1ο Σετ Ασκήσεων στα Σήματα και Συστήματα

1η Άσκηση

Να υπολογίσετε την περίοδο των παρακάτω σημάτων:

- $x(t) = \sin^3(2t+3)$
- $x(t) = |\sin(t) + \cos(t)|$

Υπόδειξη: $A \cdot \cos(\theta) + B \cdot \sin(\theta) = C \cdot \cos(\theta + \phi),\ C = sgn(A)\sqrt{A^2+B^2},\ \phi = \arctan(-B/A)$

Λύση 1ης Άσκησης

Ερώτημα 1ο

Γενικά, ισχύει $\sin^3(\theta) = \dfrac{3\sin(\theta) - \sin(3\theta)}{4} \Rightarrow x(t) = \dfrac{3\sin(2t+3) - \sin(3(2t+3))}{4} = \dfrac{3\sin(2t+3) - \sin(6t+9)}{4}$, οπότε, συμπεραίνομε ότι αφού το σήμα $x(t)$ είναι άθροισμα περιοδικών σημάτων, τότε και το ίδιο το $x(t)$ είναι περιοδικό. Η περίοδός του βρίσκεται ως εξής:

1. Καταρχάς, υπολογίζομε τις περιόδους των επιμέρους σημάτων: το σήμα $\sin(2t+3)$ έχει συχνότητα $\omega = 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, ενώ το σήμα $\sin(6t+9)$ έχει συχνότητα $\omega = 6 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$
2. Βρίσκομε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των 2 περιόδων. Επειδή, πρόκειται για μη ακεραίους αριθμούς, και αφού ο μικρότερος αριθμός είναι ο $\dfrac{\pi}{3}$, διαιρούμε και τις δυο περιόδουςς με τον $\dfrac{\pi}{3}$, τότε οι περίοδοι $\dfrac{\pi}{3},\ \pi$, αντιστοιχούνται με τους αριθμούς $1,\ 3$, των οποίων το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο. είναι ο αριθμός 3. Αυτόν, τον πολλαπλασιάζομε με το $\pi/3$ και προκύπτει ο αριθμός π που είναι αφενός το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των 2 αρχικών περιόδων και, αφετέρου, η περίοδος του αρχικού σήματος $x(t)$.

Ερώτημα 2ο

Ισχύει $x(t) = |\sin(t) + \cos(t)| = |1 \cdot \sin(t) + 1 \cdot \cos(t)|$, οπότε, βάσει της υποδείξεως, προκύπτει ότι:

$$x(t) = \left| sgn(1)\sqrt{1^2+1^2}\cos\left(t + \arctan\left(-\frac{1}{1}\right)\right)\right| = \left|\sqrt{2}\cos\left(t + \arctan\left(-1\right)\right)\right|$$

ή αλλιως

$$x(t)=\sqrt{2}\left|\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

Η θεμελιώδη περίοδος T είναι ο αριθμός για τον οποίον ισχύει:

$$x(t+T)=x(t),\ \forall t\in\mathbb{R}$$

οπότε προσπαθούμε να λύσομε την παραπάνω εξίσωση ως προς T.

$x(t+T)=x(t),\ \forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow\sqrt{2}\left|\cos\left(t+T-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\sqrt{2}\left|\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right|\Rightarrow\left|\cos\left(t+T-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\left|\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right|\Rightarrow\cos\left(t+T-\frac{\pi}{4}\right)=\begin{cases}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\\-\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$

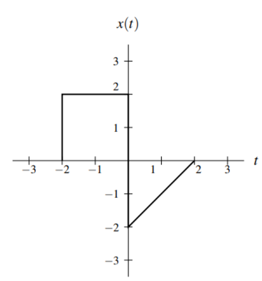
Για την 1η περίπωση ισχύει, $\cos\left(t+T-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t+T-\frac{\pi}{4}=\begin{cases}2k\pi+\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\\2k\pi-\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}\Rightarrow$ $t+T-\frac{\pi}{4}=\begin{cases}2k\pi+t-\frac{\pi}{4}\\2k\pi-t+\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow T=\begin{cases}2k\pi\\2k\pi-2t+\frac{2\pi}{4}\end{cases}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$, όπου κρατούμε την 1η περίπτωση $T=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Για την 2η περίπωση ισχύει, $\cos\left(t+T-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\cos\left(t+T-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right)\Rightarrow$ $\cos\left(t+T-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{4}-t\right)\Rightarrow t+T-\frac{\pi}{4}=\begin{cases}2k\pi+\left(\frac{5\pi}{4}-t\right)\\2k\pi-\left(\frac{5\pi}{4}-t\right)\end{cases}\Rightarrow t+T-\frac{\pi}{4}=\begin{cases}2k\pi+\frac{5\pi}{4}-t\\2k\pi-\frac{5\pi}{4}+t\end{cases}\Rightarrow$ $T=\begin{cases}2k\pi+\frac{6\pi}{4}-2t\\2k\pi-\pi\end{cases}$, $k\in\mathbb{Z}$, όπου κρατούμε την 1η περίπτωση $T=2k\pi-\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Για $k=1$, στην πρώτη περίπτωση έχομε $T=2\cdot1\cdot\pi=2\pi$, ενώ στην δεύτερη περίπτωση έχομε $T=2\cdot1\cdot\pi-\pi=2\pi-\pi=\pi$. Στην περιπτωσή μας, διατηρούμε την μικρότερη δυνατή τιμή η οποία είναι π, οπότε η περίοδος είναι $T=\pi$.

