



Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 5: Μιγαδικοί αριθμοί I

ECE107 · Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών · ΕΛΜΕΠΑ

Δευτέρα 12 Οκτωβρίου 2026

Μανίκης Γιώργος - manikis@hmu.gr



Ανακεφαλαίωση

Ευθεία	$P_0 + t \mathbf{d}$: σημείο + κατεύθυνση
Επίπεδο	$ax + by + cz = d$, κάθετο $\mathbf{n} = (a, b, c)$
Ανήκει σημείο;	αντικαθιστούμε στην εξίσωση
Απόσταση	$\frac{ ax_1 + by_1 + cz_1 - d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Σήμερα: **νέοι αριθμοί**, οι μιγαδικοί. Θα δούμε ότι συμπεριφέρονται σαν **διανύσματα του επιπέδου**.

Επανάληψη Διάλεξης 4

1. Ευθεία $(x, y, z) = (1, 0, 2) + t(2, 1, -1)$. Για $t = 1$:

A $(3, 1, 1)$ **B** $(2, 1, -1)$ **Γ** $(3, 1, 3)$ **Δ** $(1, 0, 2)$

2. Ποιο σημείο ανήκει στο επίπεδο $x + y + z = 3$;

A $(1, 1, 0)$ **B** $(1, 1, 1)$ **Γ** $(3, 3, 3)$ **Δ** $(0, 0, 0)$

3. Απόσταση του $(1, 2, 2)$ από το επίπεδο $x + 2y + 2z = 0$:

A 9 **B** 0 **Γ** 3 **Δ** 1



forms.cloud.microsoft/e/
1Gdf8hTC3y



Στόχοι της διάλεξης

Στο τέλος θα μπορείτε να:

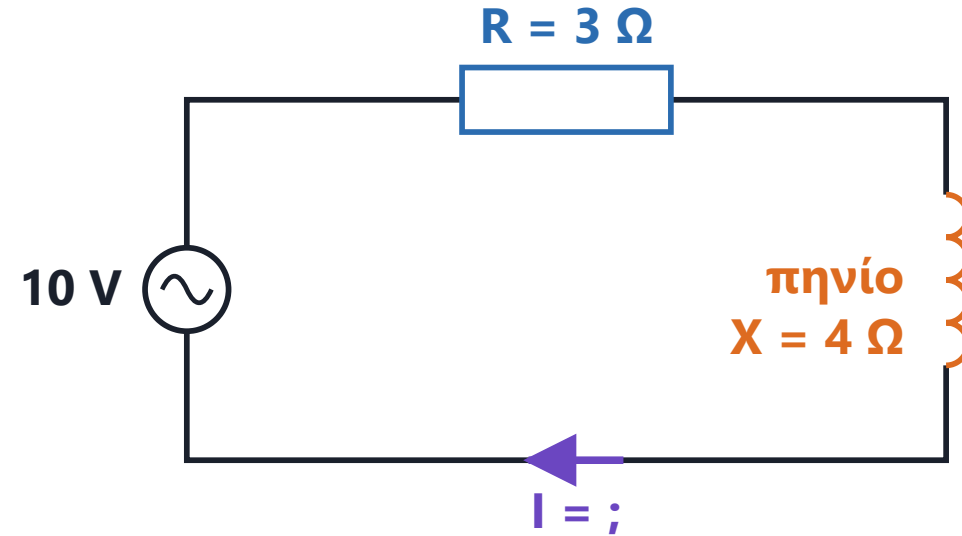
- Υπολογίζετε **δυνάμεις** του i .
- Κάνετε **πράξεις** σε μορφή $a + bi$: πρόσθεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση.
- Βρίσκετε **συζυγή** και **μέτρο**, και τα δείχνετε στο **μιγαδικό επίπεδο**.
- Λύνετε δευτεροβάθμιες εξισώσεις με $\Delta < 0$.
- Υπολογίζετε τη **σύνθετη αντίσταση** ενός απλού κυκλώματος.

Ένα πρόβλημα

Πρόβλημα

Αντιστάτης $R = 3 \Omega$ και πηνίο με αντίδραση $X = 4 \Omega$, σε **σειρά**, σε εναλλασσόμενη τάση 10 V.

- Συνολική «αντίσταση»
 $3 + 4 = 7 \Omega$;
- Το αμπερόμετρο δείχνει 2 A, άρα $10/2 = 5 \Omega$.
- Από πού βγαίνει το 5;





Από το Λύκειο: εξισώσεις χωρίς λύση

Εξίσωση	Λύση	Χρειαστήκαμε
$x + 5 = 3$	$x = -2$	αρνητικούς ($\mathbb{Z}$)
$2x = 1$	$x = \frac{1}{2}$	κλάσματα ($\mathbb{Q}$)
$x^2 = 2$	$x = \pm\sqrt{2}$	άρρητους ($\mathbb{R}$)
$x^2 = -1$	$;$	νέο αριθμό i ($\mathbb{C}$)

Στο Λύκειο: $\Delta < 0$, η εξίσωση είναι «αδύνατη στο $\mathbb{R}$ ».

