Θέματα εξεταστικής στο μάθημα "Σήματα και Συστήματα" για το ακαδημαϊκό έτος 2024-2025

1ο Θέμα

Εστω το περιοδικό σήμα $x(t) = e^{-t/\nu},\ t \in [-\nu, \nu]$

(α) Βρείτε την εκθετική σειρά Fourier του σήματος, συναρτήσει του ν.

(β) Βρείτε την ισχύ του σήματος, συναρτήσει του ν.

- Υπόδειξη: Ισχύς αναλογικού περιοδικού σήματος $P_x = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} |x(t)|^2 dt$

Λύση 1ου Θέματος

Αρχικά υπολογίζομε την περίοδο και την βασική συχνότητα αντίστοιχα:

- $T = \nu - (-\nu) = \nu + \nu = 2\nu$
- Κατά συνέπειαν, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2\pi} = \dfrac{\pi}{\nu}$

1ο Ερώτημα

Αρχικά υπολογίζομε την σταθερά συνιστώσα a_0:

$$
\begin{aligned}
a_0 =& \frac{1}{T}\int_{-\nu}^{\nu} x(t)dt \\
=& \frac{1}{2\nu}\int_{-\nu}^{\nu} e^{-t/\nu}dt \xRightarrow[\frac{1}{a}e^{at}]{\int e^{at}dt} \\
=& \frac{1}{2\nu}\left[\frac{1}{-\frac{1}{\nu}}e^{-t/\nu}\right]_{-\nu}^{\nu} \\
=& \frac{1}{2\nu}\left[-\nu e^{-t/\nu}\right]_{-\nu}^{\nu} \\
=& -\frac{1}{2\nu}\nu\left[e^{-t/\nu}\right]_{-\nu}^{\nu} \\
=& -\frac{1}{2}\left[e^{-\nu/\nu} - e^{-(-\nu)/\nu}\right] \\
=& -\frac{1}{2}\left[e^{-1} - e^{\nu/\nu}\right] \\
=& -\frac{1}{2}\left[e^{-1} - e\right] \\
=& \frac{1}{2}\left[e - e^{-1}\right]
\end{aligned}
$$

Εν συνεχεία, υπολογίζομε την σταθερά συνιστώσα $a_k,\ k \neq 0$:

$$
a_k = \frac{1}{T}\int_{-\nu}^{\nu} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt
$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{T}\int_{-\nu}^{\nu} e^{-t/\nu}e^{-jk\omega_0 t}dt\\
&=\frac{1}{2\nu}\int_{-\nu}^{\nu} e^{-t(1/\nu+jk\omega_0)}dt \xRightarrow[\frac{1}{a}e^{at}]{\int e^{at}dt}\\
&=\frac{1}{2\nu}\left[\frac{1}{-(1/\nu+jk\omega_0)}e^{-t(1/\nu+jk\omega_0)}\right]_{-\nu}^{\nu}\\
&=-\frac{1}{2\nu(1/\nu+jk\omega_0)}\left[e^{-t(1/\nu+jk\omega_0)}\right]_{-\nu}^{\nu}\\
&=-\frac{1}{2+2jk(\nu\omega_0)}\left[e^{-t(1/\nu+jk\omega_0)}\right]_{-\nu}^{\nu}\\
&=-\frac{1}{2+2jk\pi}\left[e^{-t(1/\nu+jk\omega_0)}\right]_{-\nu}^{\nu}\\
&=-\frac{1}{2+2jk\pi}\left[e^{-\nu(1/\nu+jk\omega_0)}-e^{-(-\nu)(1/\nu+jk\omega_0)}\right]\\
&=-\frac{1}{2+2jk\pi}\left[e^{-\nu(1/\nu+jk\omega_0)}-e^{\nu(1/\nu+jk\omega_0)}\right]\\
&=\frac{1}{2+2jk\pi}\left[e^{\nu(1/\nu+jk\omega_0)}-e^{-\nu(1/\nu+jk\omega_0)}\right]\\
&=\frac{1}{2+2jk\pi}\left[e^{1+jk(\nu\omega_0)}-e^{-1-jk(\nu\omega_0)}\right]\\
&=\frac{1}{2+2jk\pi}\left[e^{1+jk\pi}-e^{-1-jk\pi}\right]\\
&=\frac{1}{2+2jk\pi}\left[ee^{jk\pi}-e^{-1}e^{-jk\pi}\right]\\
&=\frac{1}{2+2jk\pi}\left[e\cos(k\pi)-e^{-1}\cos(-k\pi)\right]\\
&=\frac{1}{2+2jk\pi}\left[e\cos(k\pi)-e^{-1}\cos(k\pi)\right]\\
&=\frac{\cos(k\pi)}{2+2jk\pi}\left[e-e^{-1}\right]\\
&=\frac{(-1)^k}{2+2jk\pi}\left[e-e^{-1}\right]
\end{aligned}
$$

