

Σχήμα 3.12: Μετασχηματισμός παράστασης από παράθυρο με κλίση.

Η γωνία  $\theta$  που σχηματίζει η ακμή  $ab$  του παραθύρου με την οριζόντια ευθεία που περνά από το  $a$  έχει  $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$  και  $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ . Ο απαιτούμενος μετασχηματισμός  $M_{WV}^{TILT}$  θα είναι η σύνθεση των ακόλουθων βημάτων:

Βήμα 1. Περιστροφή του παραθύρου κατά γωνία  $-\theta$  γύρω από το σημείο  $a$ . Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τον πίνακα  $R(\theta, \mathbf{p})$  του Παραδείγματος 3.1 ως  $R(-\theta, \mathbf{a})$ .

Βήμα 2. Εφαρμογή του μετασχηματισμού παράστασης  $M_{WV}$  στο παράθυρο που έχει υποστεί περιστροφή.

Πριν από την εφαρμογή του βήματος 2 πρέπει να βρούμε τις μέγιστες  $x$  και  $y$  συντεταγμένες του περιστραμμένου παραθύρου υπολογίζοντας

$$\mathbf{c}' = R(-\theta, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 + 2\sqrt{5} \\ 1 + \sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε,  $[w_{x\min}, w_{y\min}]^T = \mathbf{a}$ ,  $[w_{x\max}, w_{y\max}]^T = \mathbf{c}'$ , και έχουμε

$$\begin{aligned} M_{WV}^{TILT} = M_{WV} \cdot R(-\theta, \mathbf{a}) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 1 - \frac{3}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 3.7 3Δ ομογενείς συσχετισμένοι μετασχηματισμοί

Οι ομογενείς συντεταγμένες στις τρεις διαστάσεις λειτουργούν με παρόμοιο τρόπο όπως και στις δύο διαστάσεις (βλέπε Ενότητα 3.4.1). Μια επιπλέον συντεταγμένη προστίθεται και έτσι δημιουργείται η τετράδα  $[x, y, z, w]^T$ , όπου  $w$  η ομογενής συντεταγμένη. Σημεία των οποίων οι συντεταγμένες είναι πολλαπλάσιες μεταξύ τους είναι

ισοδύναμα, π.χ. τα  $[1, 2, 3, 2]^T$  και  $[2, 4, 6, 4]^T$  είναι ισοδύναμα. Η (μοναδική) βασική μετασχηματισμός σημείου έχει  $w = 1$  και λαμβάνεται διαιρώντας το με την συντεταγμένη.

$$[x/w, y/w, z/w, w/w]^T = [x/w, y/w, z/w, 1]^T$$

Παράδειγμα: Για παράδειγμα, για το παραπάνω ζεύγος ισοδύναμων σημείων,

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{2}\right]^T = \left[\frac{2}{4}, \frac{4}{4}, \frac{6}{4}, \frac{4}{4}\right]^T = \left[\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 1\right]^T.$$

Για  $w = 1$  (βασική παράσταση) λαμβάνουμε μια 3Δ προβολή του 4Δ χώρου.

Εάν τα σημεία παριστάνονται με διανύσματα  $4 \times 1$ , οι πίνακες μετασχηματισμού είναι  $4 \times 4$ . Όπως και στην 2Δ περίπτωση, για λόγους συντομίας κάποιες φορές θα παραλείψουμε την ομογενή συντεταγμένη. Όλοι οι μετασχηματισμοί που ακολουθούν είναι συσχετισμένοι.

### 3.1.2 3Δ ομογενής μεταφορά

Η 3Δ μεταφορά ορίζεται από ένα 3Δ διάνυσμα  $\vec{d} = [d_x, d_y, d_z]^T$  και ενσωματώνεται στην μορφή πίνακα ως εξής:

$$T(\vec{d}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Όπως και στις 2Δ, το βασικό πλεονέκτημα των ομογενών συντεταγμένων είναι ότι μπορούν να συνθέσουν τον πίνακα της μεταφοράς με άλλους συσχετισμένους πίνακες μετασχηματισμών μέσω του πολλαπλασιασμού πινάκων.

Το αντίστροφο μιας μεταφοράς περιγράφεται από τον πίνακα  $T^{-1}(\vec{d}) = T(-\vec{d})$ .

### 3.1.3 3Δ ομογενής αλλαγή κλίμακας

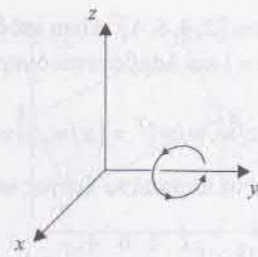
Η 3Δ αλλαγή κλίμακας είναι ανάλογη της 2Δ αλλαγής κλίμακας. Έχει τρεις παράγοντες αλλαγής κλίμακας,  $s_x, s_y,$  και  $s_z$ . Αν κάποιος παράγοντας είναι μικρότερος του 1, τότε το αντικείμενο μικραίνει στην αντίστοιχη διάσταση, ενώ αν είναι μεγαλύτερος του 1 μεγαλώνει. Και πάλι έχει ως παρενέργεια μια μεταφορά ανάλογη των παραγόντων αλλαγής κλίμακας. Σε μορφή πίνακα είναι

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 1 - \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

μοί  
με παρόμοιο τρόπο  
ον συντεταγμένη  
ομογενής συντεταγμένη  
εταξύ τους είναι





Σχήμα 3.13: Θετική περιστροφή γύρω από τον άξονα  $y$ .

Η αλλαγή κλίμακας ονομάζεται *ισοτροπική* αν  $s_x = s_y = s_z$ . Η ισοτροπική αλλαγή κλίμακας διατηρεί την ομοιότητα των αντικειμένων (γωνίες).

Ο καθρεπτισμός πάνω σε ένα από τα κύρια επίπεδα ( $xy$ ,  $xz$ , ή  $yz$ ) μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση αλλαγής κλίμακας, χρησιμοποιώντας παράγοντα αλλαγής κλίμακας  $-1$ . Για παράδειγμα, ο καθρεπτισμός πάνω στο επίπεδο  $xy$  είναι  $S(1, 1, -1)$ .

Το αντίστροφο μιας αλλαγής κλίμακας περιγράφεται από τον πίνακα

$$S^{-1}(s_x, s_y, s_z) = S\left(\frac{1}{s_x}, \frac{1}{s_y}, \frac{1}{s_z}\right).$$

### 3.7.3 3Δ ομογενής περιστροφή

Η 3Δ περιστροφή είναι αρκετά διαφορετική από την 2Δ περίπτωση, καθώς το αντικείμενο γύρω από το οποίο περιστρέφουμε είναι ένας άξονας και όχι ένα σημείο. Ο άξονας περιστροφής μπορεί να είναι τυχαίος, αλλά οι βασικοί μετασχηματισμοί περιστροφής στρέφουν γύρω από τους κύριους άξονες  $x$ ,  $y$ , και  $z$ . Αυτοί μπορούν να συνδυασθούν για να περιγράψουν περιστροφή γύρω από τυχαίο άξονα, όπως θα φανεί στα παραδείγματα που ακολουθούν. Σε δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων μια περιστροφή γύρω από έναν άξονα  $a$  είναι *θετική*, αν είναι αντίστροφη της φοράς των δεικτών του ρολογιού, όταν την παρατηρούμε από το θετικό τμήμα του άξονα προς το κέντρο. Το Σχήμα 3.13 δείχνει την φορά της θετικής περιστροφής γύρω από τον άξονα  $y$ .