Σήμερα: **λύνεται**, αρκεί να επεκτείνουμε τους αριθμούς άλλη μία φορά.

Η φανταστική μονάδα i

Ορισμός 5.1

i είναι ο αριθμός με $i^2 = -1$.

Τετραγωνικές ρίζες αρνητικών: για
 $a > 0$,

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} i$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} i = 2i$$

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9} i = 3i$$

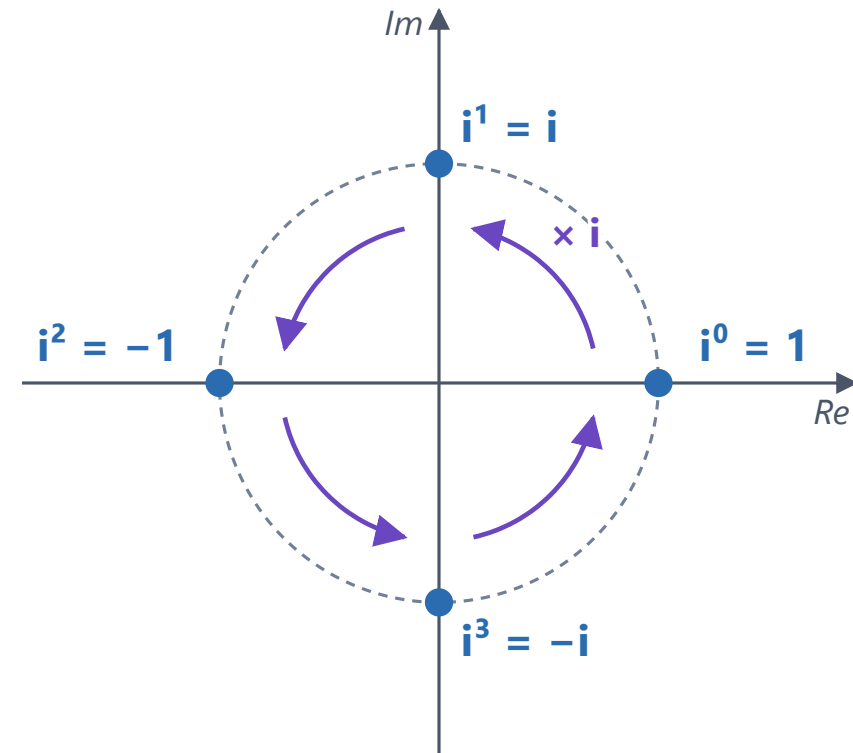
$$\sqrt{-2} = \sqrt{2} i$$

Οι μηχανικοί γράφουν j αντί για i , γιατί το i είναι ήδη το ρεύμα. Είναι ο ίδιος αριθμός: $j^2 = -1$.

Δυνάμεις του i

i^1	i
i^2	-1
$i^3 = i^2 \cdot i$	$-i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1)$	1
$i^5 = i^4 \cdot i$	i

Οι τιμές επαναλαμβάνονται ανά 4.





Παράδειγμα 1: μεγάλες δυνάμεις

Μέθοδος: διαιρούμε τον εκθέτη με το 4 και κρατάμε το υπόλοιπο, γιατί $i^4 = 1$.

Δύναμη	Διαίρεση με 4	Υπόλοιπο	Αποτέλεσμα
i^7	$7 = 4 \cdot 1 + 3$	3	$i^3 = -i$
i^{10}	$10 = 4 \cdot 2 + 2$	2	$i^2 = -1$
i^{25}	$25 = 4 \cdot 6 + 1$	1	$i^1 = i$
i^{100}	$100 = 4 \cdot 25 + 0$	0	$i^0 = 1$

Γιατί; $i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$



Μιγαδικός αριθμός

Ορισμός 5.2

Μιγαδικός αριθμός: $z = a + bi$, με a, b πραγματικούς.

$a = \operatorname{Re} z$: πραγματικό μέρος $b = \operatorname{Im} z$: φανταστικό μέρος

z	$\operatorname{Re} z$	$\operatorname{Im} z$
$3 + 2i$	3	2
$1 - 4i$	1	-4
$-i$	0	-1
5	5	0

Το $\operatorname{Im} z$ είναι **πραγματικός** αριθμός: $\operatorname{Im}(3 + 2i) = 2$, **όχι** $2i$.



Ισότητα μιγαδικών

Πρόταση 5.1

$$a + bi = c + di \iff a = c \text{ και } b = d$$

Παράδειγμα 2

Βρείτε x, y ώστε $(x + 1) + 2yi = 3 - 4i$.