2ο Ερώτημα

$$
\begin{aligned}
P_x =&\frac{1}{T}\int_{t}^{t+T}|x(t)|^2dt\\
=&\frac{1}{2\nu}\int_{-\nu}^{\nu}\left|e^{-t/\nu}\right|^2dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\nu}\int_{-\nu}^{\nu} e^{-2t/\nu}dt \\
&= \frac{1}{2\nu}\left[\frac{1}{-2/\nu}e^{-2t/\nu}\right]_{-\nu}^{\nu} \\
&= \frac{1}{2\nu}\left[-\frac{\nu}{2}e^{-2t/\nu}\right]_{-\nu}^{\nu} \\
&= -\frac{1}{2\nu}\frac{\nu}{2}\left[e^{-2t/\nu}\right]_{-\nu}^{\nu} \\
&= -\frac{1}{4}\left[e^{-2t/\nu}\right]_{-\nu}^{\nu} \\
&= -\frac{1}{4}\left[e^{-2\nu/\nu} - e^{-2(-\nu)/\nu}\right] \\
&= -\frac{1}{4}\left[e^{-2} - e^{2}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[e^{2} - e^{-2}\right]
\end{aligned}
$$

2ο Θέμα

Έστω η απόκριση συχνότητος ενός ΓΧΑ συστήματος:

$$H(\omega) = \frac{e^{-4j\omega}}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4}$$

(α) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση, βάσει του μετασχηματισμού Fourier.

(β) Βρείτε την διαφορική εξίσωση, την οποίαν περιγράφει.

- Υπόδειξη: α)$\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \dfrac{1}{a+j\omega},\ a>0$, β) $\mathcal{F}\left\{\dfrac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n X(\omega)$, γ) $H(\omega) = \dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}$, δ) $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0}X(\omega)$

Λύση 2ου Θέματος

1ο Ερώτημα

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= \frac{e^{-4j\omega}}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4} \\
&= e^{-4j\omega}\frac{1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4} \xRightarrow[\text{υποδείξεως δ)}]{\text{Χρήση}} \\
H(\omega) &= e^{-4j\omega}X(\omega)
\end{aligned}
$$

όπου

$$X(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4}$$

Βάσει της υποδείξεως δ) προκύπτει ότι $h(t) = x(t-4)$. Αρκεί να βρεθεί το σήμα $x(t)$ το οποίο έχει μετασχηματισμό Fourier $X(\omega) = \dfrac{1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4}$.

$$
\begin{aligned}
X(\omega) =& \frac{1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4} \\
=& \frac{1}{(j\omega+4)(j\omega+1)} \\
=& \frac{A}{j\omega+4} + \frac{B}{j\omega+1} \\
=& \frac{A(j\omega+1) + B(j\omega+4)}{(j\omega+4)(j\omega+1)} \\
=& \frac{j\omega(A+B) + A + 4B}{(j\omega+4)(j\omega+1)} \Rightarrow \\
& \begin{cases} A + B = 0 \\ A + 4B = 1 \end{cases} \Rightarrow \\
& \begin{cases} A = -B \\ -B + 4B = 1 \end{cases} \Rightarrow \\
& \begin{cases} A = -B \\ 3B = 1 \end{cases} \Rightarrow \\
& \begin{cases} B = \frac{1}{3} \\ A = -B = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \\
X(\omega) =& -\frac{1}{3}\frac{1}{j\omega+4} + \frac{1}{3}\frac{1}{j\omega+1} \Rightarrow \\
x(t) =& -\frac{1}{3}e^{-4t}u(t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t) \Rightarrow \\
h(t) =& -\frac{1}{3}e^{-4(t-4)}u(t-4) + \frac{1}{3}e^{-(t-4)}u(t-4)
\end{aligned}
$$

2ο Ερώτημα

Βάσει της υποδείξεως γ), προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
&H(\omega) = \frac{e^{-4j\omega}}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4} \Rightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{e^{-4j\omega}}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4} \Rightarrow \\
&Y(\omega)((j\omega)^2 + 5j\omega + 4) = e^{-4j\omega}X(\omega) \Rightarrow (j\omega)^2 Y(\omega) + 5j\omega Y(\omega) + 4Y(\omega) = e^{-4j\omega}X(\omega)
\end{aligned}
$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την υπόδειξη β) το αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας είναι ο μετασχηματισμός Fourier της παρακάτω ποσότητας

$$\frac{d^2y}{dt^2}y + 5\frac{dy}{dt} + 4y$$

ενώ, βάσει της υποδείξεως δ), το δεξιό μέλος είναι ο μετασχηματισμός Fourier της παρακάτω ποσότητας

$$x(t-4)$$

Αφου οι μετασχηματισμοί Fourier της ισότητας είναι ίσοι, τότε και οι συναρτήσεις, εκ των οποίων προέρχονται είναι ίσες, οπότε η αρχική διαφορική εξίσωση είναι:

$$\frac{d^2y}{dt^2}y + 5\frac{dy}{dt} + 4y = x(t-4)$$

3ο Θέμα

Βρείτε αν τα παρακάτω σήματα είναι ενέργειας, ισχύος ή τίποτε εκ των δύο:

(α) $x(t) = \dfrac{1}{\sqrt{at^2+1}},\ t \in \mathbb{R},\ a > 0$

(β) $x(n) = \dfrac{u(n)}{\sqrt{n}}, n \geq 1$

- Υπόδειξη: α) $x(t) \Rightarrow E_x = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$, β)$x(n) \Rightarrow E_x = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$, γ) $x(t) \Rightarrow P_x = \displaystyle\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$, δ)$x(n) \Rightarrow P_x = \displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$, ε) $\infty \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2+1} dt = \pi$, στ) $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i} \approx \ln N + \gamma$

Λύση 3ου Θέματος

1ο Ερώτημα

$$\begin{aligned}
E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \Rightarrow \\
E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{at^2+1}}\right)^2 dt \Rightarrow \\
E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{at^2+1} dt \xRightarrow[du=dt\sqrt{a}]{u=t\sqrt{a}} \\
E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2+1} \frac{du}{\sqrt{a}} \\
E_x &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2+1} du \\
E_x &= \frac{1}{\sqrt{a}} \pi \\
E_x &= \frac{\sqrt{a}}{a} \pi < \infty
\end{aligned}$$

Άρα, το σήμα είναι ενεργειακό.

2ο Ερώτημα

$$
\begin{aligned}
E_x &= \sum_{-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \Rightarrow \\
E_x &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{u(n)}{\sqrt{n}}\right)^2 \Rightarrow \\
E_x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Πρόκειται για την αρμονική σειρά η οποία δεν έχει άθροισμα μηδενικό οπότε αφού $E_x = 0$, δεν είναι το σήμα $x(n)$ ενεργειακό. Τώρα εξετάζομε την ισχύ.

$$
\begin{aligned}
P_x &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-n=N}^{N} |x(n)|^2 \Rightarrow \\
P_x &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{u(n)}{\sqrt{n}}\right)^2 \Rightarrow \\
P_x &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \xRightarrow{\text{υπόδειξη στ)}} \\
P_x &\approx \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} (\ln N + \gamma) \\
P_x &\approx \lim_{N\to\infty} \frac{\ln N + \gamma}{2N+1} \xRightarrow{\frac{\infty}{\infty}} \\
P_x &\approx \lim_{N\to\infty} \frac{(\ln N + \gamma)'}{(2N+1)'} \\
P_x &\approx \lim_{N\to\infty} \frac{(\ln N)' + (\gamma)'}{2(N)' + 1'} \\
P_x &\approx \lim_{N\to\infty} \frac{\frac{1}{N} + 0}{2 \cdot 1 + 0} \\
P_x &\approx \lim_{N\to\infty} \frac{\frac{1}{N}}{2} \\
P_x &\approx \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \\
P_x &\approx 0
\end{aligned}
$$

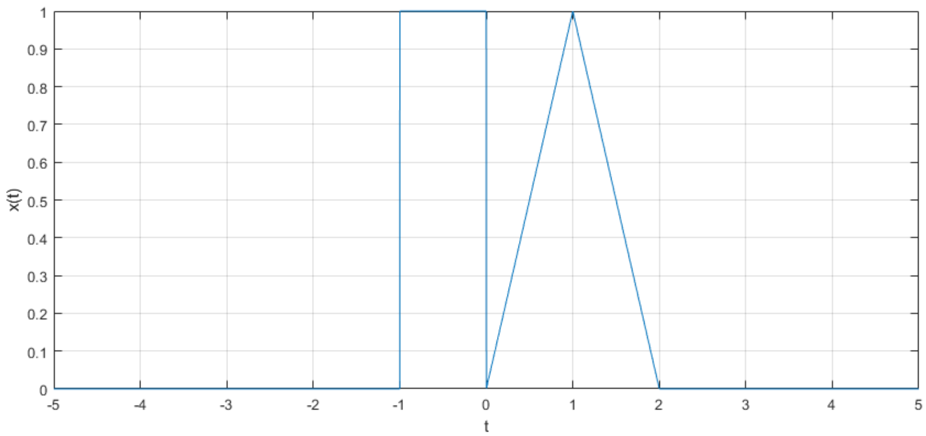
Αφού η ισχύς του σήματος P_x είναι μηδενική, τότε το σήμα δεν είναι ισχύος.

4ο Θέμα

Έστω σήμα $x(t)$ του οποίου η γραφική παράσταση είναι στην επόμενη σελίδα.

(α) Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των σημάτων $x(-t/2)$, $2x(2-t)$, $\frac{1}{4}x(3t-1)$

(β) Βρείτε με γραφικό τρόπο την συνέλιξη $x(t) * u(t)$



Λύση 4ου Θέματος

1ο Ερώτημα

Το σήμα είναι

$$x(t) = \begin{cases} 1, \ -1 < t < 0 \\ t, \ 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, \ 1 < t \leq 2 \\ 0, \ \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παρακάτω βρίσκομε τα ζητούμενα σήματα:

- Σήμα $x(-t/2)$:

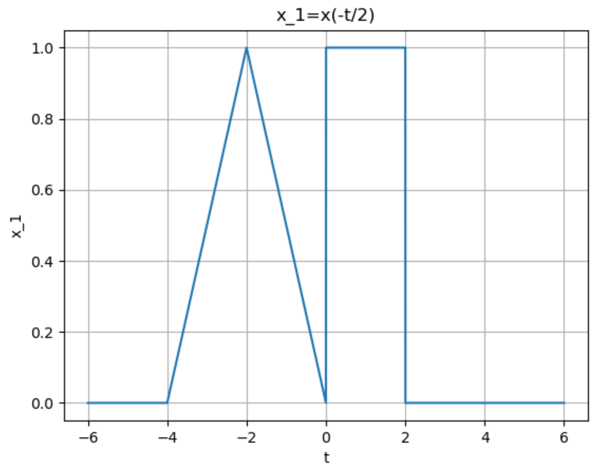
$$x(t) = \begin{cases} 1, \ -1 < t < 0 \\ t, \ 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, \ 1 < t \leq 2 \\ 0, \ \text{αλλιώς} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x(-t/2) = \begin{cases} 1, \ -1 < -t/2 < 0 \\ -t/2, \ 0 \leq -t/2 \leq 1 \\ 2-(-t/2), \ 1 < -t/2 \leq 2 \\ 0, \ \text{αλλιώς} \end{cases} \Rightarrow$$

$$= \begin{cases} 1, \ -2 < -t < 0 \\ -t/2, \ 0 \leq -t \leq 2 \\ 2+t/2, \ 2 < -t \leq 4 \\ 0, \ \text{αλλιώς} \end{cases} \Rightarrow$$

$$= \begin{cases} 1, \ 0 < t < 2 \\ -t/2, \ -2 \leq t \leq 0 \\ 2+t/2, \ -4 < t \leq -2 \\ 0, \ \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παρακάτω είναι η γραφική παράσταση του παραπάνω σήματος:



- Σήμα $2x(2-t)$:

$$x(t) = \begin{cases} 1, \ -1 < t < 0 \\ t, \ 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t, \ 1 < t \leq 2 \\ 0, \ \text{αλλιώς} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x(2-t) = \begin{cases} 1, \ -1 < 2-t < 0 \\ 2-t, \ 0 \leq 2-t \leq 1 \\ 2-(2-t), \ 1 < 2-t \leq 2 \\ 0, \ \text{αλλιώς} \end{cases} \Rightarrow$$

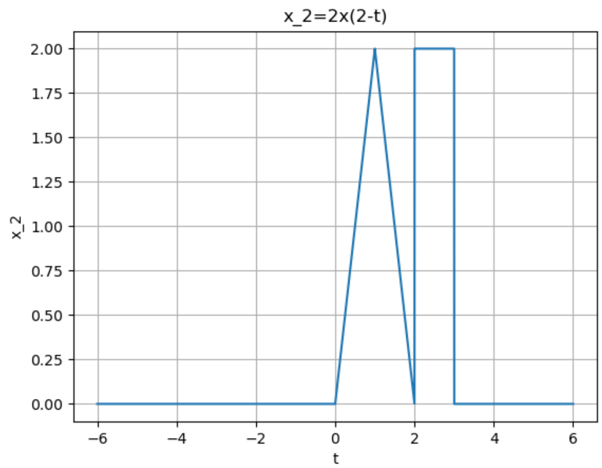
$$= \begin{cases} 1, \ -3 < -t < -2 \\ 2-t, \ -2 \leq -t \leq -1 \\ 2-2+t, \ -1 < -t \leq 0 \\ 0, \ \text{αλλιώς} \end{cases} \Rightarrow$$

$$= \begin{cases} 1, \ 2 < t < 3 \\ 2-t, \ 1 \leq t \leq 2 \\ t, \ 0 < -t \leq 1 \\ 0, \ \text{αλλιώς} \end{cases} \Rightarrow$$

$$2x(2-t) = 2 \cdot \begin{cases} 1, \ 2 < t < 3 \\ 2-t, \ 1 \leq t \leq 2 \\ t, \ 0 < -t \leq 1 \\ 0, \ \text{αλλιώς} \end{cases} \Rightarrow$$

$$2x(2-t) = \begin{cases} 2,\ 2 < t < 3 \\ 4-2t,\ 1 \leq t \leq 2 \\ 2t,\ 0 < -t \leq 1 \\ 0,\ \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παρακάτω είναι η γραφική παράσταση του παραπάνω σήματος:



- Σήμα $\frac{1}{4}x(3t-1)$:

$$x(t) = \begin{cases} 1,\ -1 < t < 0 \\ t,\ 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t,\ 1 < t \leq 2 \\ 0,\ \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$x(3t-1) = \begin{cases} 1,\ -1 < 3t-1 < 0 \\ 3t-1,\ 0 \leq 3t-1 \leq 1 \\ 2-(3t-1),\ 1 < 3t-1 \leq 2 \\ 0,\ \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