Κατά την 3Δ περιστροφή, η απόσταση από τον άξονα περιστροφής δεν μεταβάλλεται. Συνεπώς η περιστροφή δεν αλλάζει την συντεταγμένη που αντιστοιχεί στον άξονα περιστροφής. Απλοί τριγωνομετρικοί υπολογισμοί, παρόμοιοι με την 2Δ περίπτωση, οδηγούν στους ακόλουθους πίνακες περιστροφής γύρω από τους κύριους άξονες  $x$ ,  $y$ , και  $z$ :

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Οι αντίστροφοι πίνακες περιστροφής είναι  $\mathbf{R}_x^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_x(-\theta)$ ,  $\mathbf{R}_y^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_y(-\theta)$  και  $\mathbf{R}_z^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_z(-\theta)$ .

Η περιστροφή μπορεί επίσης να εκφραστεί και με quaternions, όπως θα δούμε στην Ενότητα 3.9.

### 3.7.4 3Δ ομογενής στρέβλωση

Ο 3Δ μετασχηματισμός στρέβλωσης «στρεβλώνει» αντικείμενα ως προς ένα από τα κύρια επίπεδα. Με άλλα λόγια, αυξάνει τις δύο συντεταγμένες κατά ποσό ίσο με την τρίτη συντεταγμένη επί τους αντίστοιχους παράγοντες στρέβλωσης. Συνεπώς, στις 3Δ έχουμε τρεις περιπτώσεις στρέβλωσης που αντιστοιχούν στα τρία κύρια επίπεδα  $xy$ ,  $xz$ , και  $yz$ .

Η στρέβλωση κατά το επίπεδο  $xy$  αυξάνει την  $x$  συντεταγμένη κατά ποσό ίσο με την  $z$  συντεταγμένη επί τον παράγοντα στρέβλωσης  $a$  και την  $y$  συντεταγμένη κατά ποσό ίσο με την  $z$  συντεταγμένη επί τον παράγοντα στρέβλωσης  $b$ :

$$\mathbf{SH}_{xy}(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Οι στρεβλώσεις κατά τα επίπεδα  $xz$  και  $yz$  είναι παρόμοιες:

$$\mathbf{SH}_{xz}(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{SH}_{yz}(a, b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Οι αντίστροφοι πίνακες στρέβλωσης λαμβάνονται χρησιμοποιώντας τους αντίθετους παράγοντες στρέβλωσης:  $\mathbf{SH}_{xy}^{-1}(a, b) = \mathbf{SH}_{xy}(-a, -b)$ ,  $\mathbf{SH}_{xz}^{-1}(a, b) = \mathbf{SH}_{xz}(-a, -b)$ ,  $\mathbf{SH}_{yz}^{-1}(a, b) = \mathbf{SH}_{yz}(-a, -b)$ .



### 3.8 Παραδείγματα 3Δ μετασχηματισμών

**Παράδειγμα 3.11 (Σύνθετη περιστροφή.)** Έστω ότι επιθυμούμε περιστροφή γύρω από τον άξονα  $x$  κατά  $\theta_x$  ακολουθούμενη από περιστροφή γύρω από τον  $y$  κατά  $\theta_y$ . Υπολογίστε τον πίνακα μετασχηματισμού που περιγράφει αυτή τη σύνθετη περιστροφή και αποφανθείτε αν η σειρά περιστροφής έχει σημασία.

Από τον ορισμό του, ο σύνθετος πίνακας περιστροφής υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\text{BEND}} &= \mathbf{R}_y(\theta_y) \cdot \mathbf{R}_x(\theta_x) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_y & \sin \theta_x \sin \theta_y & \cos \theta_x \sin \theta_y & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x \cos \theta_y & \cos \theta_x \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Για να διαπιστώσουμε αν η σειρά των περιστροφών είναι σημαντική, θα υπολογίσουμε τη σύνθεση και με αντίστροφη σειρά:

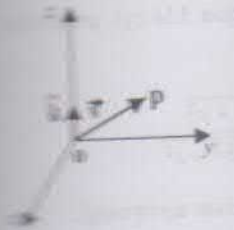
$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_{\text{BEND}} &= \mathbf{R}_x(\theta_x) \cdot \mathbf{R}_y(\theta_y) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x & 0 \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y & 0 \\ \sin \theta_x \sin \theta_y & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \cos \theta_y & 0 \\ -\cos \theta_x \sin \theta_y & \sin \theta_x & \cos \theta_x \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Καθώς  $\mathbf{M}_{\text{BEND}} \neq \mathbf{M}'_{\text{BEND}}$ , η σειρά των περιστροφών είναι όντως σημαντική.

Σημειώνουμε ότι κατά τη σύνθεση περιστροφών γύρω από τους άξονες  $x$ ,  $y$  και  $z$ , ένα πρόβλημα γνωστό ως *κλείδωμα αντιζύγων* (gimbal lock) μπορεί να παρατηρηθεί (βλέπε Ενότητα 17.2.1).

**Παράδειγμα 3.12 (Ευθυγράμμιση διανύσματος με άξονα.)** Βρείτε τον μετασχηματισμό  $\mathbf{A}(\vec{v})$  που απαιτείται για την ευθυγράμμιση δοσμένου διανύσματος  $\vec{v} = [a, b, c]^T$  με το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{k}$  κατά μήκος του θετικού άξονα  $z$ .

Η αρχική κατάσταση φαίνεται στο Σχήμα 3.14 (α). Ένας τρόπος επίτευξης του σκοπού μας περιλαμβάνει δύο περιστροφές:



(α)

Σχήμα

Βήμα 1. Περιστροφή γύρω από τον άξονα  $y$  κατά πάνω στο  $xy$  επίπεδο.

Βήμα 2. Περιστροφή γύρω από τον άξονα  $x$  κατά πάνω στο  $xz$  επίπεδο (Σχήμα 3.14 (γ)).

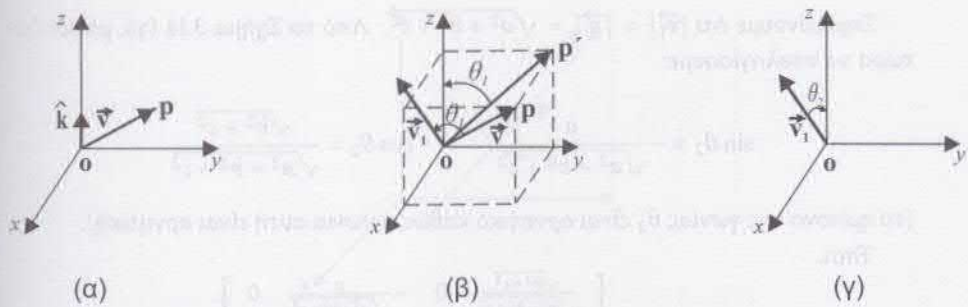
Ο πίνακας περιστροφής είναι:

Πρέπει να υπολογίσουμε τον πίνακα  $\mathbf{A}$  για να ευθυγραμμιστεί ο άξονας  $z$  με τον άξονα  $x$  της προβολής του στο  $xy$  επίπεδο (δηλαδή με  $\theta = 0$ , λαμβάνουμε  $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ ).

Συνεπώς,

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον πίνακα  $\mathbf{B}$  στο  $\mathbf{A}$ .

