



Γραμμική Άλγεβρα

Διάλεξη 6: Μιγαδικοί αριθμοί II

ECE107 · Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών · ΕΛΜΕΠΑ

Τρίτη 20 Οκτωβρίου 2026

Μανίκης Γιώργος - manikis@hmu.gr



Ανακεφαλαίωση

Φανταστική μονάδα	$i^2 = -1$
Μορφή	$z = a + bi$, σημείο (a, b) του επιπέδου
Πολλαπλασιασμός	όλοι με όλους, και $i^2 = -1$
Διαίρεση	$\times$ συζυγή του παρονομαστή, πάνω και κάτω
Μέτρο	$ z = \sqrt{a^2 + b^2}$: απόσταση από την αρχή

Σήμερα: μια **δεύτερη μορφή** για τον ίδιο αριθμό, με **μέτρο και γωνία**. Θέλει λίγη τριγωνομετρία, που θα τη χτίσουμε **από την αρχή**.



Επανάληψη Διάλεξης 5

1. $(2 + i)(2 - i) = ?$

☐ A 3 ☐ B 5 ☐ Γ 4 ☐ Δ $4 - 4i$

2. $|6 - 8i| = ?$

☐ A 14 ☐ B 100 ☐ Γ 10 ☐ Δ -2

3. $\frac{1}{1 + i} = ?$

☐ A $0.5 - 0.5i$ ☐ B $1 - i$ ☐ Γ $1 + i$ ☐ Δ $0.5 + 0.5i$



[forms.cloud.microsoft/e/
dzPb6252aB](https://forms.cloud.microsoft/e/dzPb6252aB)



Στόχοι της διάλεξης

Στο τέλος θα μπορείτε να:

- Βρίσκετε $\cos \theta$ και $\sin \theta$ για τις βασικές γωνίες, σε **όλα** τα τεταρτημόρια.
- Γράφετε έναν μιγαδικό σε **πολική** μορφή $r (\cos \theta + i \sin \theta)$ και αντίστροφα.
- Βρίσκετε σωστά τη **γωνία** θ , σε όποιο τεταρτημόριο κι αν είναι.
- Πολλαπλασιάζετε και διαιρείτε σε πολική μορφή: **στροφή** και **κλιμάκωση**.
- Υψώνετε σε **δύναμη** (de Moivre) και βρίσκετε **ρίζες**.
- Προσθέτετε εναλλασσόμενες τάσεις με **φάσορες**.



Ένα πρόβλημα

Πρόβλημα

Υπολογίστε το $(1 + i)^{10}$.

- Με την αλγεβρική μορφή: **9** **πολλαπλασιασμοί**, «όλοι με όλους» κάθε φορά.
- Σήμερα: σε **τρεις γραμμές**.

Η «δύσκολη» μέθοδος:

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$$

$$(1 + i)^3 = 2i(1 + i) = -2 + 2i$$

$$(1 + i)^4 = (-2 + 2i)(1 + i) = -4$$

$$(1 + i)^5 = -4(1 + i) = -4 - 4i$$

$\vdots$

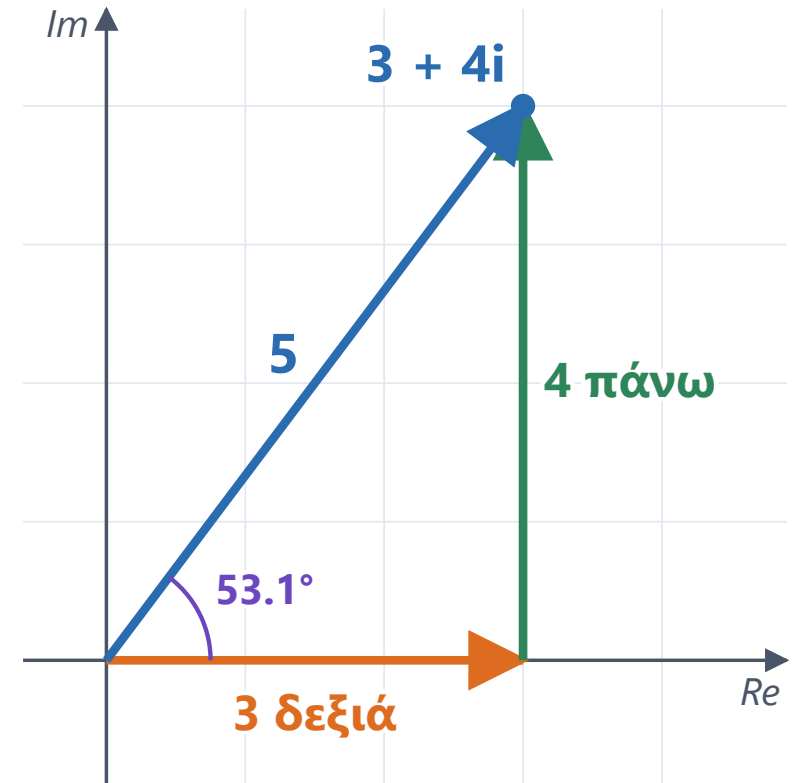
$$(1 + i)^{10} = ?$$

Δύο τρόποι να περιγράψουμε ένα σημείο

Πού βρίσκεται ο μιγαδικός $3 + 4i$;

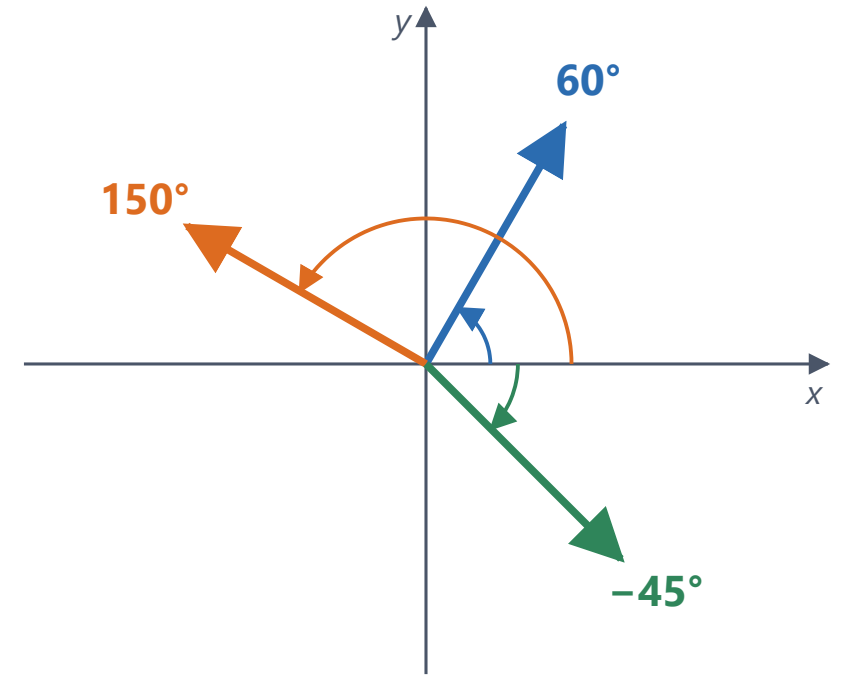
- **Καρτεσιανά:** 3 μονάδες δεξιά, 4 μονάδες πάνω. Αυτή είναι η μορφή $a + bi$.
- **Πολικά:** απόσταση $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ από την αρχή, σε κατεύθυνση 53.1° από τον άξονα Re.
- Έτσι δουλεύει ένα **ραντάρ**: δίνει την απόσταση και τη γωνία του στόχου.

Για να περνάμε από τη μία περιγραφή στην άλλη χρειαζόμαστε **τριγωνομετρία**. Την ξαναχτίζουμε βήμα-βήμα.



Γωνίες στο επίπεδο

- Μετράμε από τον **θετικό** ημιάξονα x .
- **Αριστερόστροφα** (αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού): **θετική** γωνία, π.χ. 60° ή 150° .
- **Δεξιόστροφα**: **αρνητική** γωνία, π.χ. -45° .
- Μια πλήρης στροφή είναι 360° . Γι' αυτό οι -45° και $360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$ δείχνουν **την ίδια** κατεύθυνση.



Θυμόμαστε: ορθογώνιο τρίγωνο

Υπενθύμιση: οξεία γωνία θ ορθογωνίου τριγώνου

$\cos \theta = \text{προσκείμενη} / \text{υποτείνουσα}$

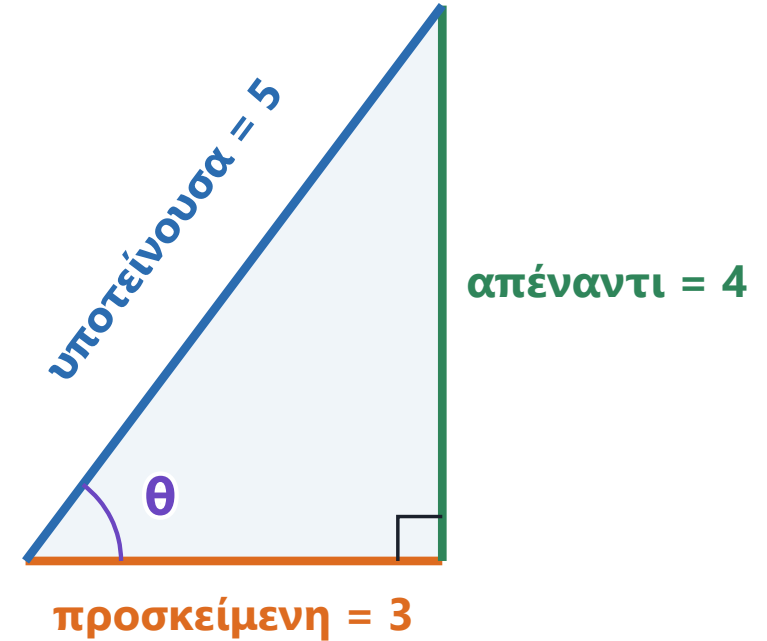
$\sin \theta = \text{απέναντι} / \text{υποτείνουσα}$

$\tan \theta = \text{απέναντι} / \text{προσκείμενη}$

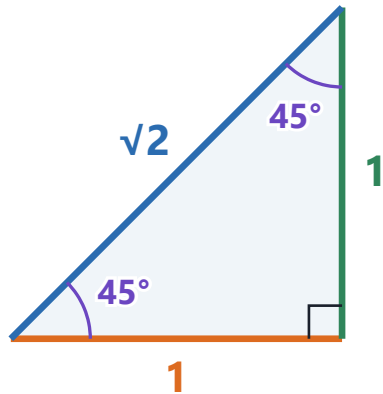
Στο σχήμα:

$$\cos \theta = \frac{3}{5}, \quad \sin \theta = \frac{4}{5}, \quad \tan \theta = \frac{4}{3}$$

Αυτό θα χρειαστούμε: προσκείμενη =
υποτείνουσα $\cdot \cos \theta$ και απέναντι =
υποτείνουσα $\cdot \sin \theta$.