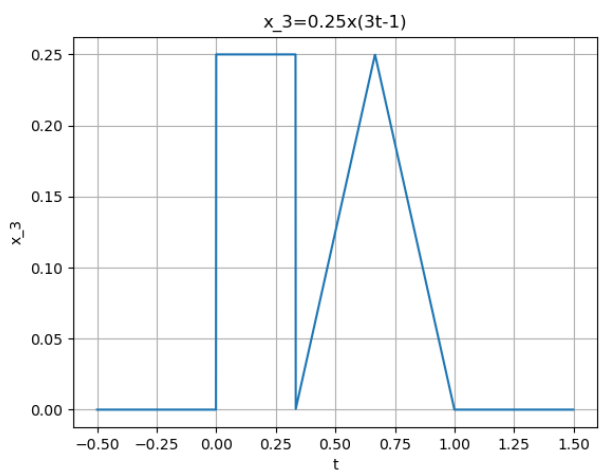
$$= \begin{cases} 1,\ 0 < 3t < 1 \\ 3t-1,\ 1 \leq 3t \leq 2 \\ 2-3t+1,\ 2 < 3t \leq 3 \\ 0,\ \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$= \begin{cases} 1,\ 0 < t < 1/3 \\ 3t-1,\ 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ 3-3t,\ 2/3 < t \leq 1 \\ 0,\ \text{αλλιώς} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}x(3t-1) = \frac{1}{4} \cdot \begin{cases} 1,\ 0 < t < 1/3 \\ 3t-1,\ 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ 2-(3t-1),\ 2/3 < t \leq 1 \\ 0,\ \text{αλλιώς} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}x(3t-1) = \begin{cases} 1/4,\ 0 < t < 1/3 \\ 3t/4-1/4,\ 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ 3/4-3t/4,\ 2/3 < t \leq 1 \\ 0,\ \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Παρακάτω είναι η γραφική παράσταση του παραπάνω σήματος:



2ο Ερώτημα

Παρακάτω αναλύεται ο τύπος της συνελίξεως:

$$\begin{aligned} x * u &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot x(t-\tau)d\tau + \int_{0}^{\infty} 1 \cdot x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{0}^{\infty} x(t-\tau)d\tau \xRightarrow[dz=d(t-\tau)=-d\tau]{z=t-\tau} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x * u &= \int_{t-0}^{t-\infty} x(z)(-dz) \\
&= \int_{t}^{-\infty} x(z)(-dz) \\
&= -\int_{t}^{-\infty} x(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{t} x(z)dz
\end{aligned}
$$

Εδώ έχομε τις εξής περιπτώσεις:

- $t \leq -1$: Επειδή $\forall z \in (-\infty, t)$ θα ισχύει $x(z) = 0$, τότε το παραπάνω ολοκλήρωμα θα είναι ίσο με 0.
- $-1 < t \leq 0$: Εδώ ισχύει:

$$
\begin{aligned}
x * u &= \int_{-\infty}^{t} x(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{-1} 0dz + \int_{-1}^{t} 1dz \\
&= [z]_{-1}^{t} \\
&= [t-(-1)] \\
&= t+1
\end{aligned}
$$

- $0 < t \leq 1$: Εδώ ισχύει:

$$
\begin{aligned}
x * u &= \int_{-\infty}^{t} x(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{-1} 0dz + \int_{-1}^{0} 1dz + \int_{0}^{t} zdz \\
&= [z]_{-1}^{0} + \left[z^2\right]_{0}^{t} \\
&= [0-(-1)] + \left[t^2 - 0^2\right] \\
&= 1 + t^2
\end{aligned}
$$

- $1 < t \leq 2$: Εδώ ισχύει:

$$
\begin{aligned}
x * u &= \int_{-\infty}^{t} x(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{-1} 0dz + \int_{-1}^{0} 1dz + \int_{0}^{1} zdz + \int_{1}^{t} (2-z)dz \\
&= [z]_{-1}^{0} + \left[z^2\right]_{0}^{1} + \left[2z - z^2\right]_{1}^{t}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [0-(-1)] + \left[1^2 - 0^2\right] + \left[(2t-t^2) - (2-1^2)\right] \\
&= 1 + 1 + 2t - t^2 - 1 \\
&= 1 + 2t - t^2
\end{aligned}
$$

- $t > 2$: Εδώ ισχύει:

$$
\begin{aligned}
x * u &= \int_{-\infty}^{t} x(z)dz \\
&= \int_{-\infty}^{-1} 0dz + \int_{-1}^{0} 1dz + \int_{0}^{1} zdz + \int_{1}^{2} (2-z)dz + \int_{2}^{t} 0dz \\
&= [z]_{-1}^{0} + \left[z^2\right]_0^1 + \left[2z - z^2\right]_1^2 \\
&= [0-(-1)] + \left[1^2 - 0^2\right] + \left[(2\cdot 2 - 2^2) - (2-1^2)\right] \\
&= 1 + 1 - 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Συνοψίζοντας, προκύπτει ότι

$$
x * u = \begin{cases} 0,\ t \leq -1 \\ t+1,\ -1 < t \leq 0 \\ 1 + t^2,\ 0 < t \leq 1 \\ 1 + 2t - t^2,\ 1 < t \leq 2 \\ 1,\ t > 2 \end{cases}
$$

5ο Θέμα

Ενα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα περιγράφεται από την παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$
\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2\frac{d}{dt} y(t) = -ay(t) + x(t)
$$

(α) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

(β) Βρείτε το εύρος τιμών της παραμέτρου a που οδηγούν σε ευσταθές σύστημα.