2η Άσκηση

Δεδομένης της γραφικής παράστασης (Εικ. 1), σχεδιάστε τα σήματα $x(-t)$, $\frac{1}{4}x\left(-\frac{t}{2}+1\right)$, $x\left(2t-3\right)$



Σχήμα 1: $x(t)$

Λύση 2ης Άσκησης

Το αρχικό σήμα είναι άθροισμα των κάτωθι σημάτων:

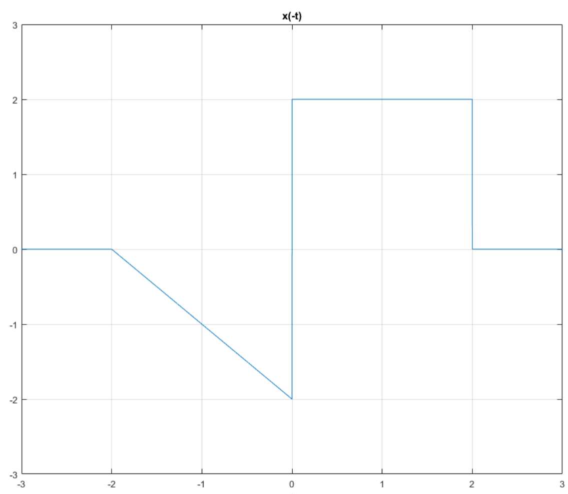
- Ενός ορθογώνιου παλμού πλάτους 2 στο $[-2,0]$
- Μία ευθείας ορισμένης υπό των σημείων $(0,-2),\ (2,0)$

$$x(t)=\begin{cases}2,\ -2<t<0\\ -2+t,\ 0\leq t2\\ 0,\ \text{αλλού}\end{cases}$$

Ερώτημα 1ο

Αντικαθιστώντας στο αρχικό σήμα όπου t με $-t$, προκύπτει $x(t)=\begin{cases}2,\ -2\leq t<0\\ -2-t,\ 0\leq t\leq 2\\ 0,\ \text{αλλού}\end{cases} \xRightarrow{x\leftarrow -t}$

$$x(-t)=\begin{cases}2,\ -2\leq -t<0\\ -2-t,\ 0\leq -t\leq 2\\ 0,\ \text{αλλού}\end{cases} \Rightarrow x(-t)=\begin{cases}2,\ -2\leq -t<0\\ -2-t,\ 0\leq -t\leq 2\\ 0,\ \text{αλλού}\end{cases} \Rightarrow x(-t)=\begin{cases}2,\ 0\leq t<2\\ -2-t,\ -2\leq t\leq 0\\ 0,\ \text{αλλού}\end{cases}$$



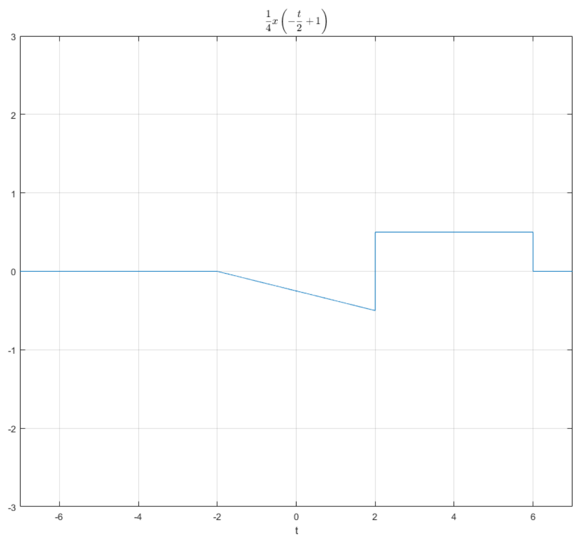
Σχήμα 2: $x(-t)$

Ερώτημα 2ο

Αντικαθιστώντας στο αρχικό σήμα όπου t με $-\frac{t}{2}+1$, προκύπτει $x(t) = \begin{cases} 2, \ -2 < t < 0 \\ -2 - \frac{t}{2} + 1, \ 0 \leq t < 2 \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases} \xRightarrow{x \leftarrow -\frac{t}{2}+1}$

$$x\left(-\frac{t}{2}+1\right) = \begin{cases} 2, \ -2 < -\frac{t}{2} + 1 < 0 \\ -2 - \frac{t}{2} + 1, \ 0 \leq -\frac{t}{2} + 1 < 2 \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow x\left(-\frac{t}{2}+1\right) = \begin{cases} 2, \ -3 < -\frac{t}{2} < -1 \\ -2 - \frac{t}{2} + 1, \ -1 \leq -\frac{t}{2} < 1 \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x\left(-\frac{t}{2}+1\right) = \begin{cases} 2, \ 2 < t < 6 \\ -2 - \frac{t}{2} + 1, \ -2 \leq t < 2 \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases}$$



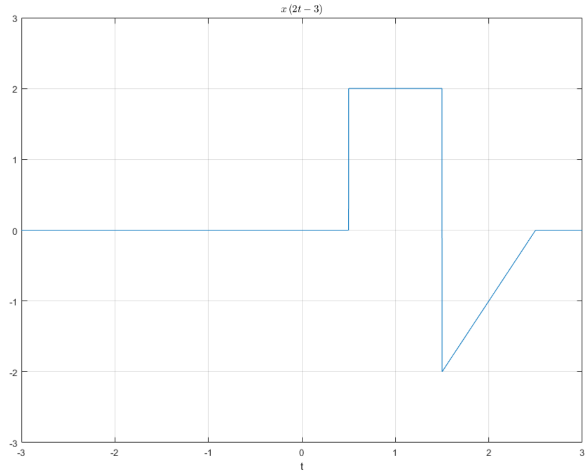
Σχήμα 3: $x\left(-\frac{t}{2}+1\right)$

Ερώτημα 3ο

Αντικαθιστώντας στο αρχικό σήμα όπου t με $2t-3$, προκύπτει $\begin{cases} 2, \ -2 < t < 0 \\ -2 + t, \ 0 \leq t < 2 \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases} \xRightarrow{t \leftarrow 2t-3}$

$$x(2t-3) = \begin{cases} 2, \ -2 < 2t - 3 < 0 \\ -2 + 2t - 3, \ 0 \leq 2t - 3 < 2 \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow x\left(\frac{t+2}{4}\right) = \begin{cases} 2, \ 1 < 2t < 3 \\ -2 + 2t - 3, \ 3 \leq t < 5 \\ 0, \ \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow x\left(\frac{t+2}{4}\right) =$$

$$\begin{cases} 2,\ 0.5 < t < 1.5 \\ 2t - 5,\ 1.5 \leq t < 2.5 \\ 0,\ \text{αλλού} \end{cases}$$