Οι τιμές για 45°



Βήμα 1. Ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 1 και 1. Οι δύο οξείες γωνίες είναι ίσες, άρα η καθεμιά είναι $\frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$.

Βήμα 2. Υποτείνουσα με το Πυθαγόρειο:
 $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

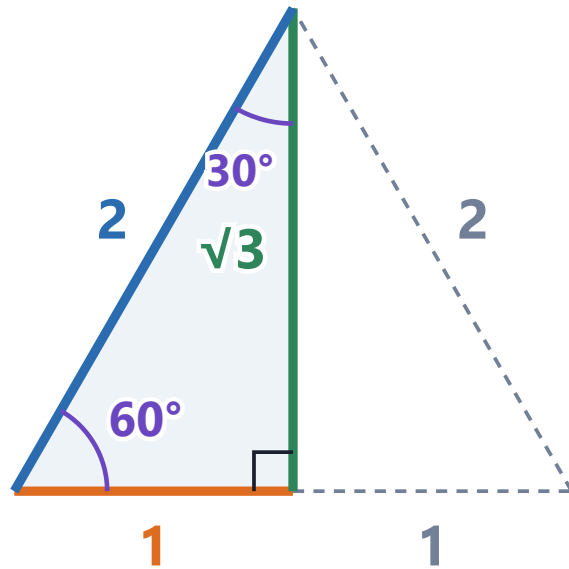
Βήμα 3. Από τους ορισμούς:

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

Πάνω και κάτω επί $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$$

Οι τιμές για 30° και 60°



Βήμα 1. Ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 2 (γωνίες 60°), κομμένο στη μέση από το ύψος: βάση 1, υποτείνουσα 2, γωνίες 60° κάτω και 30° πάνω.

Βήμα 2. Ύψος: $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$

Βήμα 3. Για 60° : προσκείμενη 1, απέναντι $\sqrt{3}$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Για 30° : προσκείμενη $\sqrt{3}$, απέναντι 1

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

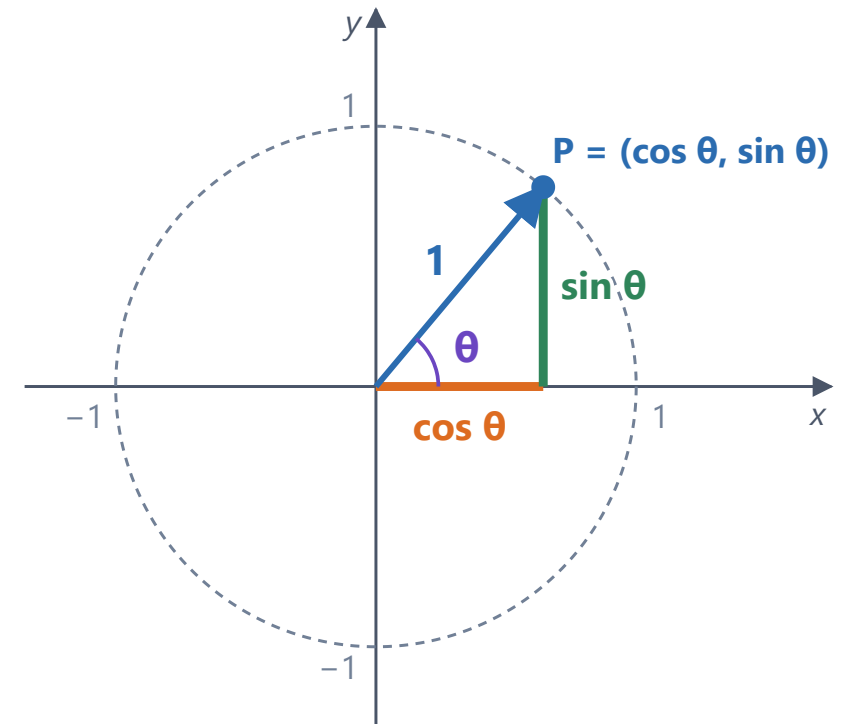
Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Τριγωνομετρικός κύκλος

Κύκλος με κέντρο την αρχή και ακτίνα 1. Το σημείο του στη γωνία θ είναι

$$P = (\cos \theta, \sin \theta)$$

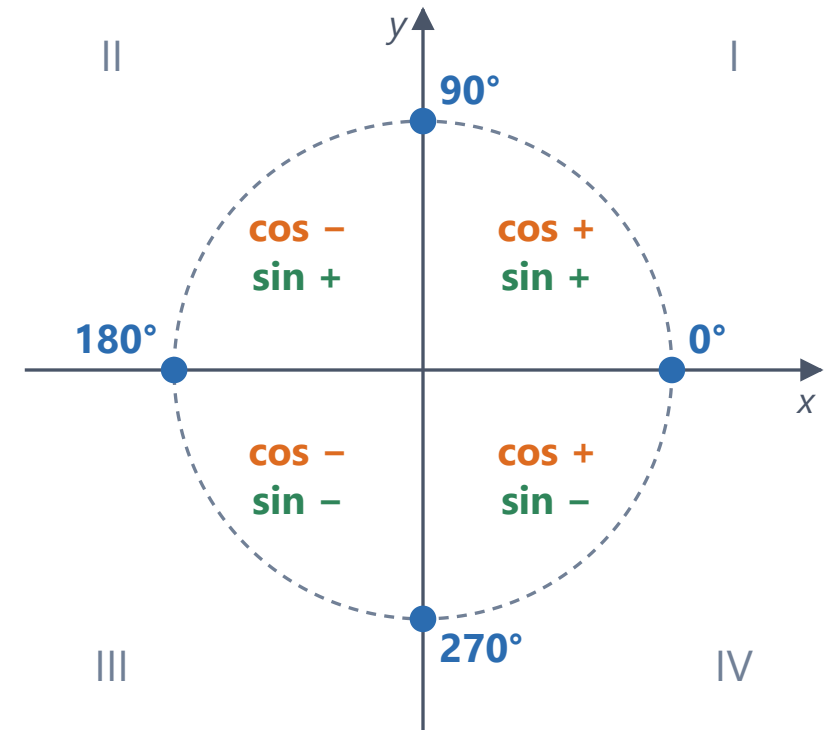
- **Γιατί;** Τρίγωνο με υποτείνουσα 1: οριζόντια πλευρά $1 \cdot \cos \theta$, κατακόρυφη $1 \cdot \sin \theta$.
- Έτσι ορίζουμε $\cos \theta$ και $\sin \theta$ για **κάθε** γωνία, όχι μόνο για οξεία: $\cos \theta$ είναι η x του P και $\sin \theta$ η y του P .



Πρόσημα και γωνίες πάνω στους άξονες

θ	0°	90°	180°	270°
σημείο P	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(-1, 0)$	$(0, -1)$
$\cos \theta$	1	0	-1	0
$\sin \theta$	0	1	0	-1

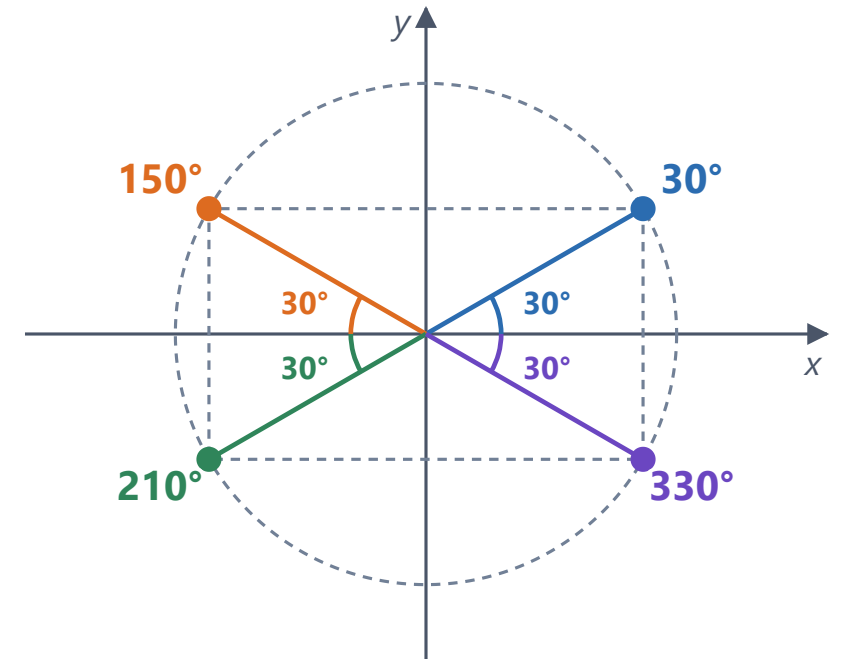
- Παράδειγμα: στις 180° το P είναι το $(-1, 0)$, άρα $\cos 180^\circ = -1$ και $\sin 180^\circ = 0$.
- $\cos \theta > 0$ **δεξιά** του άξονα y (I, IV).
- $\sin \theta > 0$ **πάνω** από τον άξονα x (I, II).



Γωνίες πέρα από τις 90° : η βασική γωνία

Τα τέσσερα σημεία είναι **συμμετρικά**: όλα σχηματίζουν 30° με τον άξονα x . Αυτή είναι η **βασική γωνία**. Οι απόλυτες τιμές είναι ίδιες και αλλάζουν μόνο τα **πρόσημα**.