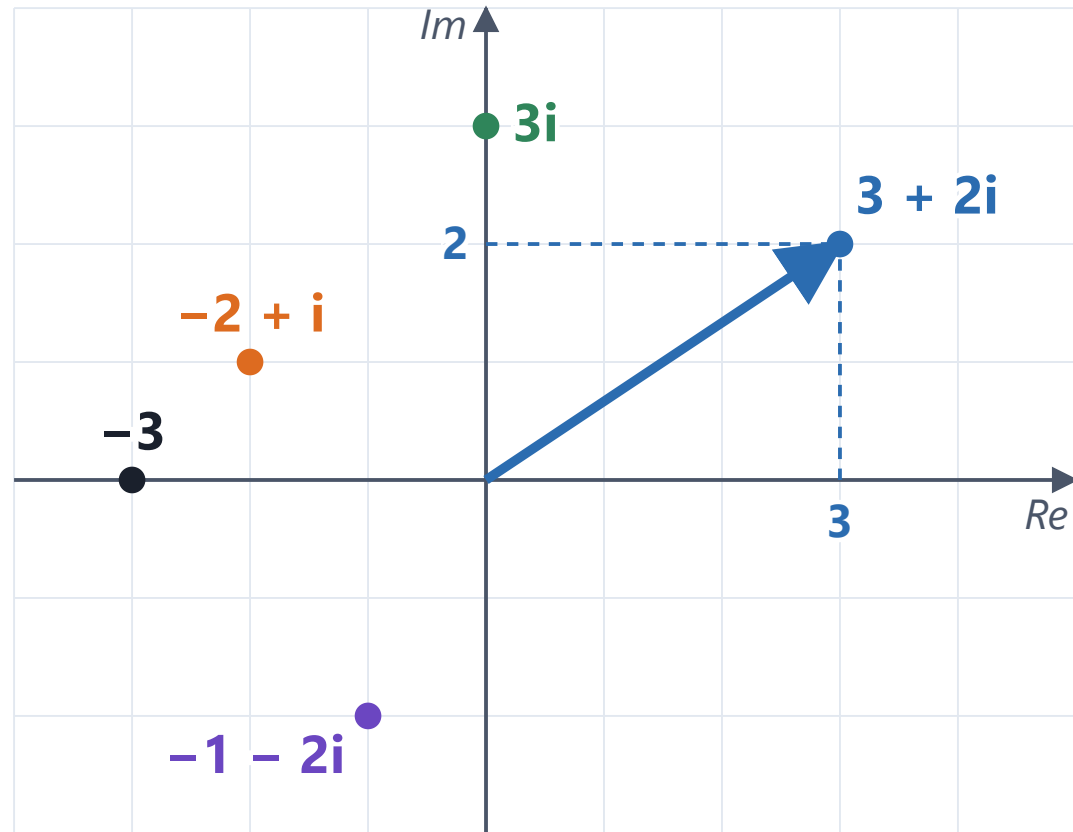
Βήμα 1. Πραγματικά μέρη ίσα: $x + 1 = 3$, άρα $x = 3 - 1 = 2$.

Βήμα 2. Φανταστικά μέρη ίσα: $2y = -4$, άρα $y = -4/2 = -2$.

Μία εξίσωση με μιγαδικούς = **δύο** εξισώσεις με πραγματικούς.

Μιγαδικό επίπεδο

- Ο $z = a + bi$ αντιστοιχεί στο **σημείο** (a, b) .
- Οριζόντιος άξονας: Re .
Κατακόρυφος: Im .
- Ή στο **διάνυσμα** από την αρχή στο (a, b) .
- Οι πραγματικοί είναι πάνω στον οριζόντιο άξονα, π.χ. -3 .





Πρόσθεση και αφαίρεση

Κανόνας

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Παράδειγμα 3: $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 1 + 2i$