Σχήμα 4: $x\,(2t-3)$

3η Άσκηση

Να βρείτε αν τα παρακάτω σήματα είναι σήματα ενέργειας ή ισχύος:

- $x(t) = te^{-|t|}$
- $x(t) = \sqrt{t}u(t)$
- $x(n) = \dfrac{1}{4^n},\ n \geq 0$
- $x(n) = e^{10jn}u(n)$

Λύση 3ης Άσκησης

Ερώτημα 1ο

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |te^{-|t|}|^2 dt \Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 (e^{-|t|})^2 dt \Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-2|t|} dt \xRightarrow[t^2e^{-2|t|}]{(-t)^2e^{-2|-t|}=} \Rightarrow$$

$$E_x = 2\int_{0}^{\infty} t^2 e^{-2|t|} dt \Rightarrow E_x = 2\int_{0}^{\infty} t^2 e^{-2t} dt \Rightarrow E_x = -\int_{0}^{\infty} t^2(-2e^{-2t}) dt \Rightarrow E_x = -\int_{0}^{\infty} t^2 (e^{-2t})' dt \Rightarrow$$

$$E_x = -\left[\left[t^2 e^{-2t}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (t^2)' e^{-2t} dt\right] \Rightarrow E_x = -\left[\left[t^2 e^{-2t}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2te^{-2t} dt\right] \Rightarrow E_x = -\left[\left[t^2 e^{-2t}\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} t(-2e^{-2t}) dt\right.$$

$$E_x=-\left[\left[t^2e^{-2t}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}t(-2e^{-2t})dt\right]\Rightarrow E_x=-\left[\left[t^2e^{-2t}\right]_0^{\infty}+\int_0^{\infty}t\left(e^{-2t}\right)'dt\right]\Rightarrow$$
$$E_x=-\left[\left[t^2e^{-2t}\right]_0^{\infty}+\left[te^{-2t}\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}(t)'\,e^{-2t}dt\right]\Rightarrow E_x=-\left[\left[t^2e^{-2t}\right]_0^{\infty}+\left[te^{-2t}\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}e^{-2t}dt\right]\Rightarrow$$
$$E_x=-\left[\left[\lim_{t\to\infty}t^2e^{-2t}-0^2e^{-2\cdot 0}\right]+\left[\lim_{t\to\infty}te^{-2t}-0e^{-2\cdot 0}\right]-\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{\infty}\right]\Rightarrow$$
$$E_x=-\left[\lim_{t\to\infty}t^2e^{-2t}+\lim_{t\to\infty}te^{-2t}-\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{\infty}\right]\Rightarrow$$
$$E_x=-\left[\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^{2t}}+\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{2t}}+\left[\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{\infty}\right]\xRightarrow[Del'H\hat{o}pital]{\text{Χρήση του Θ.}}$$
$$E_x=-\left[\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{2e^{2t}}+\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2e^{2t}}+\left[\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^{\infty}\right]\Rightarrow$$
$$E_x=-\left[\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{2t}}+0+\frac{1}{2}\left[e^{-2t}\right]_0^{\infty}dt\right]\Rightarrow$$
$$E_x=-\left[\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{2t}}+0+\frac{1}{2}\left[\lim_{t\to\infty}e^{-2t}-e^{-2\cdot 0}\right]\right]\Rightarrow$$
$$E_x=-\left[0+0+\frac{1}{2}[0-1]\right]=\frac{1}{2}<\infty\Rightarrow,\text{ οπότε είναι σήμα ενέργειας (και άρα όχι ισχύος).}$$

Ερώτημα 2ο

$E_x=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt \Rightarrow E_x=\int_{-\infty}^{\infty}|\sqrt{t}u(t)|^2dt \Rightarrow E_x=\int_0^{\infty}tdt \Rightarrow E_x=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\infty} \Rightarrow E_x=\lim_{x\to\infty}\frac{t^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\infty-0=\infty$, οπότε δεν είναι σήμα ενέργειας.

$P_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt \Rightarrow P_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\sqrt{t}u(t)|^2dt \Rightarrow P_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_0^{T}tdt \Rightarrow P_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{T} \Rightarrow P_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left[\frac{T^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right] \Rightarrow P_x=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\frac{T^2}{2} \Rightarrow P_x=\lim_{T\to\infty}\frac{T}{4}=\infty$, οπότε το σήμα δεν είναι ισχύος.

Ερώτημα 3ο

$E_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 \Rightarrow E_x=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{1}{4^n}\right|^2 \Rightarrow E_x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^{2n}} \Rightarrow E_x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4^2)^n} \Rightarrow E_x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{16^n}$. Πρόκειται για ένα άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου της μορφής $a_n=a_0\cdot\lambda^n$, όπου $a_0=\left(\frac{1}{16}\right)^0=1,\ \lambda=\frac{1}{16}<1$, οπότε το άθροισμα συγκλίνει στην ποσότητα $\frac{a_0}{1-\lambda}=\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=\frac{1}{\frac{15}{16}}=\frac{16}{15}<\infty$, οπότε το σήμα είναι ενέργειας.

Ερώτημα 4ο

$E_x=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\left|e^{10jn}\right|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\left|e^{20jn}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}1=\infty$, οπότε δεν είναι σήμα ενέργειας.