θ		$\cos \theta$	$\sin \theta$
30°	I	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$	II	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$
$210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$	III	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$
$330^\circ = 360^\circ - 30^\circ$	IV	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$



Συνοψίζοντας: πίνακας τιμών

Γωνία	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
ακτίνια	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1

- Άλλα τεταρτημόρια: τιμή της **βασικής γωνίας** από τον πίνακα, **πρόσημο** από το σχήμα.

- Ακτίνια: $180^\circ = \pi$, άρα $60^\circ = \frac{60}{180} \pi = \frac{\pi}{3}$.

Κομπιουτεράκι: σε **DEG** όταν δουλεύουμε με μοίρες.

Ορισμός 6.1

$$z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$r = |z|$: **μέτρο** (απόσταση από την αρχή)

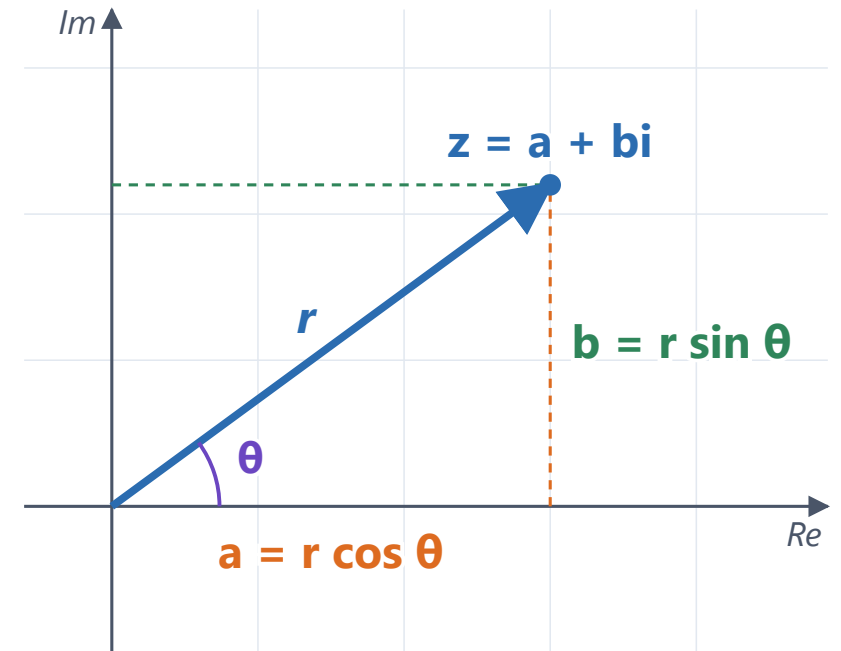
$\theta = \arg z$: **όρισμα** (γωνία με τον θετικό άξονα Re)

Σύντομα γράφουμε $z = r \angle \theta$.

Γιατί; Στο τρίγωνο με υποτείνουσα r :

$a = r \cos \theta$ (προσκεείμενη), $b = r \sin \theta$ (απέναντι)

άρα $a + bi = r \cos \theta + i r \sin \theta$.





Παράδειγμα 1: από πολική σε $a + bi$

Μέθοδος: $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$, με τα $\cos \theta$, $\sin \theta$ από τον πίνακα.

(α) $2 \angle 60^\circ$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$b = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

(β) $4 \angle 90^\circ$

$$\cos 90^\circ = 0$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$a = 4 \cdot 0 = 0$$

$$b = 4 \cdot 1 = 4$$

$$z = 4i$$

(γ) $3 \angle 180^\circ$

$$\cos 180^\circ = -1$$

$$\sin 180^\circ = 0$$

$$a = 3 \cdot (-1) = -3$$

$$b = 3 \cdot 0 = 0$$

$$z = -3$$

Έλεγχος στο (α): $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = 2 \checkmark$, ίσο με το r .



Παράδειγμα 2: πολική σε $a + bi$, άλλα τεταρτημόρια

(α) $4\angle 150^\circ$

Βήμα 1. II τεταρτημόριο, βασική γωνία $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

Βήμα 2. $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (αριστερά)
 $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ (πάνω)

Βήμα 3. $a = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}$
 $b = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$, άρα $z = -2\sqrt{3} + 2i$

(β) $2\angle(-45^\circ)$

Βήμα 1. IV τεταρτημόριο, βασική γωνία 45°

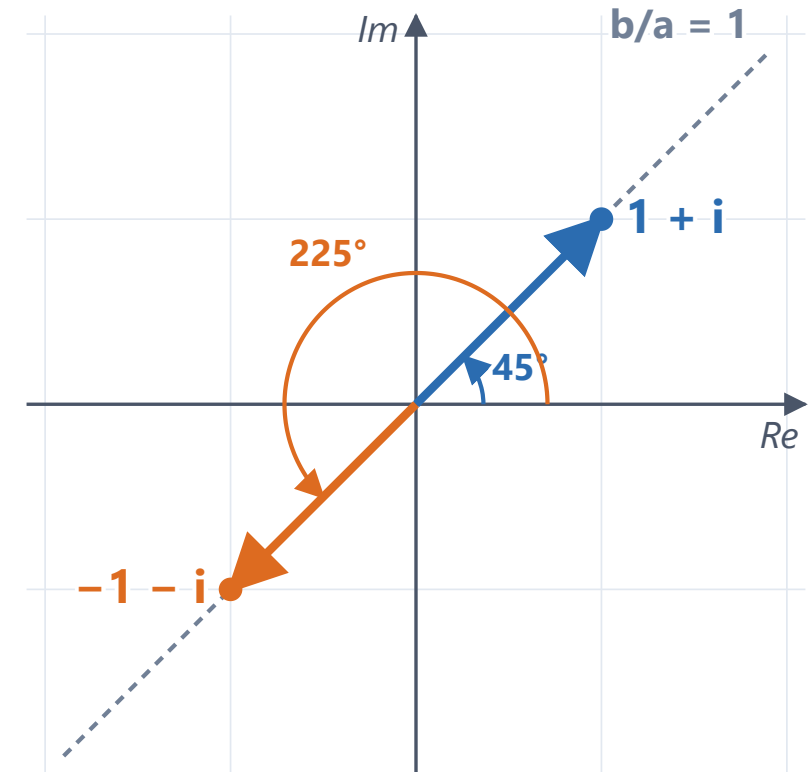
Βήμα 2. $\cos(-45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (δεξιά)
 $\sin(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (κάτω)

Βήμα 3. $a = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$
 $b = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$, άρα
 $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

Από $a + bi$ σε πολική: το πρόβλημα της γωνίας

- Μέτρο: εύκολο, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (Διάλεξη 5).
- Γωνία: από το τρίγωνο, $\tan \theta = \frac{b}{a}$.
- Όμως: για $1 + i$ και για $-1 - i$ βγαίνει $\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} = 1$.
- Τα δύο σημεία είναι στην **ίδια ευθεία**, αλλά σε **αντίθετες** κατευθύνσεις: 45° και 225° .

Η $\tan$ (και το κουμπί $\tan^{-1}$) δεν ξεχωρίζει τα δύο σημεία. Χρειαζόμαστε το **σχήμα**.





Από $a + bi$ σε πολική: η μέθοδος

Μέθοδος

Βήμα 1. $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Βήμα 2. Σχεδιάζουμε το σημείο (a, b) : σε ποιο τεταρτημόριο είναι;

Βήμα 3. Βασική (οξεία) γωνία θ_0 από $\tan \theta_0 = \frac{|b|}{|a|}$

Βήμα 4. Διορθώνουμε ανάλογα με το τεταρτημόριο:

Τεταρτημόριο	I	II	III	IV
Πρόσημα	$a > 0, b > 0$	$a < 0, b > 0$	$a < 0, b < 0$	$a > 0, b < 0$
θ	θ_0	$180^\circ - \theta_0$	$180^\circ + \theta_0$	$-\theta_0$



Παράδειγμα 3: $z = 1 + i$ (I τεταρτημόριο)

Βήμα 1. $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

Βήμα 2. $a = 1 > 0, b = 1 > 0$: I τεταρτημόριο.

Βήμα 3. $\tan \theta_0 = \frac{1}{1} = 1$. Ποια γωνία έχει εφαπτομένη 1; Από το ισοσκελές τρίγωνο, η 45° . Άρα $\theta_0 = 45^\circ$.

Βήμα 4. Στο I τεταρτημόριο $\theta = \theta_0 = 45^\circ$.

$$1 + i = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \sqrt{2} \angle 45^\circ$$

Έλεγχος: $a = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ και $b = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$, άρα $1 + 1 \cdot i \checkmark$

Παράδειγμα 4: $z = -1 + i$ (II τεταρτημόριο)

Βήμα 1. $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

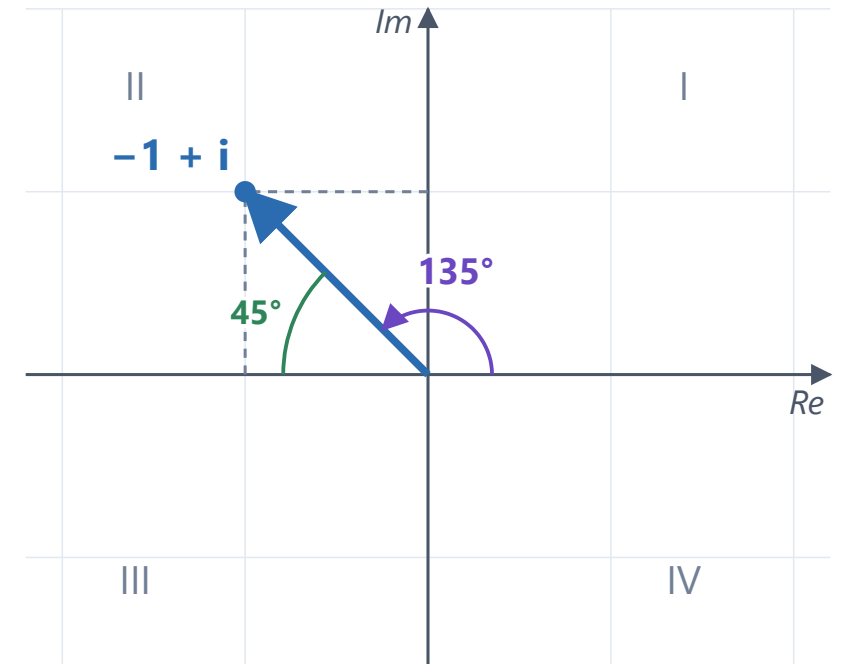
Βήμα 2. $a = -1 < 0, b = 1 > 0$: II τεταρτημόριο.