Αυτό είναι ισοδύναμο με τον πίνακα  $\mathbf{B}$ .

Σχήμα 3.14: Ευθυγράμμιση τυχαίου διανύσματος με το  $\hat{k}$ .

Βήμα 1. Περιστροφή γύρω από τον άξονα  $x$  κατά  $\theta_1$ , ώστε το  $\vec{v}$  να έρθει στο  $\vec{v}_1$  που κείται πάνω στο επίπεδο  $xz$  (Σχήμα 3.14 (β)),  $R_x(\theta_1)$ .

Βήμα 2. Περιστροφή του  $\vec{v}_1$  γύρω από τον  $y$  κατά  $\theta_2$ , ώστε ευθυγραμμιστεί με το  $\hat{k}$  (Σχήμα 3.14 (γ)),  $R_y(\theta_2)$ .

Ο πίνακας περιστροφής  $A(\vec{v})$  συνεπώς είναι:

$$A(\vec{v}) = R_y(\theta_2) \cdot R_x(\theta_1).$$

Πρέπει να υπολογίσουμε τις γωνίες  $\theta_1$  και  $\theta_2$ . Παρατηρώντας το Σχήμα 3.14 (β), η γωνία  $\theta_1$  είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της προβολής του  $\vec{v}$  στο επίπεδο  $yz$  και του άξονα  $z$ . Για το άκρο  $p$  του  $\vec{v}$ , έχουμε  $p = [a, b, c]^T$ , οπότε το άκρο της προβολής του στο  $yz$  είναι  $p' = [0, b, c]^T$ . Υποθέτοντας ότι τα  $b$  και  $c$  δεν είναι και τα δύο ίσα με 0, λαμβάνουμε

$$\sin \theta_1 = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad \cos \theta_1 = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Συνεπώς,

$$R_x(\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & -\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} & \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον  $R_x(\theta_1)$  στο  $\vec{v}$ <sup>7</sup> για να πάρουμε την προβολή του  $\vec{v}_1$  στο  $xz$ :

$$\vec{v}_1 = R_x(\theta_1) \cdot \vec{v} = R_x(\theta_1) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ \sqrt{b^2+c^2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

<sup>7</sup> Αυτό είναι ισοδύναμο με περιστροφή του άκρου  $p$  του διανύσματος.



Σημειώνουμε ότι  $|\vec{v}_1| = |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ . Από το Σχήμα 3.14 (γ), μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε:

$$\sin \theta_2 = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(το ημίτονο της γωνίας  $\theta_2$  είναι αρνητικό καθώς η γωνία αυτή είναι αρνητική).

Έτσι,

$$\mathbf{R}_y(\theta_2) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 & -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 & \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο ζητούμενος πίνακας  $\mathbf{A}(\vec{v})$  μπορεί τώρα να υπολογισθεί:

$$\mathbf{A}(\vec{v}) = \mathbf{R}_y(\theta_2) \cdot \mathbf{R}_x(\theta_1) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{|\vec{v}|} & -\frac{ab}{\lambda|\vec{v}|} & -\frac{ac}{\lambda|\vec{v}|} & 0 \\ 0 & \frac{c}{\lambda} & -\frac{b}{\lambda} & 0 \\ \frac{a}{|\vec{v}|} & \frac{b}{|\vec{v}|} & \frac{c}{|\vec{v}|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

όπου  $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  και  $\lambda = \sqrt{b^2 + c^2}$ .

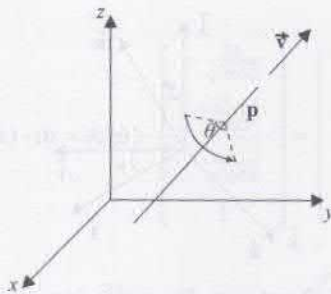
Θα υπολογίσουμε επίσης τον αντίστροφο πίνακα  $\mathbf{A}(\vec{v})^{-1}$ , καθώς είναι χρήσιμος στο Παράδειγμα 3.13:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}(\vec{v}) &= (\mathbf{R}_y(\theta_2) \cdot \mathbf{R}_x(\theta_1))^{-1} = \mathbf{R}_x(\theta_1)^{-1} \cdot \mathbf{R}_y(\theta_2)^{-1} \\ &= \mathbf{R}_x(-\theta_1) \cdot \mathbf{R}_y(-\theta_2) = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{|\vec{v}|} & 0 & \frac{a}{|\vec{v}|} & 0 \\ -\frac{ab}{\lambda|\vec{v}|} & \frac{c}{\lambda} & \frac{b}{|\vec{v}|} & 0 \\ -\frac{ac}{\lambda|\vec{v}|} & -\frac{b}{\lambda} & \frac{c}{|\vec{v}|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Αν τα  $b$  και  $c$  είναι και τα δύο 0, τότε το  $\vec{v}$  συμπίπτει με τον άξονα  $x$ , και αρκεί να περιστρέψουμε γύρω από τον  $y$  κατά  $90^\circ$  ή  $-90^\circ$ , ανάλογα με το πρόσημο του  $a$ . Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\mathbf{A}(\vec{v}) = \mathbf{R}_y(-\theta_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{a}{|a|} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{a}{|a|} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Παράδειγμα 3.13** (Περιστροφή γύρω από τυχαίο άξονα με 2 μεταφορές και 5 βασικές περιστροφές.) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός που περιστρέφει κατά γωνία  $\theta$  γύρω από τυχαίο άξονα ο οποίος ορίζεται από ένα διάνυσμα  $\vec{v}$  και ένα σημείο  $p$  (Σχήμα 3.15).



Σχήμα 3.15: Περιστροφή γύρω από τυχαίο άξονα.

Μπορούμε να ευθυγραμμίσουμε το δοσμένο διάνυσμα με τον άξονα  $z$  χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό  $A(\vec{v})$ . Έτσι, μετατρέπουμε το πρόβλημα της περιστροφής γύρω από τυχαίο άξονα σε περιστροφή γύρω από τον άξονα  $z$ . Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο σύνθετο μετασχηματισμό:

Βήμα 1. Μεταφορά του  $p$  στο κέντρο συντεταγμένων,  $T(-\vec{p})$ .

Βήμα 2. Ευθυγράμμιση του  $\vec{v}$  με τον άξονα  $z$  με τον πίνακα  $A(\vec{v})$  του Παραδείγματος 3.12.

Βήμα 3. Περιστροφή γύρω από τον άξονα  $z$  κατά την επιθυμητή γωνία  $\theta$ ,  $R_z(\theta)$ .

Βήμα 4. Αναίρεση της ευθυγράμμισης,  $A^{-1}(\vec{v})$ .

Βήμα 5. Αναίρεση της μεταφοράς,  $T(\vec{p})$ .