Ισχύει $2^n > n,\ \forall n \geq 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2^n} < \dfrac{1}{n} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2^n}\right)^2 < \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{1}{2^{2n}} < \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow \dfrac{\ln n}{2^{2n}} < \dfrac{\ln n}{n^2},\ \forall n \geq 2.$

$dsP_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} \left|e^{10jn}\right|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} \left|e^{20jn}\right| = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}(N+1) = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2} < \infty$, οπότε είναι σήμα ισχύος

4η Άσκηση

Να υπολογιστούν οι παρακάτω συνελίξεις των συναρτήσεων:

- $x(t) = \Lambda(\nu t),\ h(t) = \Lambda\left(\dfrac{t}{\nu}\right),\ \nu \in \mathbb{N}$
- $x(n) = h(n) = \begin{cases} \frac{1}{N},\ 0 \leq n \leq N-1 \\ 0,\ \text{αλλού} \end{cases}$

Λύση 4ης Άσκησης

Ερώτημα 1ο

$y(t) = h(t) * x(t) \Rightarrow y(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \xRightarrow{\Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)=0,\ |t|>\nu}$
$y(t) = \displaystyle\int_{-\nu}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau$

Σε αυτήν την περίπτωση, ισχύει:

$$\Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right) = \begin{cases} 1+\frac{\tau}{\nu},\ -1 \leq \frac{\tau}{\nu} < 0 \\ 1-\frac{\tau}{\nu},\ 0 \leq \frac{\tau}{\nu} < 1 \\ 0,\ \text{αλλού} \end{cases}$$

ή αλλιώς:

$$\Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right) = \begin{cases} 1+\frac{\tau}{\nu},\ -\nu \leq \tau < 0 \\ 1-\frac{\tau}{\nu},\ 0 \leq \tau < \nu \\ 0,\ \text{αλλού} \end{cases}$$

Αντίστοιχα, ισχύει:

$$\Lambda\left(\nu(t-\tau)\right) = \begin{cases} 1+\nu(t-\tau),\ -1 \leq \nu(t-\tau) < 0 \\ 1-\nu(t-\tau),\ 0 \leq \nu(t-\tau) < 1 \\ 0,\ \text{αλλού} \end{cases}$$

ή αλλιώς:

$$\Lambda\left(\nu(t-\tau)\right) = \begin{cases} 1+\nu(t-\tau),\ -\frac{1}{\nu} \leq t-\tau < 0 \\ 1-\nu(t-\tau),\ 0 \leq t-\tau < \frac{1}{\nu} \\ 0,\ \text{αλλού} \end{cases}$$

Λύνοντας το τελευταίο ως προς τ, προκύπτει ότι:

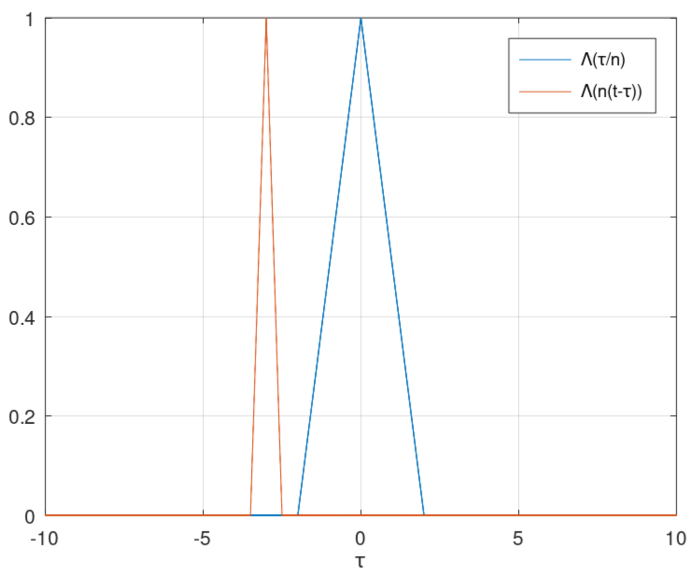
$$\Lambda\left(\nu(t-\tau)\right) = \begin{cases} 1+\nu(t-\tau), & -\frac{1}{\nu}-t \leq -\tau < -t \\ 1-\nu(t-\tau), & -t \leq -\tau < \frac{1}{\nu}-t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

ή αλλιώς:

$$\Lambda\left(\nu(t-\tau)\right) = \begin{cases} 1+\nu(t-\tau), & t \leq \tau < \frac{1}{\nu}+t \\ 1-\nu(t-\tau), & -\frac{1}{\nu}+t < \tau \leq t \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \tag{1}$$

Άρα η $\Lambda\left(\nu(t-\tau)\right)$ είναι μη μηδενική στο διάστημα $\left(-\frac{1}{\nu}+t,\ \frac{1}{\nu}+t\right)$, το οποίο έχει μήκος $\frac{1}{\nu}+t-\left(-\frac{1}{\nu}+t\right)=\frac{2}{\nu}$ Υπάρχουν 7 περιπτώσεις:

1. Όπως βλέπομυ στην Εικ. 5, δεν υπάρχει επικάλυψη μεταξύ των 2 συναρτήσεων. Αυτό συμβαίνει, όταν $\frac{1}{\nu}+t \leq -\nu \Rightarrow t \leq -\frac{1}{\nu}-\nu$. Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει ότι $\Lambda(\nu t) * \Lambda\left(\frac{t}{\nu}\right)$=0