Βήμα 3. $\tan \theta_0 = \frac{|1|}{|-1|} = 1$, άρα $\theta_0 = 45^\circ$.

Βήμα 4. $\theta = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

$$-1 + i = \sqrt{2} \angle 135^\circ$$

Κομπιουτεράκι: $\tan^{-1} \frac{1}{-1} = -45^\circ$ Χ. Αυτή είναι η γωνία του $1 - i$! **Πάντα σχήμα.**



Παράδειγμα 5: $z = -\sqrt{3} - i$ (III τεταρτημόριο)

Βήμα 1.

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

Βήμα 2. $a < 0$ και $b < 0$: **III** τεταρτημόριο.

Βήμα 3. $\tan \theta_0 = \frac{|-1|}{|-\sqrt{3}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, άρα $\theta_0 = 30^\circ$

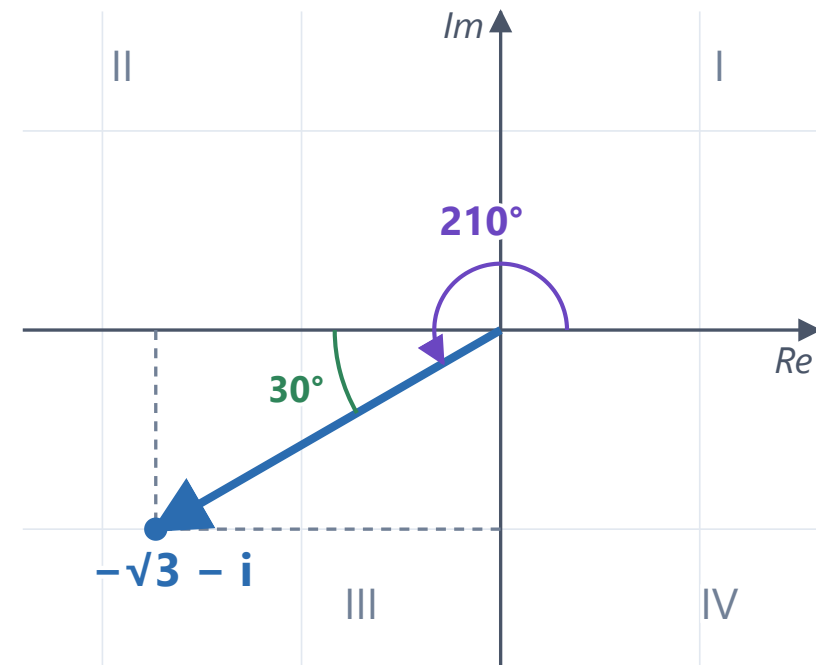
(μισό ισόπλευρο: απέναντι 1, προσκείμενη $\sqrt{3}$)

Βήμα 4. $\theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$

$$-\sqrt{3} - i = 2\angle 210^\circ$$

Έλεγχος: $2 \cos 210^\circ = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} \checkmark$

$$2 \sin 210^\circ = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \checkmark$$



Παράδειγμα 6: $z = 1 - \sqrt{3}i$ (IV τεταρτημόριο)

Βήμα 1. $r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$

Βήμα 2. $a > 0$ και $b < 0$: **IV** τεταρτημόριο.

Βήμα 3. $\tan \theta_0 = \frac{|-\sqrt{3}|}{|1|} = \sqrt{3}$, άρα $\theta_0 = 60^\circ$

(μισό ισόπλευρο: απέναντι $\sqrt{3}$, προσκείμενη 1)

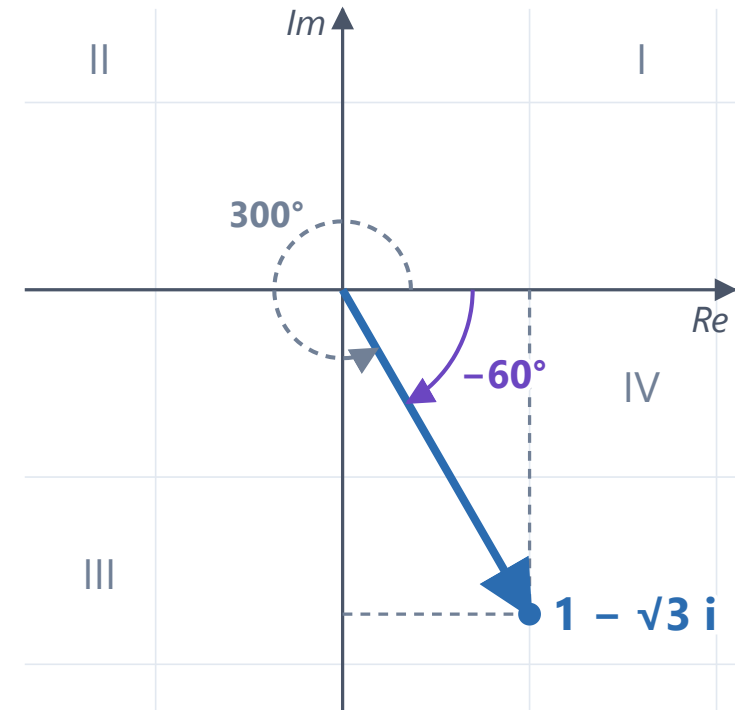
Βήμα 4. $\theta = -60^\circ$, ή ισοδύναμα

$$360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$$

$$1 - \sqrt{3}i = 2\angle(-60^\circ)$$

Έλεγχος: $2 \cos(-60^\circ) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \checkmark$

$$2 \sin(-60^\circ) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} \checkmark$$

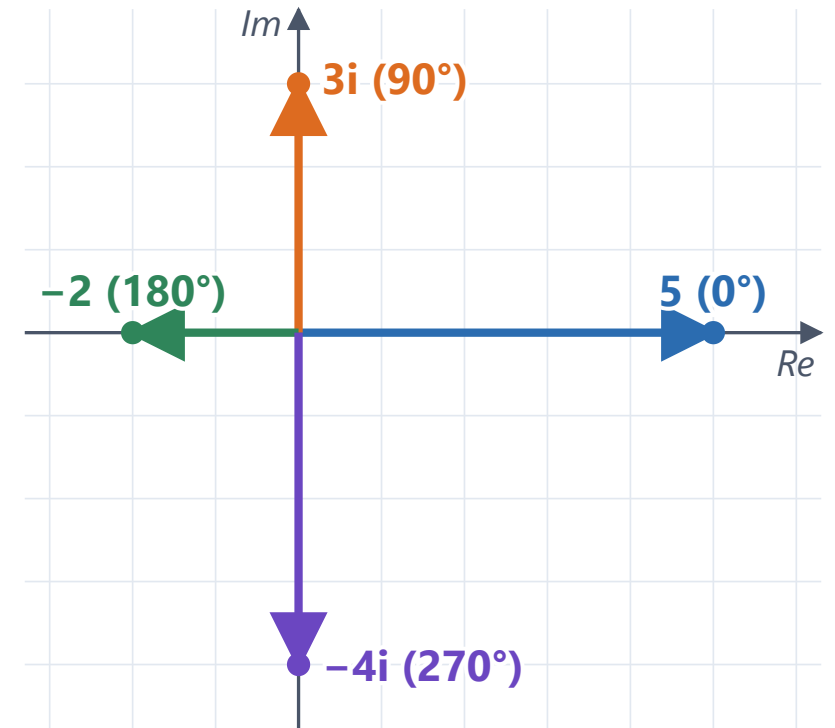


Σημεία πάνω στους άξονες

Αν $a = 0$ ή $b = 0$, το σημείο είναι πάνω σε άξονα. Δεν χρειάζεται $\tan$ (με $a = 0$ το $\frac{b}{a}$ δεν ορίζεται καν): τη γωνία τη βλέπουμε στο σχήμα.

z	σημείο	r	θ
5	(5, 0)	5	0°
$3i$	(0, 3)	3	90°
-2	(-2, 0)	2	180°
$-4i$	(0, -4)	4	270° ή -90°

Το μέτρο είναι **πάντα θετικό**: $-2 = 2 \angle 180^\circ$.
Το «μείον» το δίνει η γωνία.



Παράδειγμα 7: $z = 3 + 4i$ (γωνία με κομπιουτεράκι)

Βήμα 1. $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Βήμα 2. $a = 3 > 0, b = 4 > 0$: I τεταρτημόριο.