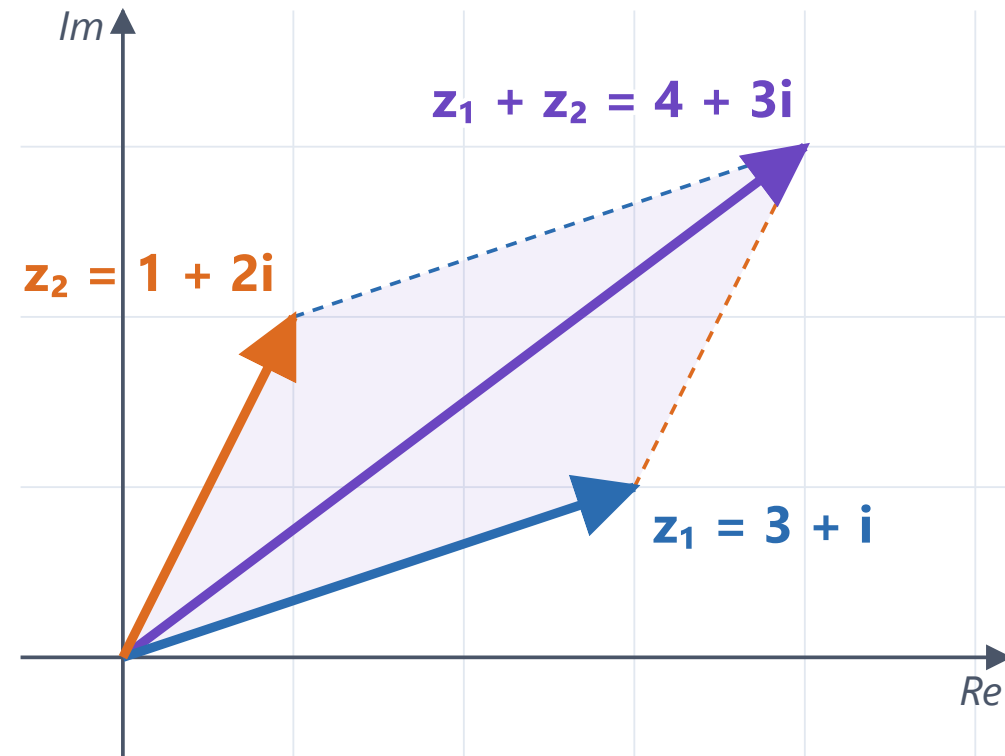
$$z_1 + z_2 = (3 + 1) + (1 + 2)i = 4 + 3i$$

$$z_1 - z_2 = (3 - 1) + (1 - 2)i = 2 - i$$

Πραγματικά με πραγματικά, φανταστικά με φανταστικά: ακριβώς όπως $(3, 1) + (1, 2) = (4, 3)$.

Πρόσθεση: η γεωμετρία

- Η πρόσθεση μιγαδικών είναι **πρόσθεση διανυσμάτων** (Διάλεξη 1).
- Κανόνας του **παραλληλογράμμου**: το $z_1 + z_2$ είναι η διαγώνιος.
- Η αφαίρεση $z_1 - z_2$ είναι το διάνυσμα από το z_2 στο z_1 .





Πολλαπλασιασμός

Κανόνας

Επιμεριστική ιδιότητα («όλοι με όλους»), και όπου εμφανιστεί i^2 βάζουμε -1 .

Παράδειγμα 4: $(2 + 3i)(1 - i)$

Βήμα 1. Όλοι με όλους:

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot (-i) + 3i \cdot 1 + 3i \cdot (-i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2$$

Βήμα 2. $i^2 = -1$: $-3i^2 = -3 \cdot (-1) = +3$

Βήμα 3. Μαζεύουμε: $(2 + 3) + (-2 + 3)i = 5 + i$

Δεν χρειάζεται να απομνημονεύσετε τύπο: είναι πολλαπλασιασμός παρενθέσεων, όπως στο Λύκειο.



Παράδειγμα 5: τρεις σύντομοι πολλαπλασιασμοί

$$(\alpha) (1 + i)^2$$

$$= (1 + i)(1 + i)$$

$$= 1 + i + i + i^2$$

$$= 1 + 2i - 1$$

$$= 2i$$

$$(\beta) (3 + 2i) \cdot i$$

$$= 3i + 2i^2$$

$$= 3i + 2 \cdot (-1)$$

$$= -2 + 3i$$

$$(\gamma) 3(2 - i)$$

$$= 3 \cdot 2 - 3 \cdot i$$

$$= 6 - 3i$$

Στο **(β)**: ο $3 + 2i$ έγινε $-2 + 3i$. Στο επίπεδο, το σημείο $(3, 2)$ πήγε στο $(-2, 3)$: **στροφή κατά 90°** . Θα το εξηγήσουμε στη Διάλεξη 6.