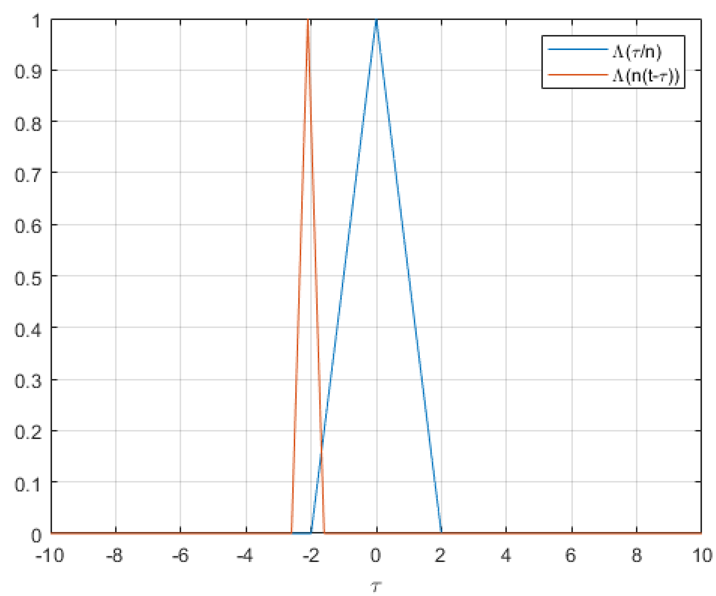
Σχήμα 5: 1η περίπτωση

2. Εδώ πρόκειται για μερική επικάλυψη με 2 υποπεριπτώσεις:

   (α΄) Ο άνω κλάδος της Εξ. 1 έχει μερικώς εισέλθει στο διάστημα $(-\nu, \nu)$ όπου η $\Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)$ είναι μη μηδενική, όπως φαίνεται στην Εικ.6. Τότε, θα ισχύουν οι εξής σχέσεις

$$\begin{cases} \frac{1}{\nu} + t > -\nu \\ t < -\nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > -\nu - \frac{1}{\nu} \\ t < -\nu \end{cases} \Rightarrow -\nu - \frac{1}{\nu} < t < -\nu. \text{ Τότε,}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\nu}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right) \Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\ &= \int_{-\nu}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right) \Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{\frac{1}{\nu}+t}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right) \Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\ &= \int_{-\nu}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right) \Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{\frac{1}{\nu}+t}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right) \cdot 0 d\tau \\ &= \int_{-\nu}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right) \Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\ &= \int_{-\nu}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right) \Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \end{aligned}$$



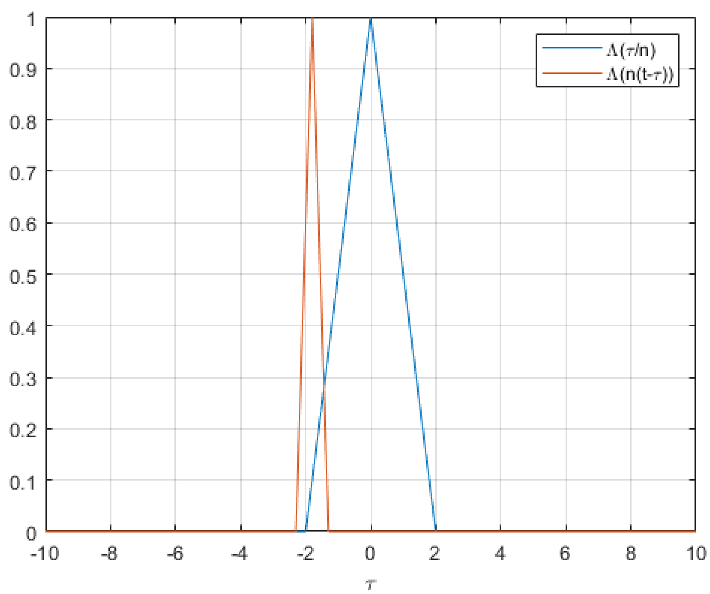
Σχήμα 6: 2η περίπτωση, 1η υποπερίπτωση

(β΄) Σε αυτήν την περίπτωση, έχομε μερική επικάλυψη όπου ο άνω κλάδος της Εξ. 1 έχει πλήρως εισέλθει, ενώ ο κάτω κλάδος έχει εισέλθει μερικώς στο διάστημα $(-\nu, \nu)$ όπου η $\Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)$ είναι μη μηδενική, όπως φαίνεται στην Εικ.7. Τότε, θα ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$\begin{cases} t \geq -\nu \\ t - \frac{1}{\nu} < -\nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq -\nu \\ t < -\nu + \frac{1}{\nu} \end{cases} \Rightarrow -\nu < t < -\nu + \frac{1}{\nu}.$$

Τότε,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\nu}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\nu}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{\frac{1}{\nu}+t}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\nu}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{\frac{1}{\nu}+t}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\cdot 0 d\tau \\
&= \int_{-\nu}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\nu}^{t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{t}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau
\end{aligned}
$$



Σχήμα 7: 2η περίπτωση, 2η υποπερίπτωση

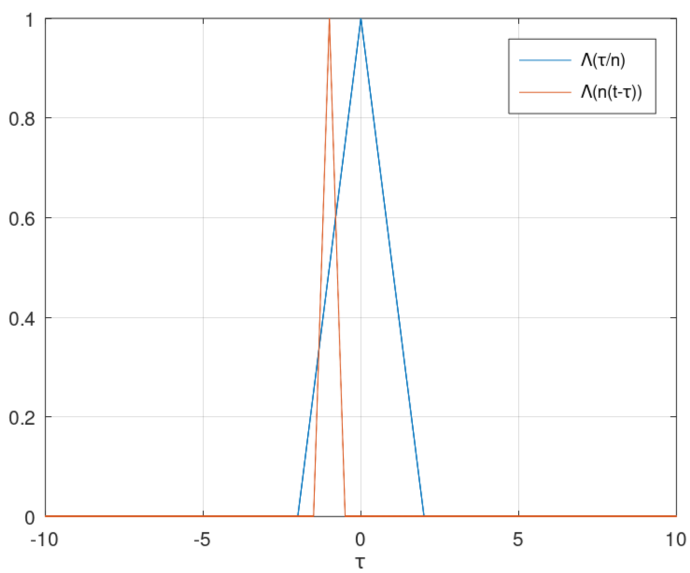
3. Πλέον, πρόκειται για πλήρη επικάλυψη, όπου υπάρχουν οι εξής υποπεριπτώσεις:

   (α΄) Το μηδενικό μέρος της Εξ. 1 βρίσκεται στο διάστημα $(-\nu, 0)$ (Εικ. 8), οπότε θα ισχύει:

$$
\begin{cases} -\frac{1}{\nu}+t \geq -\nu \\ \frac{1}{\nu}+t \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq -\nu+\frac{1}{\nu} \\ t \leq -\frac{1}{\nu} \end{cases} \Rightarrow -\nu+\frac{1}{\nu} \leq t \leq -\frac{1}{\nu}
$$

Τότε,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\nu}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\nu}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{\frac{1}{\nu}+t}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\nu}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{\frac{1}{\nu}+t}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\cdot 0 d\tau \\
&= \int_{-\nu}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\nu}^{t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{t}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\nu}^{t-\frac{1}{\nu}} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\cdot 0 d\tau + \int_{t-\frac{1}{\nu}}^{t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{t}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau
\end{aligned}
$$



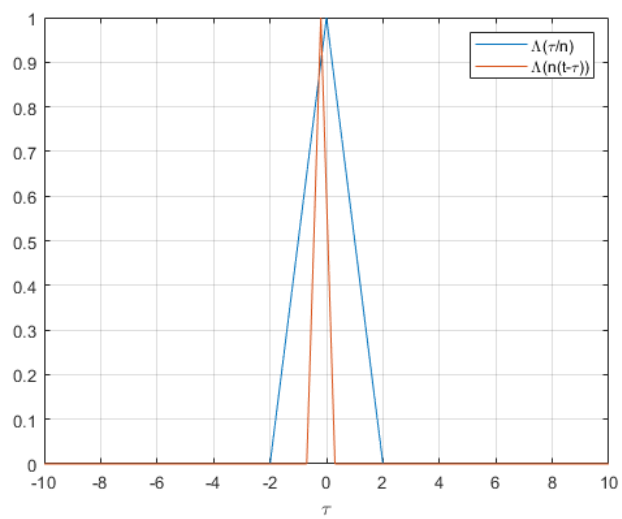
Σχήμα 8: 3η περίπτωση

(β΄) Ένα μικρό μέρος του μη μηδενικού μέρος της Εξ. 1 βρίσκεται στο διάστημα $(0,\ \nu)$ (Εικ. 9), οπότε θα ισχύει:
$$\begin{cases} 0 \le t + \frac{1}{\nu} < \nu \\ -\nu < t - \frac{1}{\nu} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{\nu} \le t < \nu - \frac{1}{\nu} \\ -\nu + \frac{1}{\nu} < t < \frac{1}{\nu} \end{cases} \Rightarrow \max\left(-\frac{1}{\nu},\ -\nu + \frac{1}{\nu}\right) < t < \min\left(\nu - \frac{1}{\nu},\ \frac{1}{\nu}\right) \Rightarrow$$

$-\dfrac{1}{\nu} < t < \dfrac{1}{\nu}$. Συγκεκριμένα, η Εικ. 9, αντιστοιχεί στην περίπτωση $-\dfrac{1}{\nu} < t \leq 0$.

Τότε, θα ισχύει

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\nu}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\nu}^{-\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{-\frac{1}{\nu}+t}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{\frac{1}{\nu}+t}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\nu}^{-\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\cdot 0 d\tau + \int_{-\frac{1}{\nu}+t}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{\frac{1}{\nu}+t}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\cdot 0 d\tau \\
&= \int_{-\frac{1}{\nu}+t}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\frac{1}{\nu}+t}^{t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{t}^{0} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{0}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau
\end{aligned}
$$



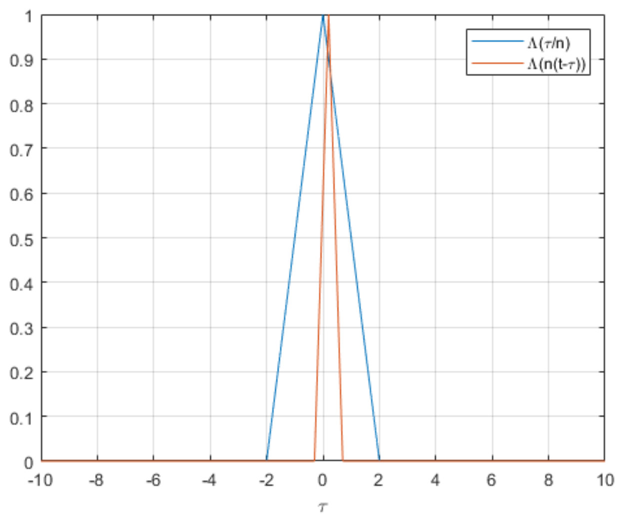
Σχήμα 9: 3η περίπτωση: 2η υποπερίπτωση

(γ′) Παρακάτω, η υποπερίπτωση στην Εικ. 10 είναι ίδια με την προηγούμενη απλά είναι για $0 < t < \dfrac{1}{\nu}$.