Βήμα 3. $\tan \theta_0 = \frac{4}{3} \approx 1.333$. Δεν είναι γωνία

του πίνακα, άρα κομπιουτεράκι σε DEG:

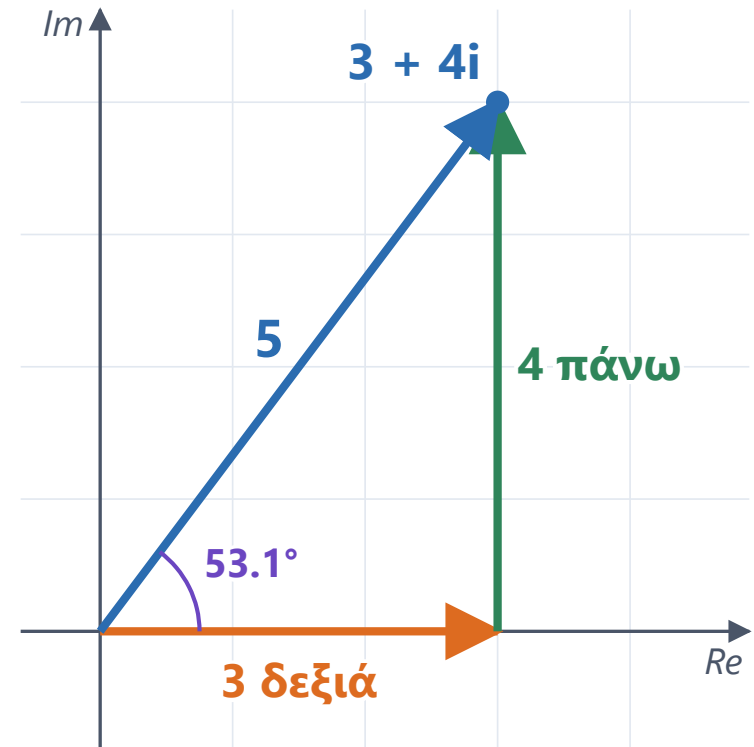
$$\tan^{-1}(4/3) \approx 53.13^\circ$$

Βήμα 4. Στο I τεταρτημόριο $\theta = \theta_0 \approx 53.1^\circ$.

$$3 + 4i \approx 5 \angle 53.1^\circ$$

Έλεγχος: $5 \cos 53.13^\circ \approx 5 \cdot 0.6 = 3 \checkmark$

$$5 \sin 53.13^\circ \approx 5 \cdot 0.8 = 4 \checkmark$$



Πρόταση 6.1

Αν $z_1 = r_1 \angle \theta_1$ και $z_2 = r_2 \angle \theta_2$, τότε

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

- Τα μέτρα **πολλαπλασιάζονται**, οι γωνίες **προστίθενται**.
- Π.χ. $(2 \angle 10^\circ) \cdot (5 \angle 20^\circ) = (2 \cdot 5) \angle (10^\circ + 20^\circ) = 10 \angle 30^\circ$
- Σε αλγεβρική μορφή: «όλοι με όλους», τέσσερα γινόμενα. Σε πολική: **ένας** πολλαπλασιασμός και **μία** πρόσθεση.



Γιατί ισχύει η Πρόταση 6.1;

Χρησιμοποιούμε τους τύπους αθροίσματος της τριγωνομετρίας:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Βήμα 1. Όλοι με όλους:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \sin \beta + i \sin \alpha \cos \beta + i^2 \sin \alpha \sin \beta$$

Βήμα 2. $i^2 = -1$, και χωρίζουμε πραγματικό και φανταστικό μέρος:

$$= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)$$

Βήμα 3. Οι παρενθέσεις είναι ακριβώς οι τύποι αθροίσματος:

$$= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

Τα μέτρα r_1, r_2 βγαίνουν μπροστά και πολλαπλασιάζονται. Την απόδειξη δεν χρειάζεται να τη θυμάστε: θυμάστε τον κανόνα **μέτρα επί, γωνίες συν.**

Παράδειγμα 8: πολλαπλασιασμός (1/2)

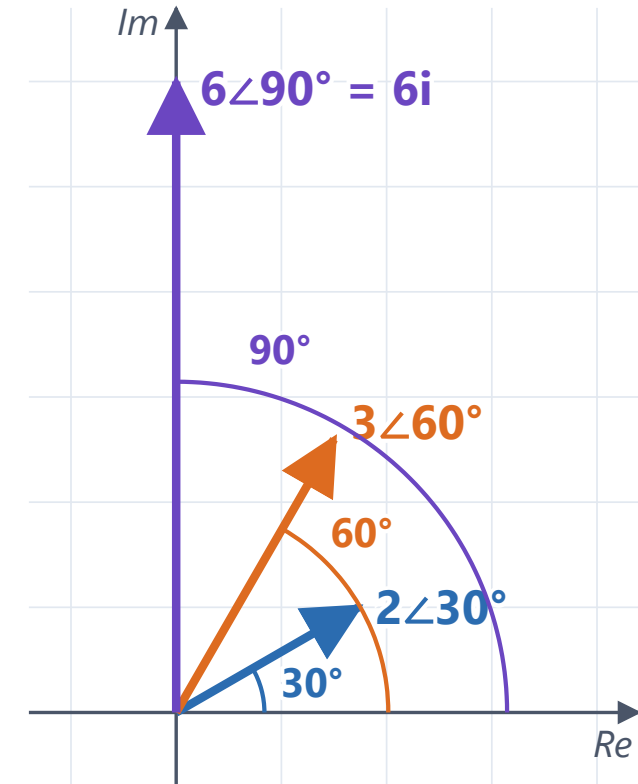
Υπολογίστε $(2\angle 30^\circ) \cdot (3\angle 60^\circ)$.

Βήμα 1. Μέτρα επί: $2 \cdot 3 = 6$

Βήμα 2. Γωνίες συν: $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

Βήμα 3. $6\angle 90^\circ = 6(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$
 $= 6(0 + 1 \cdot i) = 6i$

Δύο γραμμές πράξεις. Στην επόμενη διαφάνεια, το ίδιο σε αλγεβρική μορφή.



Παράδειγμα 8: έλεγχος σε $a + bi$ (2/2)

Βήμα 1. Σε αλγεβρική μορφή:

$$2\angle 30^\circ = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i \quad 3\angle 60^\circ = 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

Βήμα 2. Όλοι με όλους (με $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$):

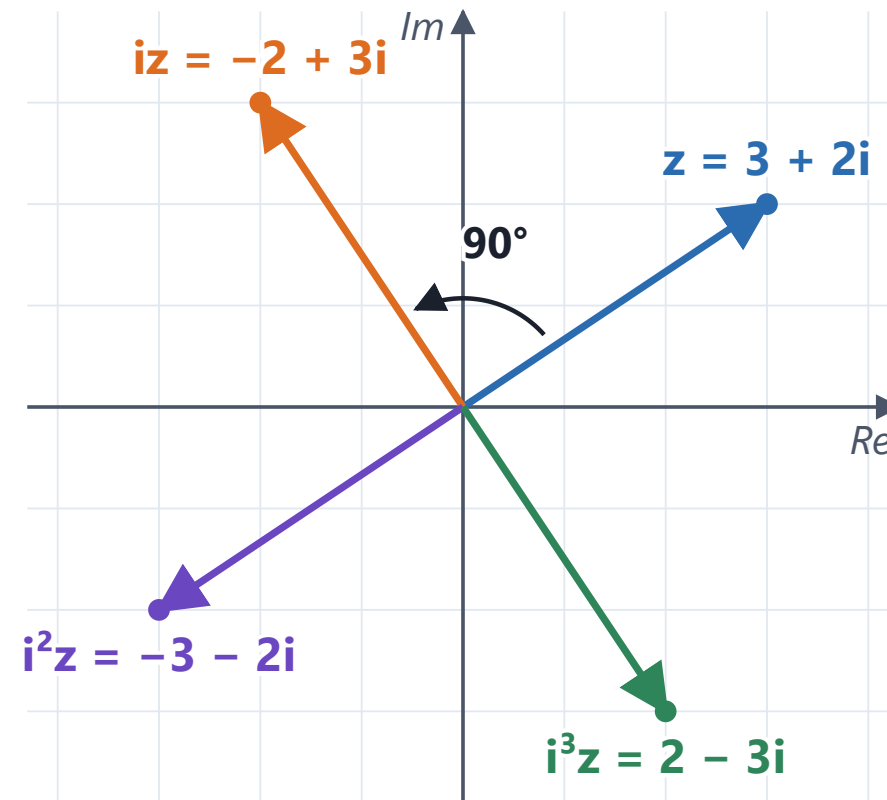
$$(\sqrt{3} + i) \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2}i + \frac{3}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i^2$$

Βήμα 3. $i^2 = -1$ και μαζεύουμε:

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2} \right)i = 0 + 6i = 6i \checkmark$$

Ο πολλαπλασιασμός είναι στροφή

- Πολλαπλασιασμός με $r\angle\theta$:
στροφή κατά θ και **τέντωμα** κατά r .
- Το $i = 1\angle 90^\circ$: στροφή 90° , ίδιο μήκος.
- Διάλεξη 5:
 $(3 + 2i) \cdot i = -2 + 3i \checkmark$
- Δύο φορές με i : στροφή 180° , δηλαδή $-z$. Γι' αυτό $i^2 = -1$.





Ψηφοφορία Α: πολική μορφή

1. Μέτρο r και γωνία θ του $2i$:

☐ Α $2, 90^\circ$ ☐ Β $2, 0^\circ$ ☐ Γ $2i, 90^\circ$ ☐ Δ $4, 90^\circ$

2. Η γωνία θ του $-1 - i$:

☐ Α 45° ☐ Β 225° ☐ Γ -45° ☐ Δ 135°

3. $(4\angle 20^\circ) \cdot (2\angle 25^\circ) = ?$

☐ Α $6\angle 45^\circ$ ☐ Β $8\angle 500^\circ$ ☐ Γ $8\angle 45^\circ$ ☐ Δ $2\angle -5^\circ$



forms.cloud.microsoft/e/
jyXLrV9ghu



Διάλειμμα

Συνεχίζουμε με διαίρεση, δυνάμεις, ρίζες και φάσορες

Πρόταση 6.2

Αν $z_1 = r_1 \angle \theta_1$ και $z_2 = r_2 \angle \theta_2$ (με $r_2 \neq 0$), τότε

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\theta_1 - \theta_2)$$

Γιατί; Η διαίρεση αναιρεί τον πολλαπλασιασμό. Αν $w = \frac{z_1}{z_2}$, τότε $w \cdot z_2 = z_1$, άρα:

- (μέτρο του w) $\cdot r_2 = r_1$, οπότε το μέτρο του w είναι $\frac{r_1}{r_2}$
- (γωνία του w) $+ \theta_2 = \theta_1$, οπότε η γωνία του w είναι $\theta_1 - \theta_2$

Η σειρά μετράει: γωνία του **αριθμητή** μείον γωνία του **παρονομαστή**.



Παράδειγμα 9: διαίρεση σε πολική

Υπολογίστε $\frac{6\angle 90^\circ}{2\angle 30^\circ}$ και γράψτε το στη μορφή $a + bi$.