Έτσι ο απαιτούμενος μετασχηματισμός είναι:

$$M_{\text{ROT-AXIS}} = T(\vec{p}) \cdot A^{-1}(\vec{v}) \cdot R_z(\theta) \cdot A(\vec{v}) \cdot T(-\vec{p}). \quad (3.30)$$

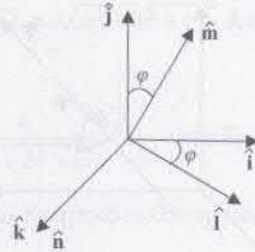
**Παράδειγμα 3.14** (Μετατροπή συστήματος συντεταγμένων με 1 μεταφορά και 3 βασικές περιστροφές.) Να βρεθεί ο απαιτούμενος μετασχηματισμός  $M_{\text{ALIGN}}$  για την ευθυγράμμιση δοσμένου 3Δ συστήματος συντεταγμένων με διανύσματα βάσης  $(\hat{i}, \hat{m}, \hat{n})$  με το σύστημα συντεταγμένων  $xyz$  με διανύσματα βάσης  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ . Το κέντρο του πρώτου συστήματος συντεταγμένων σχετικά με το  $xyz$  είναι  $O_{\text{Imn}}$ .

Απαιτείται ένας μετασχηματισμός άξονα. Η ευθυγράμμιση της βάσης  $(\hat{i}, \hat{m}, \hat{n})$  με την βάση  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  αντιστοιχεί στην μετατροπή του συστήματος συντεταγμένων ενός αντικειμένου από το  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  στο  $(\hat{i}, \hat{m}, \hat{n})$ . Η λύση είναι μια απλή επέκταση του μετασχηματισμού  $A(\vec{v})$  του Παραδείγματος 3.12. Απαιτούνται τρία βήματα:

Βήμα 1. Μεταφορά κατά  $-O_{\text{Imn}}$  ώστε να συμπέσουν τα δύο κέντρα συντεταγμένων,  $T(-\vec{O}_{\text{Imn}})$ .

Βήμα 2. Χρήση του  $A(\vec{v})$  του Παραδείγματος 3.12 για την ευθυγράμμιση του διανύσματος βάσης  $\hat{n}$  με το διάνυσμα βάσης  $\hat{k}$ . Η νέα κατάσταση απεικονίζεται στο Σχήμα 3.16. Πίνακας μετασχηματισμού  $A(\vec{v})$ .





Σχήμα 3.16: Ευθυγράμμιση δύο συστημάτων συντεταγμένων.

Βήμα 3. Περιστροφή κατά  $\varphi$  γύρω από τον άξονα  $z$  για να ευθυγραμμισθούν και οι άλλοι δύο άξονες,  $R_z(\varphi)$ .

$$M_{\text{ALIGN}} = R_z(\varphi) \cdot A(\hat{n}) \cdot T(-\vec{O}_{1mn}) \quad (3.31)$$

Για να υπολογισθεί το  $\varphi$  πρέπει να μετασχηματισθεί το διάνυσμα  $\hat{i}$  ή το  $\hat{m}$  με τον  $A(\hat{n})$ , π.χ.  $\hat{m}' = A(\hat{n}) \cdot \hat{m}$ . Οι τιμές  $\sin \varphi$  και  $\cos \varphi$  που χρειάζονται για την περιστροφή είναι απλά οι  $x$  και  $y$  συντεταγμένες του  $\hat{m}'$ , αντίστοιχα.

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω ότι τα ορθοκανονικά διανύσματα βάσης των δύο συστημάτων συντεταγμένων είναι

$$\hat{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{i}' = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} \\ \frac{4}{\sqrt{29}} \\ \frac{2}{\sqrt{29}} \end{bmatrix}, \quad \hat{m}' = \begin{bmatrix} -\frac{32}{\sqrt{1653}} \\ \frac{25}{\sqrt{1653}} \\ -\frac{2}{\sqrt{1653}} \end{bmatrix}, \quad \hat{n}' = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{57}} \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} \\ \frac{7}{\sqrt{57}} \end{bmatrix},$$

και ότι τα κέντρα των δύο συστημάτων συμπίπτουν ( $O_{1mn} = [0, 0, 0]^T$ ). Τα διανύσματα βάσης του δεύτερου συστήματος εκφράζονται ως προς το πρώτο. Τότε, από τις συντεταγμένες του  $\hat{n}'$ ,  $a = -\frac{2}{\sqrt{57}}$ ,  $b = -\frac{2}{\sqrt{57}}$ ,  $c = \frac{7}{\sqrt{57}}$  και  $\lambda = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{\sqrt{57}}\right)^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{57}}\right)^2}$  (βλέπε Παράδειγμα 3.12).

Συνεπώς,

$$A(\hat{n}) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{53}{57}} & -\frac{4}{\sqrt{3021}} & \frac{14}{\sqrt{3021}} & 0 \\ 0 & \frac{7}{\sqrt{53}} & \frac{2}{\sqrt{53}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

και

$$\hat{\mathbf{m}}' = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{m}} = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{32}{\sqrt{1653}} \\ \frac{25}{\sqrt{1653}} \\ -\frac{2}{\sqrt{1653}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{32}{\sqrt{1537}} \\ 3\sqrt{\frac{57}{1537}} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

οπότε

$$\sin \varphi = -\frac{32}{\sqrt{1537}} \text{ και } \cos \varphi = 3\sqrt{\frac{57}{1537}}.$$

Συνεπώς,

$$\mathbf{R}_z(\varphi) = \begin{bmatrix} 3\sqrt{\frac{57}{1537}} & \frac{32}{\sqrt{1537}} & 0 & 0 \\ -\frac{32}{\sqrt{1537}} & 3\sqrt{\frac{57}{1537}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τέλος, αφού τα κέντρα των δύο συστημάτων συντεταγμένων συμπίπτουν, η Εξίσωση (3.31) γίνεται

$$\mathbf{M}_{\text{ALIGN}} = \mathbf{R}_z(\varphi) \cdot \mathbf{A}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{ID}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\sqrt{\frac{57}{1537}} & \frac{32}{\sqrt{1537}} & 0 & 0 \\ -\frac{32}{\sqrt{1537}} & 3\sqrt{\frac{57}{1537}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{53}{57}} & -\frac{4}{\sqrt{3021}} & \frac{14}{\sqrt{3021}} & 0 \\ 0 & \frac{7}{\sqrt{53}} & \frac{2}{\sqrt{53}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} & 0 \\ -\frac{32}{\sqrt{1653}} & \frac{25}{\sqrt{1653}} & -\frac{2}{\sqrt{1653}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Παράδειγμα 3.15 (Αλλαγή βάσης.)** Υπολογίστε τον μετασχηματισμό  $\mathbf{M}_{\text{BASIS}}$  που απαιτείται για την αλλαγή της ορθοκανονικής βάσης ενός συστήματος συντεταγμένων από  $B1 = (\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{j}}_1, \hat{\mathbf{k}}_1)$  σε  $B2 = (\hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{j}}_2, \hat{\mathbf{k}}_2)$  και αντίστροφα.