Ψηφοφορία Α: πράξεις

1. $i^3 = ?$

☐ Α 1 ☐ Β i ☐ Γ -1 ☐ Δ $-i$

2. $\text{Im}(4 - 3i) = ?$

☐ Α $-3i$ ☐ Β 4 ☐ Γ -3 ☐ Δ 3

3. $(1 + 2i)(3 - i) = ?$

☐ Α $3 - 2i$ ☐ Β $5 + 5i$ ☐ Γ $1 + 5i$ ☐ Δ $3 + 5i$



forms.cloud.microsoft/e/
RMyB3BLQ3b



Διάλειμμα

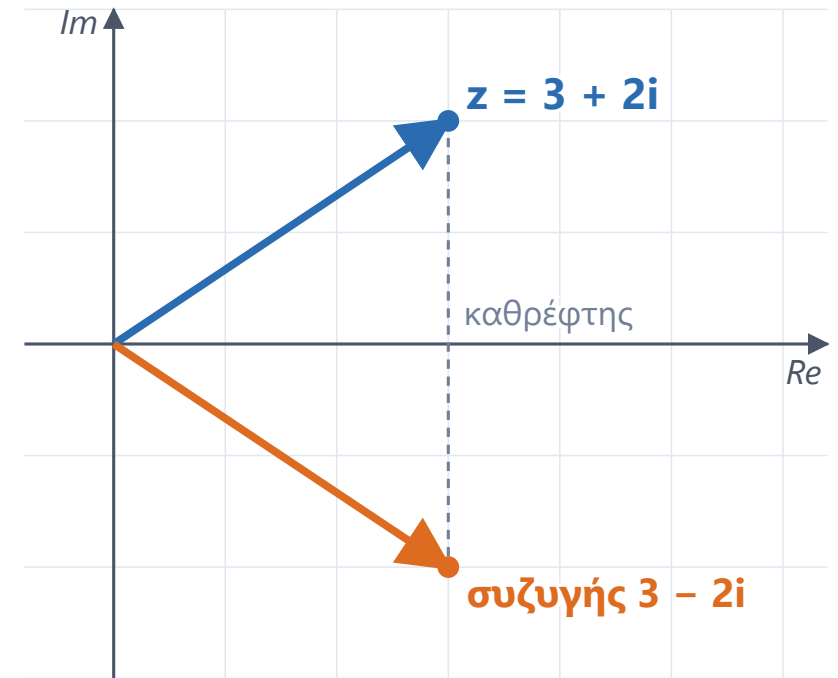
Συνεχίζουμε με συζυγή, διαίρεση και μέτρο

Ορισμός 5.3

Συζυγής του $z = a + bi$: $\bar{z} = a - bi$

Αλλάζει **μόνο** το πρόσημο του φανταστικού μέρους.

z	$\bar{z}$
$3 + 2i$	$3 - 2i$
$-1 - 4i$	$-1 + 4i$
$2i$	$-2i$
5	5





Γινόμενο με τον συζυγή

Πρόταση 5.2

$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$: πάντα πραγματικός και ≥ 0 .

Γιατί; $(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2$
 $= a^2 - b^2 \cdot (-1) = a^2 + b^2$

Παράδειγμα 6: $(3 + 4i)(3 - 4i)$

Όλοι με όλους: $9 - 12i + 12i - 16i^2 = 9 - 16 \cdot (-1) = 9 + 16 = 25$

Με την Πρόταση 5.2: $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \checkmark$

Αυτό είναι το «κόλπο» για τη **διαίρεση**: ο συζυγής «σβήνει» το i από τον παρονομαστή.

Μέθοδος

Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του παρονομαστή:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}$$

- Ο παρονομαστής γίνεται **πραγματικός**: $c^2 + d^2$.
- Μετά διαιρούμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος με αυτόν.
- Το αποτέλεσμα το γράφουμε πάντα στη μορφή $a + bi$.



Παράδειγμα 7: διαίρεση (1/2)

Υπολογίστε $\frac{2 + 3i}{1 - i}$.

Βήμα 1. Συζυγής του παρονομαστή: $\overline{1 - i} = 1 + i$

$$\frac{2 + 3i}{1 - i} = \frac{(2 + 3i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)}$$

Βήμα 2. Αριθμητής, όλοι με όλους:

$$(2 + 3i)(1 + i) = 2 + 2i + 3i + 3i^2 = 2 + 5i - 3 = -1 + 5i$$

Βήμα 3. Παρονομαστής, με την Πρόταση 5.2:

$$(1 - i)(1 + i) = 1^2 + 1^2 = 2$$

Παράδειγμα 7: διαίρεση (2/2)

Βήμα 4. Διαιρούμε κάθε μέρος με το 2:

$$\frac{-1 + 5i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i = -0.5 + 2.5i$$

Έλεγχος: παρονομαστής $\times$ αποτέλεσμα πρέπει να δίνει τον αριθμητή.

$$\begin{aligned}(1 - i)(-0.5 + 2.5i) &= -0.5 + 2.5i + 0.5i - 2.5i^2 \\ &= -0.5 + 3i + 2.5 = 2 + 3i \checkmark\end{aligned}$$

Όχι «διαίρεση κομμάτι-κομμάτι»: $\frac{2 + 3i}{1 - i} \neq \frac{2}{1} + \frac{3}{-1}i = 2 - 3i$



Παράδειγμα 8: δύο ακόμα διαιρέσεις

$$(\alpha) \frac{1}{i}$$

Συζυγής του i : $-i$

$$\frac{1}{i} = \frac{1 \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$$

$$\text{Έλεγχος: } i \cdot (-i) = -i^2 = 1 \checkmark$$

$$(\beta) \frac{10}{3+i}$$

Συζυγής: $3 - i$

$$\begin{aligned} \frac{10(3-i)}{(3+i)(3-i)} &= \frac{30-10i}{3^2+1^2} \\ &= \frac{30-10i}{10} = 3-i \end{aligned}$$

Ορισμός 5.4

$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$
= η **απόσταση** του z από την αρχή.