Βήμα 1. Μέτρα διά: $\frac{6}{2} = 3$

Βήμα 2. Γωνίες πλην: $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Βήμα 3. $3\angle 60^\circ$: $a = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $b = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, άρα

$$\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i \approx 1.5 + 2.6i$$

Έλεγχος: $(3\angle 60^\circ) \cdot (2\angle 30^\circ) = (3 \cdot 2)\angle(60^\circ + 30^\circ) = 6\angle 90^\circ \checkmark$. Είναι το Παράδειγμα 8 ανάποδα.



Παράδειγμα 10: $(1 + i) / (1 - i)$

Βήμα 1. Αριθμητής (Παράδειγμα 3): $1 + i = \sqrt{2} \angle 45^\circ$

Βήμα 2. Παρονομαστής: $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, IV τεταρτημόριο,
 $\tan \theta_0 = \frac{|-1|}{|1|} = 1, \theta_0 = 45^\circ$, άρα $1 - i = \sqrt{2} \angle (-45^\circ)$

Βήμα 3. Μέτρα διά: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$. Γωνίες πλην: $45^\circ - (-45^\circ) = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

Βήμα 4. $1 \angle 90^\circ = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ = 0 + 1 \cdot i = i$

Έλεγχος με τη μέθοδο της Διάλεξης 5 (επί τον συζυγή του παρονομαστή, $1 + i$):

$$\frac{(1 + i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{1 + i + i + i^2}{1 + i - i - i^2} = \frac{1 + 2i - 1}{1 + 1} = \frac{2i}{2} = i \checkmark$$



Ο τύπος του Euler

Ο κανόνας «γωνίες **συν**» θυμίζει τις δυνάμεις: $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$, όπου οι εκθέτες προστίθενται.

Πρόταση 6.3 (Euler)

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

με τη γωνία θ σε **ακτίνια** ($\pi = 180^\circ$).

Άρα $z = r e^{i\theta}$ (**εκθετική μορφή**)

και

$$r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}:$$

η Πρόταση 6.1 γίνεται ιδιότητα δυνάμεων.

$$e^{i\pi/2} = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ = 0 + 1 \cdot i = i$$

$$e^{i\pi} = \cos 180^\circ + i \sin 180^\circ = -1 + 0 \cdot i = -1$$

$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}, \text{ γιατί } \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

Οι μορφές ενός μιγαδικού

Μορφή	Γενικά	Για το $1 + i$
Αλγεβρική	$a + bi$	$1 + i$
Πολική	$r (\cos \theta + i \sin \theta)$	$\sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$
Πολική, σύντομα	$r \angle \theta$	$\sqrt{2} \angle 45^\circ$
Εκθετική	$r e^{i\theta}$	$\sqrt{2} e^{i\pi/4}$

Πότε ποια;

- **Πρόσθεση, αφαίρεση:** αλγεβρική $a + bi$ (συνιστώσα με συνιστώσα).
- **Πολλαπλασιασμός, διαίρεση, δυνάμεις, ρίζες:** πολική (ή εκθετική).

Δυνάμεις: ο τύπος του de Moivre

Πρόταση 6.4 (de Moivre)

$$(r \angle \theta)^n = r^n \angle (n\theta)$$

δηλαδή $z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$

Γιατί; $z^n = z \cdot z \cdots z$ (n φορές), και σε κάθε πολλαπλασιασμό (Πρόταση 6.1):

- τα μέτρα πολλαπλασιάζονται: $r \cdot r \cdots r = r^n$
- οι γωνίες προστίθενται: $\theta + \theta + \cdots + \theta = n\theta$

Υψώνουμε **και** το μέτρο: $(2 \angle 30^\circ)^3 = 2^3 \angle (3 \cdot 30^\circ) = 8 \angle 90^\circ$, **όχι** $2 \angle 90^\circ$.

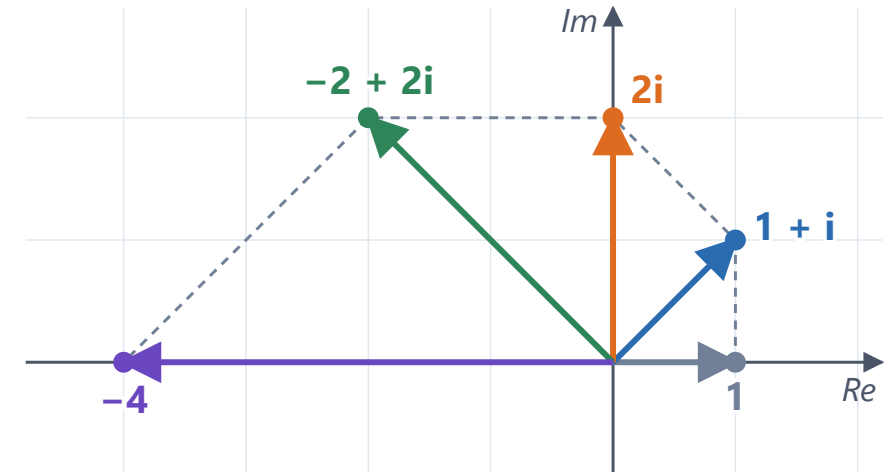
Οι δυνάμεις του $1 + i$ στο επίπεδο

$1 + i = \sqrt{2} \angle 45^\circ$. Κάθε φορά που πολλαπλασιάζουμε με $1 + i$:

- **στροφή** κατά 45°
- μέτρο **επί** $\sqrt{2}$

Δύναμη	Πολική	$a + bi$
$(1 + i)^2$	$(\sqrt{2})^2 \angle 90^\circ = 2 \angle 90^\circ$	$2i$
$(1 + i)^3$	$(\sqrt{2})^3 \angle 135^\circ = 2\sqrt{2} \angle 135^\circ$	$-2 + 2i$
$(1 + i)^4$	$(\sqrt{2})^4 \angle 180^\circ = 4 \angle 180^\circ$	-4

Ίδια αποτελέσματα με τη «δύσκολη» μέθοδο ✓





Λύση του προβλήματος: $(1 + i)^{10}$

Βήμα 1. Σε πολική (Παράδειγμα 3): $1 + i = \sqrt{2} \angle 45^\circ$

Βήμα 2. Μέτρο:

$$(\sqrt{2})^{10} = (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

Βήμα 3. Γωνία: $10 \cdot 45^\circ = 450^\circ$. Αφαιρούμε μια πλήρη στροφή:
 $450^\circ - 360^\circ = 90^\circ$

Βήμα 4. $32 \angle 90^\circ = 32 (\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 32 (0 + 1 \cdot i) = 32i$

Έλεγχος: $(1 + i)^2 = 2i$, άρα

$$(1 + i)^{10} = ((1 + i)^2)^5 = (2i)^5 = 2^5 i^5 = 32 i \checkmark \quad (\text{γιατί } i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i)$$



Παράδειγμα 11: $(\sqrt{3} + i)^3$

Βήμα 1. Σε πολική: $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$, Ι τεταρτημόριο,
 $\tan \theta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, άρα $\theta = 30^\circ$ και $\sqrt{3} + i = 2\angle 30^\circ$

Βήμα 2. de Moivre: $2^3 \angle (3 \cdot 30^\circ) = 8\angle 90^\circ$

Βήμα 3. $8\angle 90^\circ = 8(0 + 1 \cdot i) = 8i$

Έλεγχος με πολλαπλασιασμούς:

$$(\sqrt{3} + i)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}i + i^2 = 3 + 2\sqrt{3}i - 1 = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$(2 + 2\sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = 2\sqrt{3} + 2i + 6i + 2\sqrt{3}i^2 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 8i = 8i \checkmark$$



Ρίζες: λύνουμε την $z^3 = 1$

Βήμα 1. Ψάχνουμε $z = \rho \angle \varphi$. Από de Moivre: $z^3 = \rho^3 \angle 3\varphi$.

Βήμα 2. Θέλουμε $\rho^3 \angle 3\varphi = 1 \angle 0^\circ$:

- Μέτρα ίσα: $\rho^3 = 1$, άρα $\rho = 1$.
- Η γωνία 3φ πρέπει να δείχνει προς τις 0° . Το ίδιο κάνουν και οι 360° , 720° , ...
Άρα $3\varphi = 0^\circ$ ή 360° ή 720° .

Βήμα 3. Διαιρούμε με 3: $\varphi = 0^\circ$, 120° , 240°

Το επόμενο, $3\varphi = 1080^\circ$, δίνει $\varphi = 360^\circ$, δηλαδή πάλι 0° : από εκεί και πέρα οι λύσεις **επαναλαμβάνονται**. Άρα **τρεις** λύσεις, ενώ στο $\mathbb{R}$ βρίσκαμε μόνο τη $z = 1$.

Πρόταση 6.5

Η εξίσωση $z^n = R \angle \varphi$ έχει **ακριβώς n** λύσεις:

$$z_k = \sqrt[n]{R} \angle \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1$$

- Είναι ό,τι κάναμε για την $z^3 = 1$: μέτρο $\sqrt[n]{R}$, γωνίες $\varphi, \varphi + 360^\circ, \varphi + 720^\circ, \dots$ διά n .
- Όλες έχουν το **ίδιο μέτρο**: βρίσκονται σε **κύκλο** ακτίνας $\sqrt[n]{R}$.
- Απέχουν μεταξύ τους $\frac{360^\circ}{n}$: σχηματίζουν **κανονικό πολύγωνο**.