Έστω ότι οι συντεταγμένες του ίδιου διανύσματος στις δύο βάσεις είναι αντίστοιχα  $\vec{\mathbf{v}}_{B1}$  και  $\vec{\mathbf{v}}_{B2}$ . Αν οι συντεταγμένες των διανυσμάτων βάσης  $\hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{j}}_2$ , και  $\hat{\mathbf{k}}_2$  στην  $B1$  είναι

$$\hat{\mathbf{i}}_{2,B1} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{j}}_{2,B1} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \hat{\mathbf{k}}_{2,B1} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix},$$



τότε μπορεί εύκολα ναδειχθεί (βλέπε Ασκήσεις, Ενότητα 3.11) ότι

$$\vec{v}_{B1} = \begin{bmatrix} a & d & p \\ b & e & q \\ c & f & r \end{bmatrix} \cdot \vec{v}_{B2}. \quad (3.32)$$

Συνεπώς,

$$M_{\text{BASIS}}^{-1} = \begin{bmatrix} a & d & p \\ b & e & q \\ c & f & r \end{bmatrix}.$$

Αφού η  $B2$  είναι μια ορθοκανονική βάση, ο  $M_{\text{BASIS}}^{-1}$  είναι ορθογώνιος πίνακας, και συνεπώς ο αντίστροφός του ισούται με τον ανάστροφό του. Άρα,

$$M_{\text{BASIS}} = (M_{\text{BASIS}}^{-1})^T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{bmatrix},$$

που έχει ομογενή μορφή

$$M_{\text{BASIS}} = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ p & q & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

**Παράδειγμα 3.16 (Μετατροπή συστήματος συντεταγμένων με αλλαγή βάσης.)** Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα αλλαγής βάσης του Παραδείγματος 3.15 για να ευθυγραμμίσετε δοσμένο 3Δ σύστημα συντεταγμένων με διανύσματα βάσης  $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$ , με το σύστημα  $xyz$  με διανύσματα βάσης  $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ . Το κέντρο του πρώτου συστήματος σχετικά με το  $xyz$  είναι  $\mathbf{O}_{1mn}$  [Cunn90].

Όπως στο παράδειγμα 3.14, ο απαιτούμενος μετασχηματισμός είναι μετασχηματισμός άξονα. Αντιστοιχεί στην μετατροπή του συστήματος συντεταγμένων ενός αντικειμένου από  $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$  σε  $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$ . Η αλλαγή βάσης μπορεί να αντικαταστήσει τις τρεις περιστροφές του Παραδείγματος 3.14. Οπότε, τα βήματα που απαιτούνται για την ευθυγράμμιση του πρώτου συστήματος συντεταγμένων με το δεύτερο είναι:

Βήμα 1. Μεταφορά κατά  $-\mathbf{O}_{1mn}$  ώστε να συμπέσουν τα κέντρα των δύο συστημάτων,  $\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{O}}_{1mn})$ .

Βήμα 2. Χρήση του  $M_{\text{BASIS}}$  για αλλαγή βάσης από  $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$  σε  $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$ .

$$\begin{aligned} M_{\text{ALIGN2}} &= M_{\text{BASIS}} \cdot \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{O}}_{1mn}) \\ &= \begin{bmatrix} a & b & c & -(a o_x + b o_y + c o_z) \\ d & e & f & -(d o_x + e o_y + f o_z) \\ p & q & r & -(p o_x + q o_y + r o_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

όπου τα διανύσματα βάσης  $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$  εκφραζόμενα στη βάση  $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$  είναι  $\hat{\mathbf{I}} = [a, b, c]^T$ ,  $\hat{\mathbf{m}} = [d, e, f]^T$ ,  $\hat{\mathbf{n}} = [p, q, r]^T$ , και  $\mathbf{O}_{1mn} = [o_x, o_y, o_z]^T$ .

Για ένα αριθμητικό παράδειγμα, ας πάρουμε τις τιμές του Παραδείγματος 3.14 για τις βάσεις  $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$  και  $(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}})$ . Μεταφορά δεν απαιτείται, καθώς τα δύο κέντρα συμπίπτουν. Αφού η δεύτερη βάση εκφράζεται ως προς την πρώτη, μπορούμε να γράψουμε κατευθείαν τον πίνακα αλλαγής βάσης:

$$\mathbf{M}_{\text{BASIS}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} \\ -\frac{32}{\sqrt{1653}} & \frac{25}{\sqrt{1653}} & -\frac{2}{\sqrt{1653}} \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} \end{bmatrix},$$

που έχει ομογενή μορφή

$$\mathbf{M}_{\text{BASIS}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{29}} & \frac{4}{\sqrt{29}} & \frac{2}{\sqrt{29}} & 0 \\ -\frac{32}{\sqrt{1653}} & \frac{25}{\sqrt{1653}} & -\frac{2}{\sqrt{1653}} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{57}} & -\frac{2}{\sqrt{57}} & \frac{7}{\sqrt{57}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

και είναι ίσος με τον πίνακα  $\mathbf{M}_{\text{ALIGN}}$  του Παραδείγματος 3.14 για τα ίδια διανύσματα βάσης.

**Παράδειγμα 3.17** (Περιστροφή γύρω από τυχαίο άξονα με αλλαγή βάσης.) Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα αλλαγής βάσης του Παραδείγματος 3.15 για να βρείτε έναν εναλλακτικό μετασχηματισμό για την περιστροφή κατά γωνία  $\theta$  γύρω από τυχαίο άξονα ο οποίος ορίζεται από διάνυσμα  $\vec{\mathbf{v}}$  και σημείο  $\mathbf{p}$  (Σχήμα 3.15) [Cunn90].

Έστω,

$$\vec{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{p} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}.$$

Τότε η εξίσωση του επιπέδου που περνά από το  $\mathbf{p}$  και είναι κάθετο στο  $\vec{\mathbf{v}}$  είναι

$$a(x - x_p) + b(y - y_p) + c(z - z_p) = 0.$$

Έστω  $\mathbf{q}$  ένα σημείο πάνω σε αυτό το επίπεδο, τέτοιο ώστε  $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$  (αυτό μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση του επιπέδου, διαλέγοντας τιμές για τα  $x$  και  $y$  και λύνοντας την για την τιμή του  $z$ ). Επίσης, έστω  $\vec{\mathbf{m}} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$  και  $\vec{\mathbf{I}} = \vec{\mathbf{m}} \times \vec{\mathbf{v}}$ . Κανονικοποιούμε τα  $\vec{\mathbf{I}}$ ,  $\vec{\mathbf{m}}$  και  $\vec{\mathbf{v}}$  για να ορίσουμε τη βάση του συστήματος συντεταγμένων  $(\hat{\mathbf{I}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{v}})$  με τον έναν άξονα να είναι ο  $\vec{\mathbf{v}}$  και τους άλλους δύο πάνω στο δοσμένο επίπεδο. Είναι έτσι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό  $\mathbf{M}_{\text{BASIS}}$  για να το ευθυγραμμίσουμε με το σύστημα συντεταγμένων  $xyz$  και μετά να εκτελέσουμε την επιθυμητή περιστροφή κατά  $\theta$  γύρω από τον άξονα  $z$ . Τα απαιτούμενα βήματα λοιπόν είναι:



Βήμα 1. Μεταφορά του  $\mathbf{p}$  στο κέντρο,  $\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}})$ .

Βήμα 2. Ευθυγράμμιση της βάσης  $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{v}})$  με την βάση  $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ ,  $\mathbf{M}_{\text{BASIS}}$ .

Βήμα 3. Περιστροφή γύρω από τον άξονα  $z$  κατά την επιθυμητή γωνία  $\theta$ ,  $\mathbf{R}_z(\theta)$ .

Βήμα 4. Αναίρεση της ευθυγράμμισης,  $\mathbf{M}_{\text{BASIS}}^{-1}$ .

Βήμα 5. Αναίρεση της μεταφοράς,  $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}})$ .

$$\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS2}} = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{p}}) \cdot \mathbf{M}_{\text{BASIS}}^{-1} \cdot \mathbf{R}_z(\theta) \cdot \mathbf{M}_{\text{BASIS}} \cdot \mathbf{T}(-\vec{\mathbf{p}}). \quad (3.35)$$

Σε σύγκριση με τον γεωμετρικά υπολογισμένο πίνακα  $\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS2}}$ , ο αλγεβρικός υπολογισμός του  $\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS2}}$  είναι απλούστερος.