Τότε, θα ισχύει

$$
y(t) = \int_{-\nu}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\nu}^{-\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{-\frac{1}{\nu}+t}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{\frac{1}{\nu}+t}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\nu}^{-\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\cdot 0 d\tau + \int_{-\frac{1}{\nu}+t}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{\frac{1}{\nu}+t}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\cdot 0 d\tau \\
&= \int_{-\frac{1}{\nu}+t}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\frac{1}{\nu}+t}^{0} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{0}^{t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{t}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau
\end{aligned}
$$



Σχήμα 10: 3η περίπτωση: 3η υποπερίπτωση

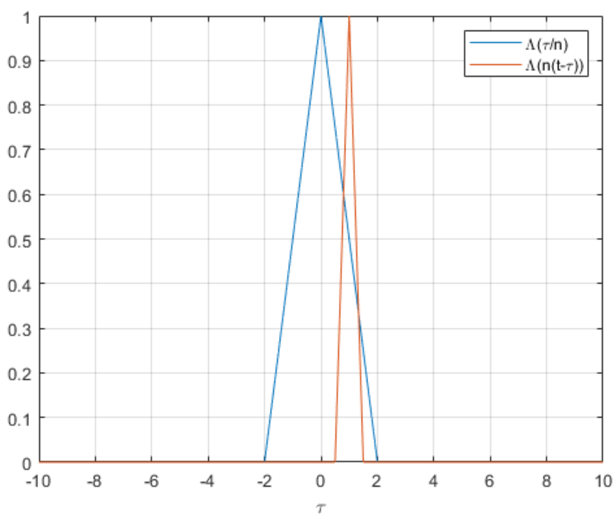
(δ΄) Σε αυτήν την υποπερίπτωση (Εικ. 11), το μηδενικό μέρος της Εξ. 1 βρίσκεται στο διάστημα $(-\nu,\ 0)$, οπότε ϑα ισχύει:

$$
\begin{cases} -\frac{1}{\nu} + t \geq 0 \\ \frac{1}{\nu} + t \leq \nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq \frac{1}{\nu} \\ t \leq \nu - \frac{1}{\nu} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\nu} \leq t \leq \nu - \frac{1}{\nu}.
$$

Τότε, ϑα ισχύει

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\nu}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\nu}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{\frac{1}{\nu}+t}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\nu}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{\frac{1}{\nu}+t}^{\nu} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\cdot 0 d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\nu}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\nu}^{t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{t}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{-\nu}^{t-\frac{1}{\nu}} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\cdot 0 d\tau + \int_{t-\frac{1}{\nu}}^{t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{t}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau \\
&= \int_{t-\frac{1}{\nu}}^{t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau + \int_{t}^{\frac{1}{\nu}+t} \Lambda\left(\frac{\tau}{\nu}\right)\Lambda(\nu(t-\tau))d\tau
\end{aligned}
$$

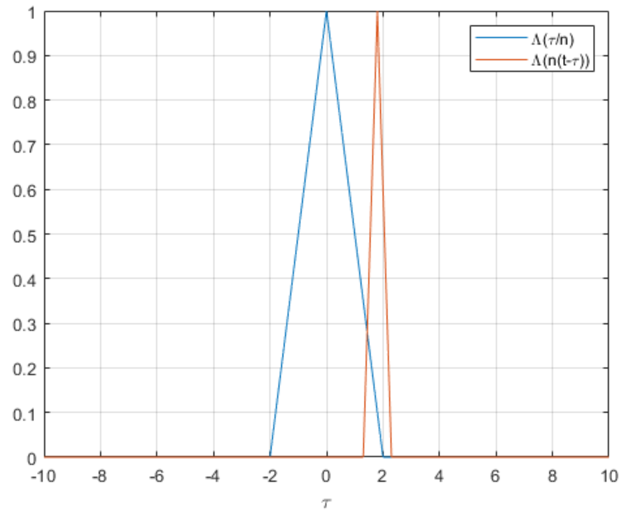


Σχήμα 11: 3η περίπτωση: 4η υποπερίπτωση

4. Εδώ υπάρχουν 2 υποπεριπτώσεις με μερική επικαλύψη:

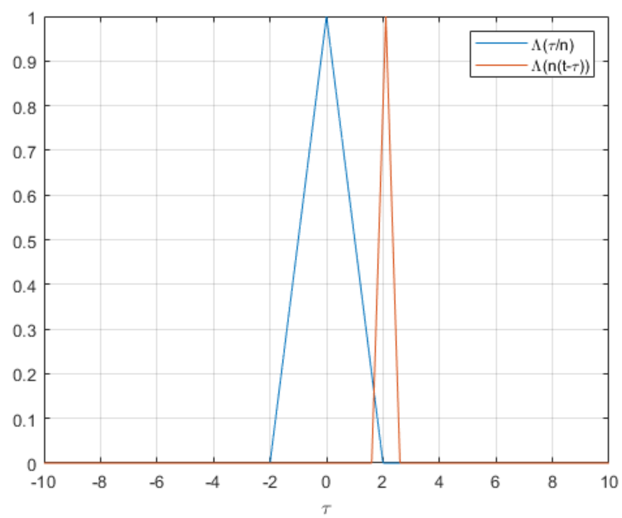
   (α′) Στην πρώτη υποπερίπτωση (Εικ. 12): μόλις έχει αρχίσει να βγαίναι το μη μηδενικό μέρος της Εξ.1 εκτός του διαστήματος $(-\nu, \nu)$, οπότε θα είναι το πολύ το μισό μέρος εκτός του διαστήματος αυτού. Αυτό θα ισχύει όταν:

$$
\begin{cases} t \leq \nu \\ t + \frac{1}{\nu} > \nu \end{cases} \Rightarrow
$$



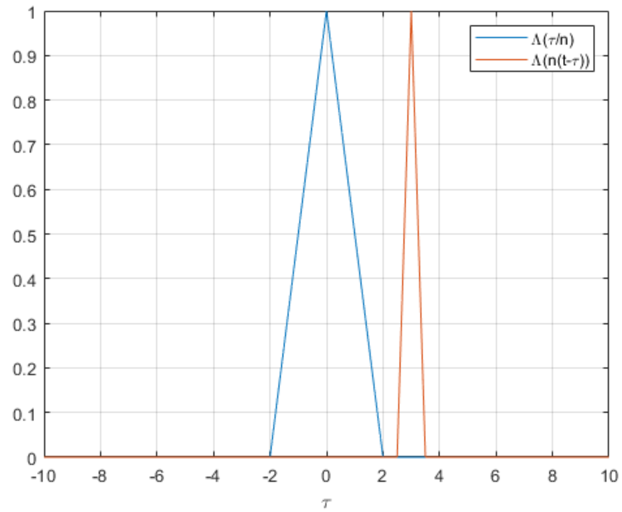
Σχήμα 12: 4η περίπτωση: 1η υποπερίπτωση

(β΄) Στην πρώτη υποπερίπτωση ισχύει:



Σχήμα 13: 4η περίπτωση: 2η υποπερίπτωση

5. Στην τελευταία περίπτωση (Εικ. 14), όπως και στην πρώτη, δεν υπάρχει αλληλεπικάλυψη μεταξύ των μη μηδενικών μερών. Αυτό συμβαίνει αν $t - \dfrac{1}{\nu} \geq \nu \Rightarrow t \geq \nu + \dfrac{1}{\nu}$. Τότε, θα ισχύει $y(t) = 0$.