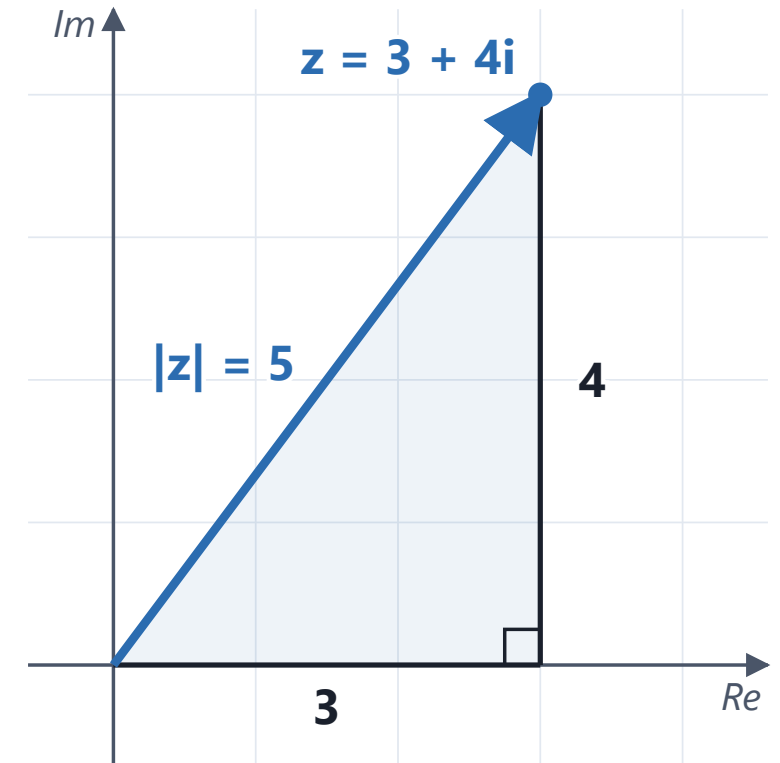
Όπως το μέτρο διανύσματος (Διάλεξη 1):

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|2i| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$$

$$|-5| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5$$



Πρόταση 5.3

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} \quad |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Παράδειγμα 9: $|(3 + 4i)(1 - i)|$ με δύο τρόπους

Τρόπος 1. Πρώτα το γινόμενο: $3 - 3i + 4i - 4i^2 = 3 + i + 4 = 7 + i$

$$|7 + i| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$$

Τρόπος 2. Γινόμενο των μέτρων: $|3 + 4i| \cdot |1 - i| = 5 \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \checkmark$

Για το **άθροισμα** δεν ισχύει: $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$, όπως στα διανύσματα.

Απόσταση δύο μιγαδικών

Η απόσταση των z_1 και z_2 στο επίπεδο είναι $|z_2 - z_1|$.

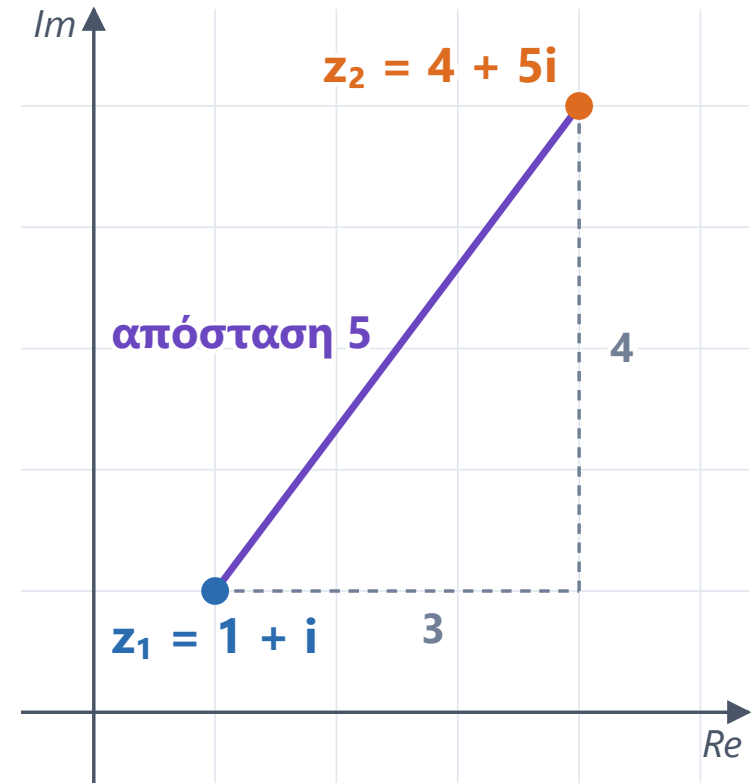
Παράδειγμα 10: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 4 + 5i$