**Παράδειγμα 3.18 (Περιστροφή πυραμίδας.)** Περιστρέψτε την πυραμίδα που ορίζεται από τις κορυφές  $\mathbf{a} = [0, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{b} = [1, 0, 0]^T$ ,  $\mathbf{c} = [0, 1, 0]^T$  και  $\mathbf{d} = [0, 0, 1]^T$  κατά  $45^\circ$  γύρω από τον άξονα που ορίζεται από το σημείο  $\mathbf{c}$  και το διάνυσμα  $\vec{\mathbf{v}} = [0, 1, 1]^T$  (Σχήμα 3.17).

Η πυραμίδα μπορεί να παρασταθεί από έναν πίνακα  $\mathbf{P}$ , οι στήλες του οποίου είναι οι ομογενείς συντεταγμένες των κορυφών της:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c} \quad \mathbf{d}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα  $\mathbf{M}_{\text{ROT-AXIS}}$  [Εξίσωση (3.30)] για την περιστροφή της πυραμίδας. Οι απαιτούμενοι υποπίνακες είναι:

$$\mathbf{T}(-\vec{\mathbf{c}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(\vec{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_z(45^\circ) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1}(\vec{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{c}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

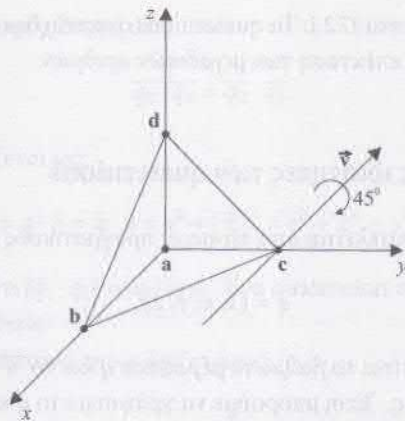
Οι παραπάνω

και η περιστροφή

Οι κορυφές της  
 $\mathbf{b}' = [\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}, 0]^T$

### 3.9. Quaternions

Οι περιστροφές  
ματα 3.13 και 3.14  
έκφρασης τέτοιου  
την έκφραση  
εξαιρετικά χρήσιμη  
στροφή ενός



Σχήμα 3.17: Περιστροφή πυραμίδας γύρω από άξονα.

Οι παραπάνω συντίθενται σύμφωνα με την Εξίσωση (3.30) δίνοντας:

$$M_{\text{ROT-AXIS}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

και η περιστραμμένη πυραμίδα υπολογίζεται ως εξής

$$P' = M_{\text{ROT-AXIS}} \cdot P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1+\sqrt{2}}{2} & 0 & 1 \\ \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{4-\sqrt{2}}{4} & 1 & \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}-4}{4} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Οι κορυφές της περιστραμμένης πυραμίδας είναι  $\mathbf{a}' = [\frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}-2}{4}]^T$ ,  $\mathbf{b}' = [\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{4-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}-4}{4}]^T$ ,  $\mathbf{c}' = [0, 1, 0]^T$  και  $\mathbf{d}' = [1, \frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]^T$ .

### 3.9 Quaternions<sup>®</sup>

Οι περιστροφές γύρω από έναν τυχαίο άξονα έχουν ήδη περιγραφεί στα Παραδείγματα 3.13 και 3.17. Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε έναν εναλλακτικό τρόπο έκφρασης τέτοιων περιστροφών, χρησιμοποιώντας *quaternions*. Όπως θα δούμε, αυτή η έκφραση των περιστροφών έχει ενδιαφέρουσες ιδιότητες, και, το κυριότερο, είναι εξαιρετικά χρήσιμη όταν θέλουμε να υπολογίσουμε ενδιάμεσες θέσεις κατά την περιστροφή ενός αντικειμένου για την παραγωγή συνθετικής κίνησης (animation), όπως



θα περιγραφεί στην Ενότητα 17.2.1. Τα quaternions αναπτύχθηκαν από τον Sir William Hamilton το 1843 ως μία επέκταση των μιγαδικών αριθμών.

### 3.9.1 Μαθηματικές ιδιότητες των quaternions

Ένα quaternion  $q$  αποτελείται από τέσσερις πραγματικούς αριθμούς:

$$q = (s, x, y, z),$$

από τους οποίους ο  $s$  καλείται το *βαθμωτό μέρος* του  $q$  και το  $\vec{v} = (x, y, z)$  καλείται το *διανυσματικό μέρος* του  $q$ . Έτσι μπορούμε να γράψουμε το  $q$  και ως:

$$q = (s, \vec{v}). \quad (3.36)$$

Τα quaternions μπορούν να ειπωθούν ως μία επέκταση των μιγαδικών αριθμών στις τέσσερις διαστάσεις: χρησιμοποιώντας «φανταστικές μονάδες»  $i, j$ , και  $k$  τέτοιες, ώστε  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$  και  $ij = k, ji = -k$ , κ.ο.κ. κυκλικά, το quaternion  $q$  μπορεί να γραφεί ως:

$$q = s + xi + yj + zk. \quad (3.37)$$

Ένας πραγματικός αριθμός  $u$  αντιστοιχεί στο quaternion  $(u, \vec{0})$ . Ένα σύννηθες διάνυσμα  $\vec{v}$  αντιστοιχεί στο quaternion  $(0, \vec{v})$  και, παρομοίως, ένα σημείο  $\mathbf{p}$  στο quaternion  $(0, \mathbf{p})$ .

Για τα ακόλουθα θέτουμε  $q_i = (s_i, \vec{v}_i)$ .

Η πρόσθεση μεταξύ quaternions ορίζεται με φυσικό τρόπο ως:

$$q_1 + q_2 = (s_1, \vec{v}_1) + (s_2, \vec{v}_2) = (s_1 + s_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2). \quad (3.38)$$

Ο πολλαπλασιασμός μεταξύ quaternions είναι πιο πολύπλοκος, και το αποτέλεσμα του μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση (3.37) και τις ιδιότητες των φανταστικών μονάδων. Δίνουμε δύο εύχρηστες μορφές για τον πολλαπλασιασμό quaternions:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 &= (s_1 s_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2, & s_1 \vec{v}_2 + s_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \\ &= (s_1 s_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2, & s_1 x_2 + x_1 s_2 + y_1 z_2 - z_1 y_2, \\ & & s_1 y_2 + y_1 s_2 + z_1 x_2 - x_1 z_2, \\ & & s_1 z_2 + z_1 s_2 + x_1 y_2 - y_1 x_2). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ο πολλαπλασιασμός μεταξύ quaternions είναι προσεταιριστικός· όμως δεν είναι αντιμεταθετικός, όπως φαίνεται από την πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις στην οποία εμπλέκεται το εξωτερικό γινόμενο  $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$  το οποίο, επίσης, δεν είναι αντιμεταθετικό.