Παράδειγμα 12: οι ρίζες της $z^3 = 1$ σε $a + bi$

$$z_0 = 1 \angle 0^\circ = 1$$

$$z_1 = 1 \angle 120^\circ: \text{II, βασική γωνία } 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

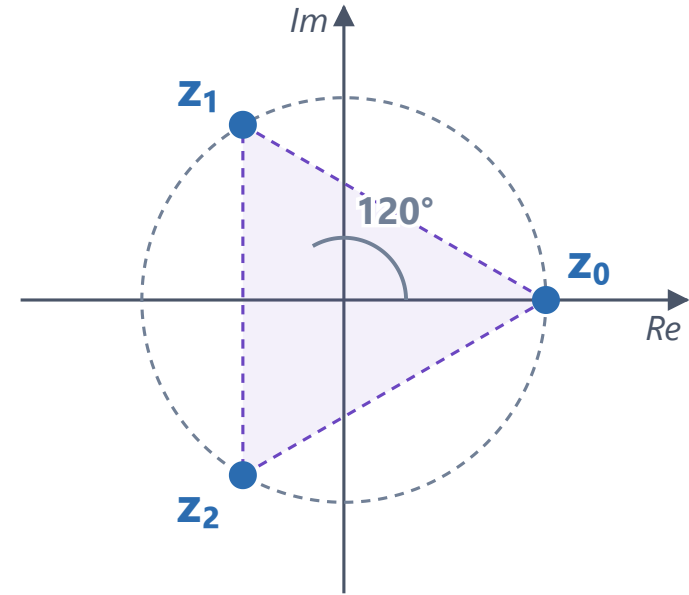
$$\text{άρα } z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_2 = 1 \angle 240^\circ: \text{III, βασική γωνία } 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$$

$$\cos 240^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{άρα } z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\text{Έλεγχος: } z_1^3 = 1 \angle (3 \cdot 120^\circ) = 1 \angle 360^\circ = 1 \checkmark$$



Παράδειγμα 13: $z^4 = 16$

Βήμα 1. $16 = 16\angle 0^\circ$ (θετικός πραγματικός).

Βήμα 2. Μέτρο: $\rho^4 = 16$, άρα $\rho = \sqrt[4]{16} = 2$,
γιατί $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

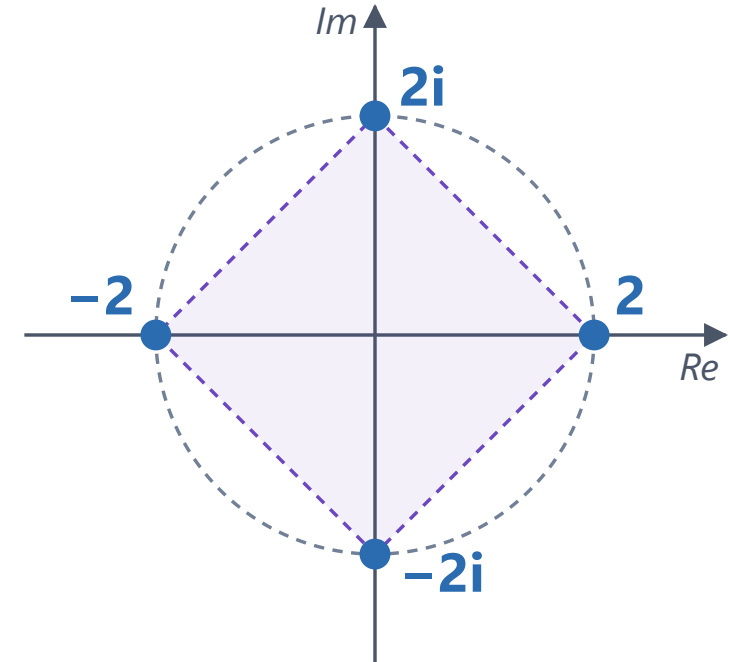
Βήμα 3. Γωνίες: $4\varphi = 0^\circ, 360^\circ, 720^\circ, 1080^\circ$
άρα $\varphi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$

Βήμα 4. Πάνω στους άξονες:

$$z = 2, \quad 2i, \quad -2, \quad -2i$$

Έλεγχος: $(2i)^4 = 2^4 \cdot i^4 = 16 \cdot 1 = 16 \checkmark$

Στο $\mathbb{R}$ βρίσκουμε μόνο ± 2 . Στο $\mathbb{C}$ είναι **τέσσερις**,
σε τετράγωνο.



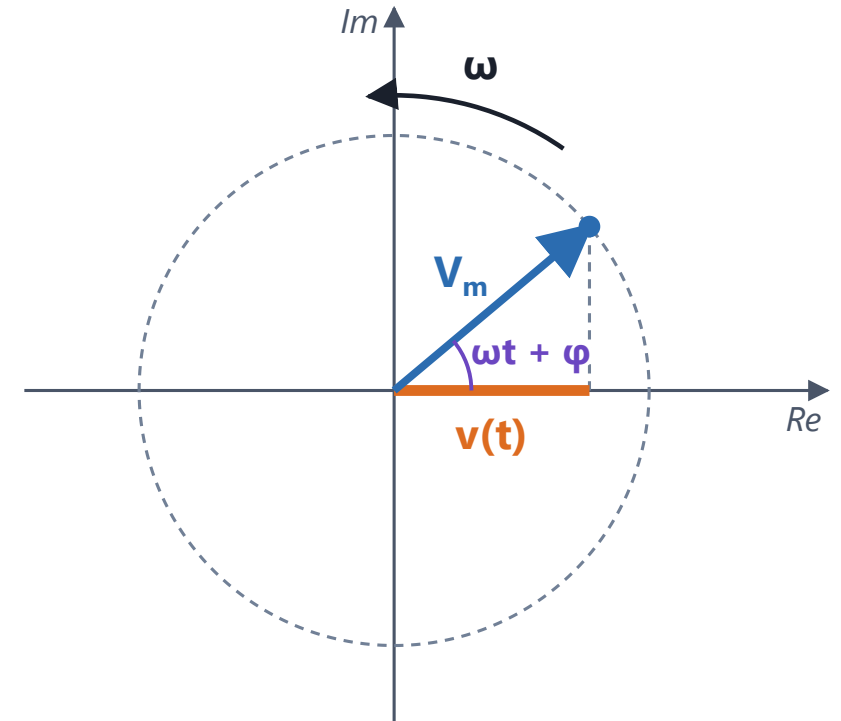
Εφαρμογή: εναλλασσόμενη τάση

Εναλλασσόμενη τάση

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$$

- V_m : **πλάτος**, η μέγιστη τιμή της τάσης
- ω : **κυκλική συχνότητα**. Στην πρίζα $f = 50$ Hz, άρα $\omega = 2\pi f \approx 314$ rad/s
- φ : **φάση**, η γωνία τη στιγμή $t = 0$

Ένα σημείο **γυρίζει** σε κύκλο ακτίνας V_m με γωνία $\omega t + \varphi$. Η τάση είναι η **οριζόντια** συντεταγμένη του, όπως το $\cos \theta$ στον τριγωνομετρικό κύκλο.



- Σε ένα κύκλωμα **όλες** οι τάσεις και τα ρεύματα γυρίζουν με το **ίδιο** ω .
- Αρκεί λοιπόν να ξέρουμε πού είναι το καθένα τη στιγμή $t = 0$: **πλάτος** και **φάση**.
- **Φάσορας** είναι ο μιγαδικός $V = V_m \angle \varphi$.

Τάση στον χρόνο	Φάσορας	Σε $a + bj$
$10 \cos(\omega t)$	$10 \angle 0^\circ$	10
$4 \cos(\omega t + 90^\circ)$	$4 \angle 90^\circ$	$4j$
$5 \cos(\omega t + 30^\circ)$	$5 \angle 30^\circ$	$\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} j \approx 4.33 + 2.5 j$

Στα κυκλώματα γράφουμε j αντί για i , γιατί το i είναι το ρεύμα.

Εφαρμογή: άθροισμα δύο τάσεων

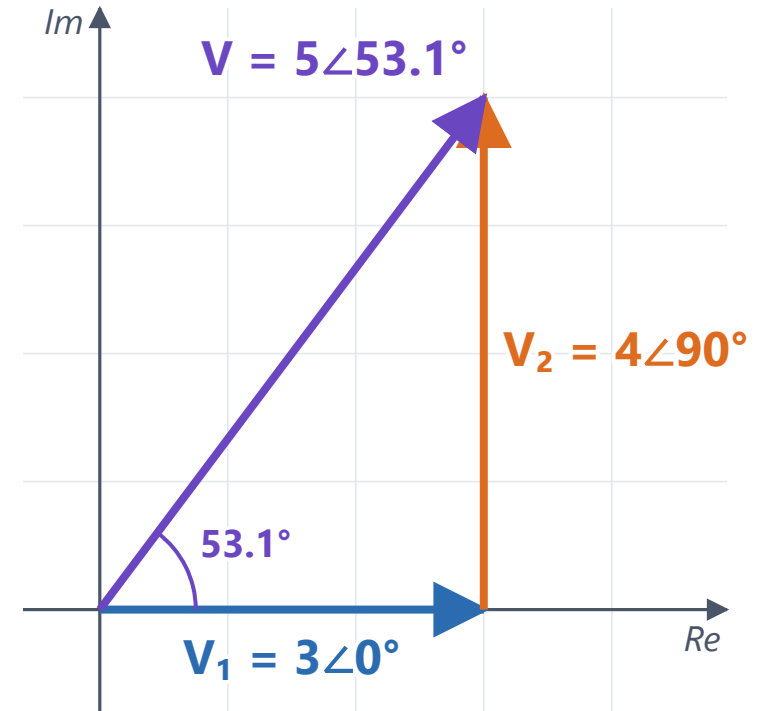
$v_1 = 3 \cos(\omega t)$ και $v_2 = 4 \cos(\omega t + 90^\circ)$ σε σειρά. Ποια είναι η συνολική τάση;