Βήμα 1.

$$z_2 - z_1 = (4 - 1) + (5 - 1)i = 3 + 4i$$

Βήμα 2. $|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$

Ίδιο αποτέλεσμα με την απόσταση των σημείων $P(1, 1)$ και $Q(4, 5)$, από την ψηφοφορία της Διάλεξης 2.





Πίσω στο Λύκειο: $x^2 - 2x + 5 = 0$

Βήμα 1. $a = 1$, $b = -2$, $c = 5$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$$

Βήμα 2. $\Delta < 0$, αλλά τώρα έχει ρίζα: $\sqrt{-16} = \sqrt{16} i = 4i$

Βήμα 3. Ο γνωστός τύπος:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Έλεγχος για $x = 1 + 2i$: $x^2 = 1 + 4i + 4i^2 = -3 + 4i$, $-2x = -2 - 4i$
 $x^2 - 2x + 5 = (-3 + 4i) + (-2 - 4i) + 5 = 0 \checkmark$

Οι δύο ρίζες $1 + 2i$ και $1 - 2i$ είναι **συζυγείς**. Αυτό ισχύει πάντα όταν $\Delta < 0$.

Εφαρμογή: σύνθετη αντίσταση

Στα κυκλώματα εναλλασσόμενου ρεύματος

Κάθε στοιχείο έχει **σύνθετη αντίσταση** Z , έναν μιγαδικό (με j αντί για i):

Στοιχείο	Z	Στο επίπεδο
Αντιστάτης	R	πραγματικός άξονας
Πηνίο	$+jX_L$	πάνω στον φανταστικό άξονα
Πυκνωτής	$-jX_C$	κάτω στον φανταστικό άξονα

- Σε σειρά: οι σύνθετες αντιστάσεις **προστίθενται**, $Z = Z_1 + Z_2$.
- Το ρεύμα βγαίνει από το **μέτρο**: $I = V/|Z|$.

Λύση του προβλήματος

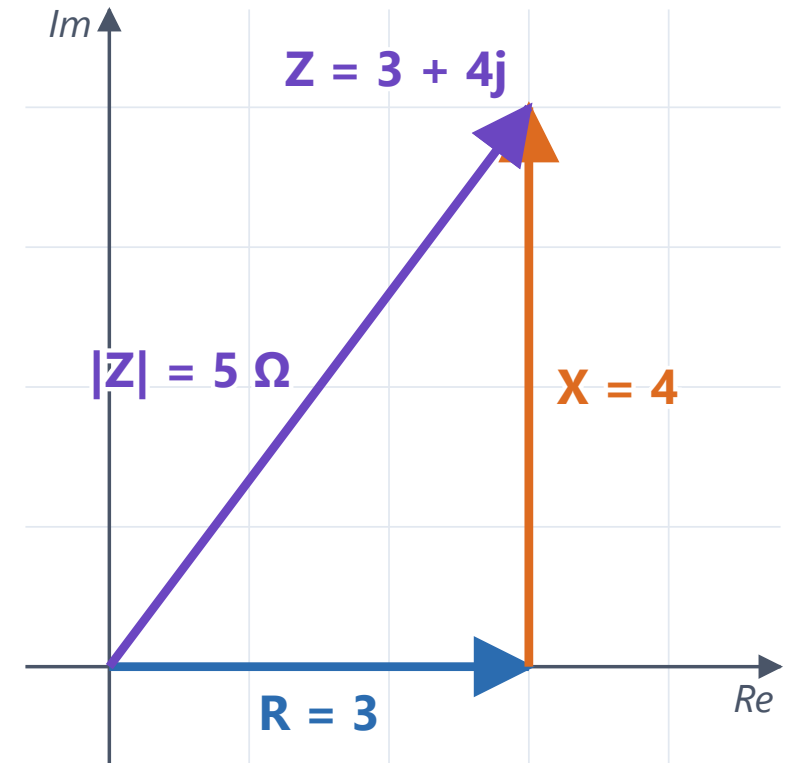
Βήμα 1. Σε σειρά: $Z = R + jX = 3 + 4j \Omega$

Βήμα 2. Μέτρο:

$$|Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \Omega$$

Βήμα 3. Ρεύμα: $I = \frac{V}{|Z|} = \frac{10}{5} = 2 \text{ A} \checkmark$

Γιατί όχι 7; Το 3 και το 4 είναι **κάθετα**
(πραγματικός και φανταστικός άξονας).
Προστίθενται σαν διανύσματα, με
Πυθαγόρειο: το «5 και όχι 7» της Διάλεξης 1.