Το συζυγές quaternion του  $q$  ορίζεται ως:

$$\bar{q} = (s, -\vec{v}), \quad (3.40)$$

και μπορεί εύκολα να ε

Το μέτρο του  $q$  ορ

και μπορεί να δειχθεί  
ισό με 1 καλείται μον  
Το αντίστροφο  $q^{-1}$

και επομένως  $q \cdot q^{-1}$

### 3.9.2 Έκφρα

Όπως ήδη ανα  
φραστούν τυχαίες  
από έναν άξονα π  
οποίου η διεύθυν  
το μοναδιαίο quat

και εφαρμόζεται  
(0,  $\mathbf{p}$ ), χρησιμοπο

(η δεύτερη ισότη

όπου  $s = \cos$   
αντιπροσωπεύ  
κάτω δείχνουμ  
περιστροφή κ

Χρησιμοπο  
ποτέλεσμα δύο  
από τα μοναδ  
είναι:

$q_1$

και μπορεί εύκολα να επαληθευτεί ότι:

$$\overline{q_1 \cdot q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}. \quad (3.41)$$

Το μέτρο του  $q$  ορίζεται ως:

$$|q|^2 = q \cdot \overline{q} = \overline{q} \cdot q = s^2 + |\vec{v}|^2 = s^2 + x^2 + y^2 + z^2, \quad (3.42)$$

και μπορεί να δειχθεί ότι  $|q_1 \cdot q_2| = |q_1| |q_2|$ . Ένα quaternion του οποίου το μέτρο είναι ίσο με 1 καλείται μοναδιαίο.

Το αντίστροφο quaternion του  $q$  ορίζεται ως:

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2} \overline{q}, \quad (3.43)$$

και επομένως  $q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1$ . Αν το  $q$  είναι μοναδιαίο quaternion, τότε  $q^{-1} = \overline{q}$ .

### 3.9.2 Έκφραση περιστροφής με quaternions

Όπως ήδη αναφέρθηκε, τα quaternions μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εκφραστούν τυχαίες περιστροφές. Συγκεκριμένα, μία περιστροφή κατά γωνία  $\theta$  γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και του οποίου η διεύθυνση ορίζεται από ένα μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{n}$ , αντιπροσωπεύεται από το μοναδιαίο quaternion:

$$q = \left( \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \hat{n} \right), \quad (3.44)$$

και εφαρμόζεται σε ένα σημείο  $\mathbf{p}$ , το οποίο αντιπροσωπεύεται από το quaternion  $p = (0, \mathbf{p})$ , χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$\mathbf{p}' = q \cdot p \cdot q^{-1} = q \cdot p \cdot \overline{q} \quad (3.45)$$

(η δεύτερη ισότητα ισχύει καθώς το  $q$  είναι μοναδιαίο). Αυτή η σχέση δίνει:

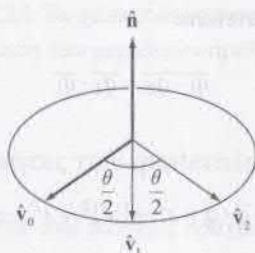
$$\mathbf{p}' = \left( 0, (s^2 - \vec{v} \cdot \vec{v})\mathbf{p} + 2\vec{v}(\vec{v} \cdot \mathbf{p}) + 2s(\vec{v} \times \mathbf{p}) \right), \quad (3.46)$$

όπου  $s = \cos \frac{\theta}{2}$  και  $\vec{v} = \sin \frac{\theta}{2} \hat{n}$ . Σημειώνεται ότι το quaternion  $p'$  που προκύπτει αντιπροσωπεύει ένα σύννηθες σημείο  $\mathbf{p}'$  καθώς έχει μηδενικό βαθμωτό μέρος. Παρακάτω δείχνουμε ότι το  $\mathbf{p}'$  είναι πράγματι η εικόνα του αρχικού σημείου  $\mathbf{p}$ , μετά την περιστροφή κατά γωνία  $\theta$  γύρω από τον δοσμένο άξονα.

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση είναι πολύ εύκολο να εκφραστεί αλγεβρικά το αποτέλεσμα δύο διαδοχικών περιστροφών. Υποθέτοντας ότι αυτές αντιπροσωπεύονται από τα μοναδιαία quaternions  $q_1$  και  $q_2$ , το αποτέλεσμα της σύνθετης περιστροφής είναι:

$$q_2 \cdot (q_1 \cdot p \cdot \overline{q_1}) \cdot \overline{q_2} = (q_2 \cdot q_1) \cdot p \cdot (\overline{q_1} \cdot \overline{q_2}) = (q_2 \cdot q_1) \cdot p \cdot \overline{(q_2 \cdot q_1)}.$$





Σχήμα 3.18: Περιστροφή μοναδιαίου διανύσματος.

Επομένως, η σύνθετη περιστροφή αντιπροσωπεύεται από το quaternion  $q = q_2 \cdot q_1$  (το οποίο είναι επίσης μοναδιαίο). Σε σύγκριση με τον ισοδύναμο πολλαπλασιασμό πινάκων περιστροφής, ο πολλαπλασιασμός quaternions είναι απλούστερος, απαιτεί λιγότερες πράξεις, και συνεπώς είναι αριθμητικά πιο ευσταθής.

Θα επιβεβαιώσουμε τώρα τις σχέσεις (3.44) και (3.45). Ας θεωρήσουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{v}_0$ , έναν άξονα περιστροφής  $\hat{n}$ , και τις εικόνες  $\hat{v}_1$  και  $\hat{v}_2$  του  $\hat{v}_0$  μετά από δύο διαδοχικές περιστροφές κατά γωνία  $\frac{\theta}{2}$  γύρω από τον άξονα  $\hat{n}$  (Σχήμα 3.18). τα αντίστοιχα quaternions είναι  $p_0 = (0, \hat{v}_0)$ ,  $p_1 = (0, \hat{v}_1)$ ,  $p_2 = (0, \hat{v}_2)$ .

Αρχικά θα δείξουμε ότι  $p_2 = q \cdot p_0 \cdot \bar{q}$  για  $q = (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \hat{n})$ . Παρατηρούμε ότι  $\cos \frac{\theta}{2} = \hat{v}_0 \cdot \hat{v}_1$  και  $\sin \frac{\theta}{2} \hat{n} = \hat{v}_0 \times \hat{v}_1$ , επομένως μπορούμε να γράψουμε το  $q$  ως  $q = (\hat{v}_0 \cdot \hat{v}_1, \hat{v}_0 \times \hat{v}_1) = p_1 \cdot \bar{p}_0$ . Παρομοίως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι  $q = p_2 \cdot \bar{p}_1$ . Τότε:

$$\begin{aligned} q \cdot p_0 \cdot \bar{q} &= (p_1 \cdot \bar{p}_0) \cdot p_0 \cdot \overline{(p_2 \cdot \bar{p}_1)} \\ &= (p_1 \cdot \bar{p}_0) \cdot p_0 \cdot p_1 \cdot \bar{p}_2 \\ &= p_1 \cdot p_1 \cdot \bar{p}_2 \\ &= p_2, \end{aligned}$$

καθώς  $p_1 \cdot p_1 = (-1, \vec{0}) = -1$  διότι  $|\hat{v}_1| = 1$ , και επίσης  $(-1) \cdot \bar{p}_2 = -(0, -\hat{v}_2) = (0, \hat{v}_2) = p_2$ . Αυτό αποδεικνύει ότι η πράξη  $q \cdot p_0 \cdot \bar{q}$  έχει ως αποτέλεσμα την περιστροφή του  $\hat{v}_0$  κατά γωνία  $\theta$  γύρω από τον  $\hat{n}$ . Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι η πράξη  $q \cdot p_1 \cdot \bar{q}$  έχει ως αποτέλεσμα την ίδια περιστροφή για το  $\hat{v}_1$ , ενώ η  $q \cdot (0, \hat{n}) \cdot \bar{q}$  δίνει τον  $\hat{n}$ , κάτι που συμφωνεί με το γεγονός ότι ο  $\hat{n}$  είναι ο άξονας της περιστροφής.

