -(3 \cdot 0 - 0 \cdot 1) = 0 \quad k: 3 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 6$$

Αποτέλεσμα $(0, 0, 6)$, άρα εμβαδόν $\|(0, 0, 6)\| = 6$.



Λύσεις (2/2)

3. Πρώτα $(0, 1, 0) \times (1, 1, 0)$:

$$i: 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0 \quad j: -(0 \cdot 0 - 0 \cdot 1) = 0 \quad k: 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -1$$

Μετά $(1, 0, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0 + 0 + 0 = 0$: **ναι**, συνεπίπεδα (όλα στο επίπεδο xy).

4. $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (0, 0.5, 0) \times (10, 0, 0)$:

$$i: 0.5 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 \quad j: -(0 \cdot 0 - 0 \cdot 10) = 0 \quad k: 0 \cdot 0 - 0.5 \cdot 10 = -5$$

$\boldsymbol{\tau} = (0, 0, -5) \text{ N}\cdot\text{m}$: μέτρο **5 N·m**, κατά τον άξονα z προς τα **κάτω**.



Σύνοψη

Ορίζουσα 2×2	$ad - bc$
Εξωτερικό γινόμενο	«κρύβουμε μία στήλη», με μείον στη συνιστώσα j
Έλεγχος	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0, (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0$
Σειρά	$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
Εμβαδόν	$\ \mathbf{u} \times \mathbf{v}\ $ (τρίγωνο: το μισό)
Όγκος	$ (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} $
Ροπή	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Για το σπίτι: Φυλλάδιο 2 (eClass, μετά τη Διάλεξη 4). **Επόμενη διάλεξη:** ευθείες και επίπεδα στον χώρο.