Εφαρμογή: παράλληλη σύνδεση

Αντιστάτης $Z_1 = 2 \Omega$ παράλληλα με πηνίο $Z_2 = 2j \Omega$. Η συνολική σύνθετη αντίσταση είναι

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Βήμα 1. Γινόμενο: $Z_1 Z_2 = 2 \cdot 2j = 4j$. Άθροισμα: $Z_1 + Z_2 = 2 + 2j$

Βήμα 2. Διαίρεση, με τον συζυγή $2 - 2j$:

$$Z = \frac{4j(2 - 2j)}{(2 + 2j)(2 - 2j)} = \frac{8j - 8j^2}{2^2 + 2^2} = \frac{8 + 8j}{8} = 1 + j \Omega$$

Βήμα 3. $|Z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1.41 \Omega$

Χρηαστήκαμε **όλες** τις σημερινές πράξεις.



Συνήθη λάθη

Λάθος	Σωστό
$i^2 = 1$	$i^2 = -1$
$\text{Im}(3 + 2i) = 2i$	$\text{Im}(3 + 2i) = 2$
$\overline{3 + 2i} = -3 + 2i$	$\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$ (αλλάζει μόνο το Im)
$ 3 + 4i = 3 + 4 = 7$	$ 3 + 4i = \sqrt{9 + 16} = 5$
$\frac{4 + 2i}{1 + i} = 4 + 2i$ («κομμάτι-κομμάτι»)	$\frac{(4 + 2i)(1 - i)}{2} = \frac{6 - 2i}{2} = 3 - i$
$\sqrt{-9} = -3$	$\sqrt{-9} = 3i$

Ψηφοφορία Β: συζυγής, μέτρο, διαίρεση

1. Ο συζυγής του $-2 + 5i$ είναι:

A $2 - 5i$ **B** $-2 - 5i$ **Γ** $2 + 5i$ **Δ** $5 - 2i$

2. $|-3 + 4i| = ?$

A 1 **B** 7 **Γ** 5 **Δ** 25

3. $\frac{5}{1 + 2i} = ?$

A $5 - 10i$ **B** $1 + 2i$ **Γ** $5 + 2.5i$ **Δ** $1 - 2i$



forms.cloud.microsoft/e/
Pu6ineghhZ



Άσκηση στην τάξη (10')

Δίνονται $z_1 = 3 + 2i$ και $z_2 = 1 - i$.

1. Υπολογίστε $z_1 + z_2$ και $z_1 - z_2$.
2. Υπολογίστε $z_1 \cdot z_2$ και το μέτρο του.
3. Υπολογίστε $\frac{z_1}{z_2}$ στη μορφή $a + bi$.
4. Λύστε την εξίσωση $x^2 + 4x + 13 = 0$.



Λύσεις (1/2)

1. $z_1 + z_2 = (3 + 1) + (2 + (-1))i = 4 + i$

$$z_1 - z_2 = (3 - 1) + (2 - (-1))i = 2 + 3i$$

2. $(3 + 2i)(1 - i) = 3 - 3i + 2i - 2i^2 = 3 - i + 2 = 5 - i$

$$|5 - i| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

Έλεγχος: $|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{9 + 4} \cdot \sqrt{1 + 1} = \sqrt{13} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{26} \checkmark$



Λύσεις (2/2)

3. Συζυγής του παρονομαστή: $1 + i$

$$\frac{(3 + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{3 + 3i + 2i + 2i^2}{1^2 + 1^2} = \frac{1 + 5i}{2} = 0.5 + 2.5i$$

4. $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36, \quad \sqrt{-36} = 6i$

$$x = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i$$



Σύνοψη

Φανταστική μονάδα	$i^2 = -1$, οι δυνάμεις επαναλαμβάνονται ανά 4
Μορφή	$z = a + bi$, $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$
Πρόσθεση	κατά μέρη, σαν διανύσματα
Πολλαπλασιασμός	όλοι με όλους, και $i^2 = -1$
Συζυγής	$\bar{z} = a - bi$, $z\bar{z} = a^2 + b^2$
Διαίρεση	$\times$ συζυγή του παρονομαστή, πάνω και κάτω
Μέτρο	$ z = \sqrt{a^2 + b^2}$: απόσταση από την αρχή

Επόμενη διάλεξη (Τρίτη 13/10): πολική μορφή, τύπος του Euler, ο πολλαπλασιασμός ως **στροφή**.