Πλέον μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω για ένα τυχαίο διάνυσμα: τα τρία διανύσματα  $\hat{v}_0$ ,  $\hat{v}_1$ , και  $\hat{n}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και επομένως ένα διάνυσμα  $\vec{p}$  μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών,  $\vec{p} = \lambda_0 \hat{v}_0 + \lambda_1 \hat{v}_1 + \lambda \hat{n}$ . Τότε:

$$\begin{aligned} q \cdot (0, \vec{p}) \cdot \bar{q} &= q \cdot (0, \lambda_0 \hat{v}_0 + \lambda_1 \hat{v}_1 + \lambda \hat{n}) \cdot \bar{q} \\ &= q \cdot (0, \lambda_0 \hat{v}_0) \cdot \bar{q} + q \cdot (0, \lambda_1 \hat{v}_1) \cdot \bar{q} + q \cdot (0, \lambda \hat{n}) \cdot \bar{q} \\ &= \lambda_0 (q \cdot (0, \hat{v}_0) \cdot \bar{q}) + \lambda_1 (q \cdot (0, \hat{v}_1) \cdot \bar{q}) + \lambda (q \cdot (0, \hat{n}) \cdot \bar{q}), \end{aligned}$$

το οποίο είναι ακριβώς ένα quaternion με βαθμωτό μέρος μηδέν και διανυσματικό μέρος που σχηματίζεται από τις συνιστώσες του περιστραμμένου  $\vec{p}$ .

### 3.9.3 Μετατροπές μεταξύ quaternions και πινάκων περιστροφής

Για να ενσωματωθούν οι περιστροφές στην έκφρασή τους με quaternions σε μία σειρά μετασχηματισμών που εκφράζονται με πίνακες, είναι απαραίτητη η κατασκευή ενός πίνακα περιστροφής, αν δίνεται ένα μοναδιαίο quaternion, και αντίστροφα. Υπενθυμίζουμε ότι, αντίθετα από τις περιστροφές που περιγράφονται στα Παραδείγματα 3.13 και 3.17, τα quaternions αντιπροσωπεύουν περιστροφές γύρω από έναν άξονα ο οποίος διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων. Αν αυτό δεν συμβαίνει, χρειάζεται η συνήθης σειρά μετασχηματισμών: μεταφορά στην αρχή, περιστροφή, μεταφορά στην αρχική θέση.

Μπορεί να αποδειχθεί [Shoe87] ότι ο πίνακας περιστροφής που αντιστοιχεί σε μία περιστροφή που αντιπροσωπεύεται από το μοναδιαίο quaternion  $q = (s, x, y, z)$  είναι ο εξής:

$$\mathbf{R}_q = \begin{bmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2sz & 2xz + 2sy & 0 \\ 2xy + 2sz & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2sx & 0 \\ 2xz - 2sy & 2yz + 2sx & 1 - 2x^2 - 2y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Για την αντίστροφη διαδικασία, αν ένας πίνακας:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & 0 \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

αντιπροσωπεύει μία περιστροφή, το αντίστοιχο quaternion  $q = (s, x, y, z)$  μπορεί να υπολογιστεί ως εξής. Στον πίνακα  $\mathbf{R}_q$  αθροίζουμε τα στοιχεία της διαγωνίου και έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} m_{00} + m_{11} + m_{22} + 1 &= 1 - 2y^2 - 2z^2 + 1 - 2x^2 - 2z^2 + 1 - 2x^2 - 2y^2 + 1 \\ &= 4 - 4(x^2 + y^2 + z^2) = 4 - 4(1 - s^2) = 4s^2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

(υπενθυμίζουμε ότι το  $q$  είναι μοναδιαίο quaternion και άρα  $s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ), επομένως:

$$s = \frac{1}{2} \sqrt{m_{00} + m_{11} + m_{22} + 1}. \quad (3.49)$$

Οι υπόλοιπες συντεταγμένες  $x$ ,  $y$ , και  $z$  του  $q$  μπορούν να υπολογιστούν αφαιρώντας στοιχεία του  $\mathbf{R}_q$  που είναι συμμετρικά ως προς τη διαγώνιο. Έτσι αν  $s \neq 0$ :

$$x = \frac{m_{21} - m_{12}}{4s}, \quad y = \frac{m_{02} - m_{20}}{4s}, \quad z = \frac{m_{10} - m_{01}}{4s}. \quad (3.50)$$



Αν  $s = 0$  (ή αν το  $s$  είναι πολύ κοντά στο 0, ώστε να βελτιωθεί η αριθμητική ακρίβεια) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα διαφορετικό σύνολο σχέσεων. Για παράδειγμα:

$$x = \frac{1}{2} \sqrt{m_{00} - m_{11} - m_{22} + 1},$$

$$y = \frac{m_{01} + m_{10}}{4x}, \quad z = \frac{m_{02} + m_{20}}{4x}, \quad s = \frac{m_{21} - m_{12}}{4x}.$$

Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο [Shoe87] για πληρέστερη περιγραφή.

**Παράδειγμα 3.19 (Περιστροφή πυραμίδας.)** Θα επεξεργαστούμε και πάλι το Παράδειγμα 3.18 χρησιμοποιώντας quaternions.

Η ζητούμενη περιστροφή είναι κατά  $45^\circ$  γύρω από έναν άξονα που ορίζεται από το σημείο  $c = [0, 1, 0]^T$  και τη διεύθυνση  $\vec{v} = [0, 1, 1]^T$ . Καθώς ο άξονας δεν διέρχεται από την αρχή των συντεταγμένων, πρέπει να τον μεταφέρουμε κατά  $-\vec{c}$ , να πραγματοποιήσουμε την περιστροφή χρησιμοποιώντας τον πίνακα  $R_q$  από τη σχέση (3.47), και να τον μεταφέρουμε πίσω. Πρέπει επίσης να κανονικοποιήσουμε το διάνυσμα διεύθυνσης λαμβάνοντας  $\hat{v} = \vec{v}/|\vec{v}| = [0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]^T$ .

Το quaternion που εκφράζει τη στροφή κατά  $45^\circ$  γύρω από άξονα με διεύθυνση  $\vec{v}$  είναι το:

$$q = \left( \cos \frac{45^\circ}{2}, \sin \frac{45^\circ}{2} \hat{v} \right) = \left( \cos 22.5^\circ, 0, \frac{\sin 22.5^\circ}{\sqrt{2}}, \frac{\sin 22.5^\circ}{\sqrt{2}} \right).$$

Από τους τριγωνομετρικούς τύπους διπλάσιου τόξου έχουμε:

$$\cos^2 22.5^\circ = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4},$$

$$\sin^2 22.5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

Επομένως:

$$R_q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

και ο τελικός πίνακας μετασχηματισμού είναι:

$$M_{\text{ROT-AXIS3}} = T(\vec{c}) \cdot R_q \cdot T(-\vec{c}),$$

ο οποίος είναι ίσος με τον πίνακα  $M_{\text{ROT-AXIS}}$  του Παραδείγματος 3.18.