- Υπόδειξη: α) $y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(s) = X(s)H(s),\ R_y = R_x \cap R_h$

Λύση 5ου Θέματος

1ο Ερώτημα

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2\frac{d}{dt} y(t) &= -\,ay(t) + x(t) \Rightarrow \\
\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2\frac{d}{dt} y(t) + ay(t) &= x(t) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s^2Y(s)+2sY(s)+aY(s) =& X(s) \Rightarrow \\
(s^2+2s+a)Y(s) =& X(s) \Rightarrow \\
Y(s) =& X(s)\frac{1}{(s^2+2s+a)} \xrightarrow{\text{υπόδειξη α)}} \\
H(s) =& \frac{1}{(s^2+2s+a)}
\end{aligned}
$$

Η συνάρτηση μεταφορά έχει 2 πόλους $x_1,\ x_2$, ήτοι 2 σημεία στα οποία δεν ορίζεται ο μετασχηματισμός laplace λόγω μηδενισμού του παρωνομαστή. Δεδομένου ότι το σύστημα είναι αιτιατό, τότε η περιοσχή συγκλίσεως είναι $\{s : \mathfrak{Re}[s] > \max(\mathfrak{Re}[x_1], \mathfrak{Re}[x_2])\}$, δηλαδή είναι δεξιά του δεξιότερου πόλου.

2ο Ερώτημα

Για να είναι ευσταθές το σύστημα, πρέπει ο φανταστικός άξονας να ανήκει στην περιοχή συγκλίσεως της συναρτήσεως μεταφοράς.

$$
s^2+2s+a=0 \Rightarrow s=\frac{-2\pm\sqrt{\Delta}}{2}
$$

όπου $\Delta = 2^2 - 4\cdot a = 4-4a$. Εδώ έχομε τα εξής σενάρια:

- $\Delta \geq 0 \Rightarrow 4-4a \geq 0 \Rightarrow 4a \leq 4 \Rightarrow a \leq 1$. Τότε η μεγιστη ρίζα είναι:

  $$
  s=\frac{-2+\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{-2+\sqrt{4-4a}}{2}=\frac{-2+2\sqrt{1-a}}{2}=-1+\sqrt{1-a}
  $$

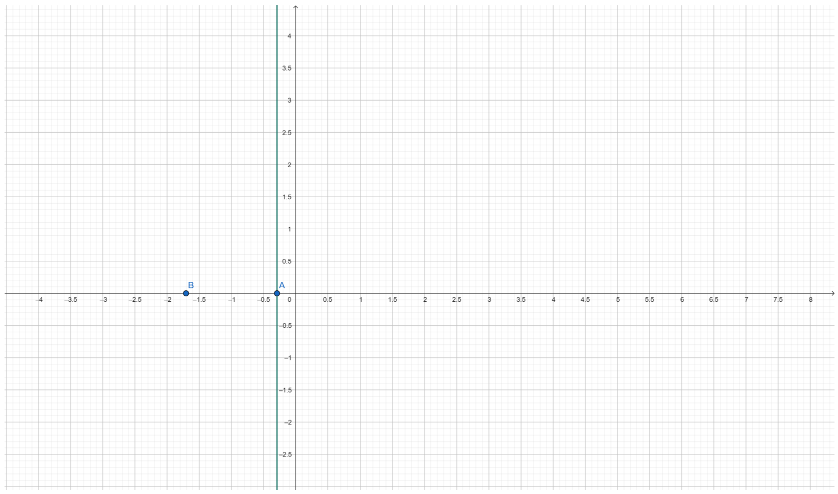
  Αυτή η ρίζα πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση του 0 προκειμένου να ο φανταστικός άξονας να είναι εντός της περιοχής συγκλίσεως της συναρτήσεως μεταφοράς (1).

  $$
  \begin{aligned}
  -1+\sqrt{1-a} &\leq 0 \Rightarrow \\
  \sqrt{1-a} &\leq 1 \Rightarrow \\
  \left(\sqrt{1-a}\right)^2 &\leq 1^2 \Rightarrow \\
  1-a \leq 1 &\Rightarrow \\
  -a &\leq 0 \\
  a &\geq 0
  \end{aligned}
  $$