Βήμα 1. Φάσορες: $V_1 = 3 \angle 0^\circ = 3$,
 $V_2 = 4 \angle 90^\circ = 4j$

Βήμα 2. Πρόσθεση σε αλγεβρική μορφή:
 $V = 3 + 4j$

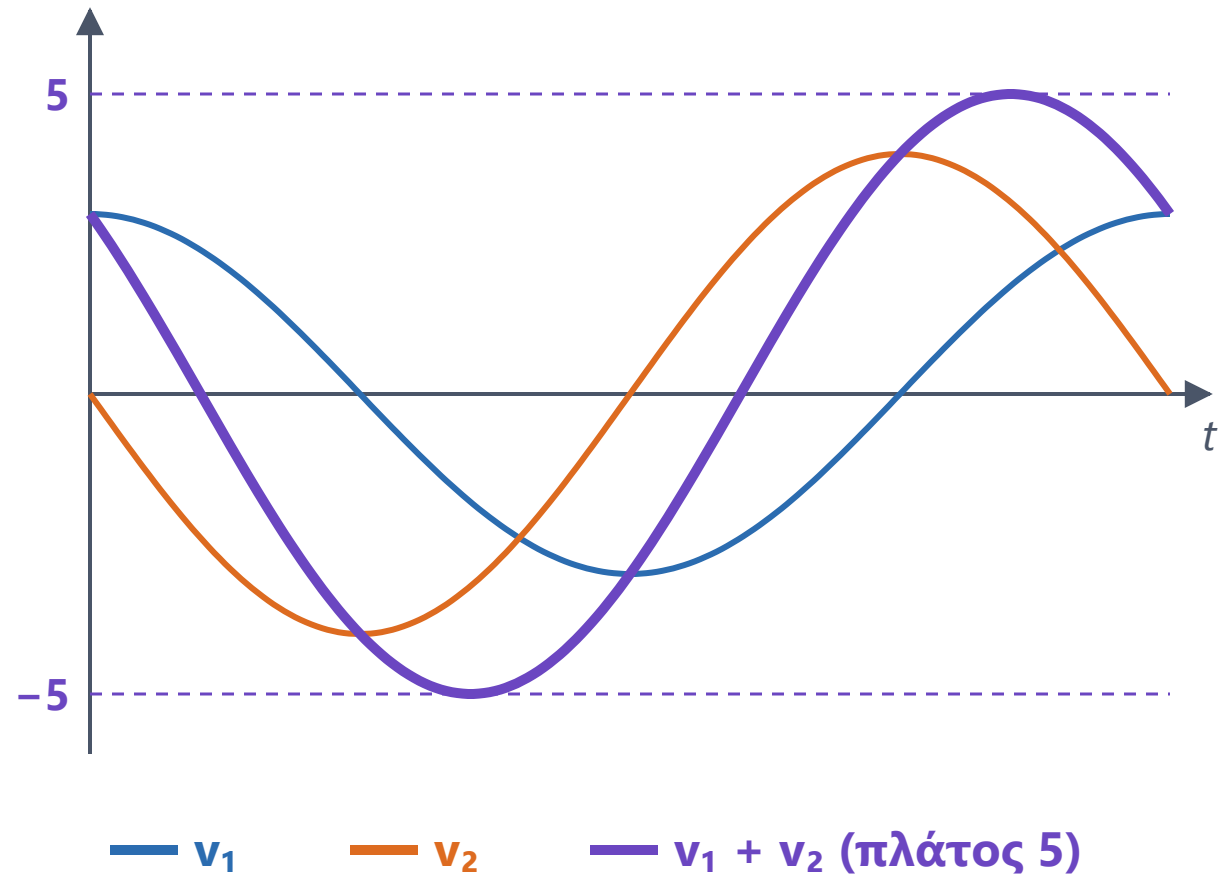
Βήμα 3. Πίσω σε πολική (Παράδειγμα 7):
 $r = \sqrt{9 + 16} = 5$, $\tan \theta = \frac{4}{3}$, $\theta \approx 53.1^\circ$

Βήμα 4. Στον χρόνο: $v(t) = 5 \cos(\omega t + 53.1^\circ)$



Το ίδιο στον χρόνο

- $v_1 = 3 \cos(\omega t)$,
 $v_2 = 4 \cos(\omega t + 90^\circ)$,
 $v_1 + v_2 = 5 \cos(\omega t + 53.1^\circ)$
- Το άθροισμα είναι πάλι **συνημίτονο** με το ίδιο ω .
- Πλάτος **5**, όχι $3 + 4 = 7$: οι δύο τάσεις δεν φτάνουν στο μέγιστο **την ίδια στιγμή**.
- Με φάσορες: μία πρόσθεση μιγαδικών αντί για τριγωνομετρικές ταυτότητες.



Εφαρμογή: νόμος του Ohm με φάσορες

Το κύκλωμα της Διάλεξης 5: $Z = 3 + 4j \Omega$, τάση $V = 10\angle 0^\circ \text{ V}$. Βρείτε το ρεύμα $I = V/Z$.

Βήμα 1. Z σε πολική (Παράδειγμα 7): $|Z| = 5$, $\theta \approx 53.1^\circ$, άρα $Z = 5\angle 53.1^\circ$

Βήμα 2. Διαίρεση σε πολική: $I = \frac{10\angle 0^\circ}{5\angle 53.1^\circ} = \frac{10}{5} \angle (0^\circ - 53.1^\circ) = 2\angle -53.1^\circ \text{ A}$

Βήμα 3. Στον χρόνο: $i(t) = 2 \cos(\omega t - 53.1^\circ)$

Στη Διάλεξη 5 βρήκαμε μόνο το πλάτος 2 A. Τώρα ξέρουμε και τη **φάση**: το ρεύμα **καθυστερεί** 53.1° πίσω από την τάση, όπως συμβαίνει με το πηνίο.



Συνήθη λάθη

Λάθος	Σωστό
$\cos 150^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	II τεταρτημόριο, αριστερά: $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\arg(-1 + i) = \tan^{-1}(-1) = -45^\circ$	σχήμα: II τεταρτημόριο, 135°
$(2\angle 30^\circ)(3\angle 60^\circ) = 6\angle 1800^\circ$	γωνίες προστίθενται : $6\angle 90^\circ$
$(2\angle 30^\circ)^3 = 2\angle 90^\circ$	και το μέτρο στην 3η: $8\angle 90^\circ$
$3\angle 0^\circ + 4\angle 90^\circ = 7\angle 90^\circ$	πρόσθεση μόνο σε $a + bi$: $3 + 4j = 5\angle 53.1^\circ$
$z^3 = 1 \Rightarrow \text{μόνο } z = 1$	τρεις ρίζες: $1, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
κομπιουτεράκι σε RAD με μοίρες	DEG για μοίρες



Ψηφοφορία Β: δυνάμεις, ρίζες, φάσορες

1. $(2\angle 30^\circ)^3 = ?$

A $8\angle 90^\circ$ **B** $6\angle 90^\circ$ **Γ** $8\angle 30^\circ$ **Δ** $2\angle 90^\circ$

2. Πόσες λύσεις έχει η $z^5 = 1$ στο $\mathbb{C}$;

A 1 **B** 5 **Γ** 2 **Δ** άπειρες

3. $1\angle 0^\circ + 1\angle 90^\circ = ?$

A $2\angle 90^\circ$ **B** $2\angle 45^\circ$ **Γ** $\sqrt{2}\angle 45^\circ$ **Δ** $1\angle 90^\circ$



forms.cloud.microsoft/e/
S9A1pNxQAj



Άσκηση στην τάξη (10')

1. Γράψτε το $z = -\sqrt{3} + i$ σε πολική μορφή.
2. Υπολογίστε $(2\angle 40^\circ) \cdot (3\angle 50^\circ)$ στη μορφή $a + bi$.
3. Υπολογίστε $(-\sqrt{3} + i)^6$.
4. Λύστε την εξίσωση $z^3 = -8$.

Λύσεις (1/3)

1. $z = -\sqrt{3} + i$

Βήμα 1. $r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$

Βήμα 2. $a = -\sqrt{3} < 0, b = 1 > 0$: II τεταρτημόριο.

Βήμα 3. $\tan \theta_0 = \frac{|1|}{|-\sqrt{3}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, άρα $\theta_0 = 30^\circ$ (μισό ισόπλευρο).

Βήμα 4. $\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$, άρα $z = 2 \angle 150^\circ$

Έλεγχος: $2 \cos 150^\circ = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} \checkmark$ $2 \sin 150^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \checkmark$



Λύσεις (2/3)

2. Μέτρα επί, γωνίες συν: $(2 \cdot 3)\angle(40^\circ + 50^\circ) = 6\angle 90^\circ$

$$6\angle 90^\circ = 6(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 6(0 + 1 \cdot i) = 6i$$

3. Από το 1: $-\sqrt{3} + i = 2\angle 150^\circ$. de Moivre:

$$(2\angle 150^\circ)^6 = 2^6\angle(6 \cdot 150^\circ) = 64\angle 900^\circ$$

Αφαιρούμε πλήρεις στροφές: $900^\circ - 360^\circ - 360^\circ = 180^\circ$

$$64\angle 180^\circ = 64(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = 64(-1 + 0 \cdot i) = -64$$



Λύσεις (3/3)

4. $z^3 = -8$

Βήμα 1. Το -8 είναι στον αρνητικό άξονα: $-8 = 8\angle 180^\circ$

Βήμα 2. Ψάχνουμε $z = \rho\angle\varphi$ με $\rho^3 = 8$, άρα $\rho = 2$ (γιατί $2^3 = 8$).

Βήμα 3. $3\varphi = 180^\circ, 540^\circ, 900^\circ$, άρα $\varphi = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$

Βήμα 4. Σε $a + bi$:

$$2\angle 60^\circ = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 1 + \sqrt{3} i$$

$$2\angle 180^\circ = 2(-1 + 0 \cdot i) = -2$$

$$2\angle 300^\circ \text{ (IV, βασική } 60^\circ) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 1 - \sqrt{3} i$$

Έλεγχος: $(-2)^3 = -8 \checkmark \quad (2\angle 60^\circ)^3 = 8\angle 180^\circ = -8 \checkmark$



Σύνοψη

$\cos \theta, \sin \theta$	συντεταγμένες του P στον κύκλο ακτίνας 1
Πολική μορφή	$z = r (\cos \theta + i \sin \theta) = r \angle \theta, \quad r = z $
Γωνία θ	σχήμα, βασική γωνία θ_0 , διόρθωση ανά τεταρτημόριο
Πολλαπλασιασμός, διαίρεση	μέτρα επί (διά), γωνίες συν (πλην): στροφή
Euler	$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad z = r e^{i\theta}$
de Moivre	$(r \angle \theta)^n = r^n \angle n\theta$
Ρίζες της $z^n = R \angle \varphi$	n ρίζες $\sqrt[n]{R} \angle \frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n}$, σε κύκλο
Φάσορες	$V_m \cos(\omega t + \varphi) \leftrightarrow V_m \angle \varphi$

Επόμενη διάλεξη: γραμμικά συστήματα (Ενότητα Γ).