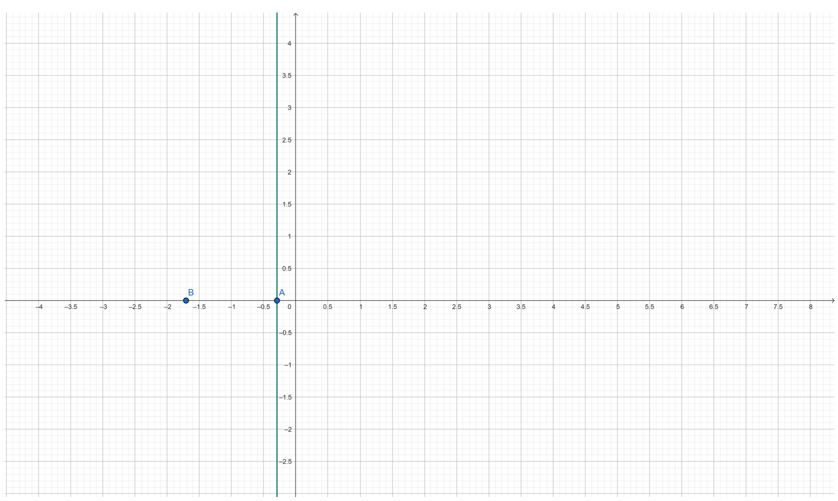
  Άρα στην περίπτωση των πραγματικών πόλων θα πρέπει να ισχύει $0 \leq a \leq 1$

- $\Delta < 0 \Rightarrow 4-4a < 0 \Rightarrow 4a > 4 \Rightarrow a > 1$. Τότε έχομε 2 ρίζες συζυγείς, $s=-1\pm\sqrt{|1-a|}$ που έχουν πραγματικό μέρος ίσο με -1. Στην εικόνα 2, έχομε τους 2 μιγαδικούς πόλους ($A = (-1, \sqrt{|1-a|}), B = (-1, -\sqrt{|1-a|})$. Ομοίως, η περιοχή συγκλίσεως είναι δεξιά της ευθείας που διέρχεται των πόλων προκειεμένου να συμπεριλαμβάνει το δεξιο ημιεπίπεδο και να είναι αιτιατό το ΓΧΑ σύστημα. Όπως βλέπομε περιέχει και τον φανταστικό, οπότε είναι και ευσταθές το σύστημα.

Συνοψίζοντας, προκειμένου το εν λόγω αιτιατό ΓΧΑ σύστημα να είναι ευσταθές, πρέπει να ισχύει $a \geq 0$.



Σχήμα 1: Περίπτωση με $a = 0.5$. Η περιοχή συγκλίσεως είναι δεξιά της ευθείας που διέρχεται του σημείου $A = (-1+\sqrt{1-a}, 0$ προκειεμένου να συμπεριλαμβάνει το δεξιο ημιεπίπεδο και να είναι αιτιατό το ΓΧΑ σύστημα. Όπως βλέπομε περιέχει και τον φανταστικό, οπότε είναι και ευσταθές το σύστημα



Σχήμα 2: Περίπτωση με $a = 3$

.

6ο Θέμα

Δεδομένης της παρακάτω διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 12\frac{dx(t)}{dt} + 37x(t) = 10e^{-4t}u(t),\ x(0) = 4,\ x'(0) = 0 \tag{1}$$

Χωρίς να βρείτε το αρχικό σήμα $x(t)$ υπολογίστε τις παρακάτω ποσότητες:

(α) μονόπλευρο Laplace του σήματος $g(t) = \int_{-\infty}^{t} x(4\tau)d\tau$

(β) μονόπλευρο Laplace του σήματος $k(t) = [x(t-4)]''$

- Υπόδειξη: α) $\mathcal{ML}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a},\ \mathfrak{Re}[s] > -a$, β) $\mathcal{ML}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s} + \int_{-\infty}^{0} x(\tau)d\tau,\ R \cap \{s:\ \mathfrak{Re}[s] > 0\}$, γ) $\int_{-\infty}^{0} x(t)dt = 0$, δ) $\mathcal{ML}\{x(t-t_0)\} = e^{-st_0}X(s)$ με ίδια περιοχή σύγκλισης, ε) $\mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)$ με ίδια περιοχή σύγκλισης, στ)$\mathcal{ML}\{x(t)\} = X(s),\ \sigma_1 < \mathfrak{Re}[s] < \sigma_2 \Rightarrow \mathcal{ML}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right),\ \frac{\sigma_1}{a} < \mathfrak{Re}[s] < \frac{\sigma_2}{a}$

Λύση 6ου Θέματος

Αρχικά, χρησιμοποιούμε τον μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace στην διαφορική εξίσωση για να βρούμε τον μονόπλευρο μετασχηματισμό του σήματος $x(t)$.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 12\frac{dx(t)}{dt} + 37x(t) =& 10e^{-4t}u(t) \Rightarrow \\
\mathcal{ML}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 12\frac{dx(t)}{dt} + 37x(t)\right\} =& \mathcal{ML}\left\{10e^{-4t}u(t)\right\} \Rightarrow \\
\mathcal{ML}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} + 12\mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + 37\mathcal{ML}\{x(t)\} =& 10\mathcal{ML}\left\{e^{-4t}u(t)\right\} \xRightarrow{\text{υπόδειξη α)}} \\
\mathcal{ML}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} + 12\mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + 37X(s) =& 10\frac{1}{s+4},\ \mathbb{R}e[s] > -4
\end{aligned}$$

Βάσει της υποδείξεως ε), προκύπτουν τα εξής:

- $$\begin{aligned}
\mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= s\mathcal{ML}\{x(t)\} - x(0) \\
&= sX(s) - 4
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\mathcal{ML}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} &= s\mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} - x'(0)\\ &= s(sX(s)-4)-0\\ &= s^2X(s)-4s\end{aligned}$$

Κατά συνέπειαν, προκύπτει ότι:

$$\mathcal{ML}\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} + 12\mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + 37X(s) = 10\frac{1}{s+4},\ \mathbb{R}e[s] > -4 \Rightarrow \tag{2}$$

$$\left(s^2X(s)-4s\right) + 12\left(sX(s)-4\right) + 37X(s) = 10\frac{1}{s+4},\ \mathbb{R}e[s] > -4 \Rightarrow \tag{3}$$

$$s^2X(s) - 4s + 12sX(s) - 48 + 37X(s) = 10\frac{1}{s+4},\ \mathbb{R}e[s] > -4 \Rightarrow \tag{4}$$

$$\left(s^2+12s+37\right)X(s) - 4s - 48 = \frac{10}{s+4},\ \mathbb{R}e[s] > -4 \Rightarrow \tag{5}$$

$$\left(s^2+12s+37\right)X(s) = 4s + 48 + \frac{10}{s+4},\ \mathbb{R}e[s] > -4 \Rightarrow \tag{6}$$

$$X(s) = \frac{4s}{s^2+12s+37} + \frac{48}{s^2+12s+37} + \frac{10}{(s+4)(s^2+12s+37)},\ \mathbb{R}e[s] > -4 \Rightarrow \tag{7}$$

$$X(s) = \frac{4s}{(s+6)^2+1} + \frac{48}{(s+6)^2+1} + \frac{10}{(s+4)((s+6)^2+1)},\ \mathbb{R}e[s] > -4 \Rightarrow \tag{8}$$

$$X(s) = \frac{s^2+64s+202}{(s+4)((s+6)^2+1)},\ \mathbb{R}e[s] > -4 \Rightarrow \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

Ο λόγος που η περιοχή συγκλίσεως είναι αυτή είναι ο εἡς Από (5) βλέπομε ότι για να είναι ίσοι οι μετασχηματισμοί Laplace εκατέρωθεν της ισότητα, θα πρέπει να ισχύει οτι να έχουν και ίδια περιοχή συγκλίσεως. Οι μετασχηματισμοί Laplaceπου είναι πολυώνυμα έχουν περιοχή συγκλίσεως όλο το μιγαδικό χώρο. Άρα θα πρέπει το ίδιο το $X(s)$ να έχει περιοχή συγκλίσεως $\mathbb{R}e[s] > -4$.

1ο Ερώτημα

Αρχικά βρίσκομε τον μετασχηματισμό Laplace του $x(4t)$, ο οποίος, βάσει τη υποδείξεως στ) είναι

$$\mathcal{ML}\left\{x(4t)\right\} = \frac{1}{|4|}X\left(\frac{s}{4}\right),\ \mathbb{R}e[s] > -4/4 = -1$$

Έπειτα για την εύρεση του μετασχηματισμού Laplace του $g(t) = \int_{-\infty}^{t} x(4\tau)d\tau$, χησιμοποιούμε τις υποδείξει β), γ) οπότε ισχύει

$$G(s) = \frac{1}{s}\mathcal{ML}\left\{x(4t)\right\} + \int_{-\infty}^{0} x(4\tau)d\tau,\ \mathbb{R}e[s] > -1$$

Παρακάτω υπολογίζομε το παραπάνω ολοκλήρωμα (θέτοντας $u = 4\tau \Leftrightarrow du = 4d\tau$):

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} x(4\tau)d\tau =& \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0} x(u)du \\ =& \frac{1}{4}0 \\ =& 0\end{aligned}$$

οπότε

$$G(s) = \frac{1}{4s}X\left(\frac{s}{4}\right),\ \mathbb{R}e[s] > -1$$

2ο Ερώτημα

Έστω $p(t) = x(t-4)$. Επειδή η $x(t)$ έχει αρχικές συνθήκες, τότε θα ισχύει ότι $x(t) = x'(t) = 0,\ \forall t < 0$.

$$\begin{aligned}k(t) &= [x(t-4)]'' \\ &= [p(t)]'' \Rightarrow \\ K(s) &= \mathbb{ML}\left\{[p(t)]''\right\} \\ &= s\mathbb{ML}\left\{[p(t)]'\right\} - p'(0) \\ &= s(s\mathbb{ML}\left\{p(t)\right\} - p(0)) - p'(0) \xRightarrow[p'(0)=x'(0-4)=x'(-4)=0]{p(0)=x(0-4)=x(-4)=0} \\ &= s^2\mathbb{ML}\left\{p(t)\right\}\end{aligned}$$

Όμως $p(t) = x(t-4) \xRightarrow{\text{υπόδειξη δ)}} \mathbb{ML}\left\{p(t)\right\} = e^{-4s}X(s),\ \mathbb{R}e[s] > -4$, οπότε θα ισχύει:

$$K(s) = s^2 e^{-4s}X(s),\ \mathbb{R}e[s] > -4$$