Σχήμα 14: 5η περίπτωση

Ερώτημα 2ο

$y(n) = x(n) * h(n) \Rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} h(n-k) \Rightarrow y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h(n-k).$
Προκυπτουν οι εξής περιπτώσεις:

- $n < 0$. Τότε θα ισχύει $n - k < 0,\ k = 0,\ 1, \ldots,\ N-2,\ N-1$, οπότε θα ισχύει $h(n-k) = 0,\ k = 0,\ 1, \ldots,\ N-2,\ N-1$, οπότε $y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 0 = \frac{1}{N} 0 = 0.$

- $n > 2N-2$. Τότε θα ισχύει $n - k > N-1,\ k = 0,\ 1, \ldots,\ N-2,\ N-1$, οπότε θα ισχύει $h(n-k) = 0,\ k = 0,\ 1, \ldots,\ N-2,\ N-1$, οπότε $y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 0 = \frac{1}{N} 0 = 0.$

- $n = N-1$. Τότε $y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h(n-k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h(N-1-k) = \frac{1}{N} (h(N-1-0) + h(N-1-1) + \cdots + h(N-1-(N-2)) + h(N-1-(N-1))) = \frac{1}{N} (h(N-1) + h(N-2) + \cdots + h(1) + h(0)) = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \cdots + \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \right) = \frac{1}{N} N \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N}$

- $n = 0$. Τότε $y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h(n-k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h(-k) = \frac{1}{N} (h(0) + h(-1) + \cdots + h(-(N-2)) + h(-(N-1))) = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{N} + 0 + \cdots + 0 + 0 \right) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N^2}$

- $n=2N-2$. Τότε $y(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}h(n-k)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}h(2N-2-k)=\frac{1}{N}\left(h(2N-2-0)+h(2N-2-1)+\cdots+h(2N-2-(N-2))+h(2N-2-(N-1))\right)=\frac{1}{N}\left(h(2N-2)+h(2N-3)+\cdots+h(N)+h(N-1)\right)=\frac{1}{N}\left(0+0+\cdots+0+\frac{1}{N}\right)=\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N}=\frac{1}{N^2}$

- $n=1$. Τότε $y(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}h(n-k)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}h(1-k)=\frac{1}{N}\left(h(1-0)+h(1-1)+h(1-2)+\cdots+h(1-(N-2))+h(1-(N-1))\right)=\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{N}+0+\cdots+0+0\right)=\frac{1}{N}\cdot\frac{2}{N}=\frac{2}{N^2}$

- $n=2N-3$. Τότε $y(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}h(n-k)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}h(2N-3-k)=\frac{1}{N}\left(h(2N-3-0)+h(2N-3-1)+\cdots+h(2N-3-(N-2))+h(2N-3-(N-1))\right)=\frac{1}{N}\left(h(2N-3)+h(2N-4)+\cdots+h(N-1)+h(N-2)\right)=\frac{1}{N}\left(0+0+\cdots+\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\right)=\frac{1}{N}\cdot\frac{2}{N}=\frac{2}{N^2}$

Συνεχίζοντάς το, προκύπτει ότι, για $n=2N-4$ ή $n=2$, $y(n)=\frac{3}{N^2}$, για $n=2N-5$ ή $n=3$, $y(n)=\frac{4}{N^2}$, κοκ. Δηλαδή όσες θέσεις απέχει το όρισμα n από την τιμή $N-1$ όπου έχω μέγιστη τιμή, τόσο μικρότερος θα είναι ο αριθμητής. Αναλυτικότερα, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας τιμών.

Πίνακας 1: Αποτέλεσμα της συνελίξεως βάσει του ν. Παρατηρείται ότι η μέγιστη τιμή είναι για ν=N-1. Επίσης όση είναι η απόσταση του ν από το N-1, τόσο μικρότερη είναι η τιμή του παρωνομαστή

n	Αποσταση από $N-1$	$y(n)$
0	$N-1$	$\frac{1}{N^2}$
1	$N-2$	$\frac{2}{N^2}$
2	$N-3$	$\frac{3}{N^2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N-2$	1	$\frac{N-1}{N^2}$
$N-1$	0	$\frac{N}{N^2}$
N	1	$\frac{N-1}{N^2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2N-4$	$N-3$	$\frac{3}{N^2}$
$2N-3$	$N-2$	$\frac{2}{N^2}$
$2N-2$	$N-1$	$\frac{1}{N^2}$

Συμμεζεύοντάς το προκύπτει ότι

$$y(n)=\begin{cases}\frac{N-|N-1-n|}{N^2},\ n=0,\ 1,\ldots,\ 2N-3,\ 2N-2\\ 0,\ \text{αλλού}\end{cases}\tag{2}$$

5η Άσκηση

Να μελετηθούν τα παρακάτω συστήματα και να αποφανθείτε αν είναι γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα, αιτιατά, και δυναμικά.

1. $y(t) = \sqrt{|x(2t+1)|}$
2. $y(t) = e^{-|x(t)|}$
3. $y(t) = \cos(3t)x(t)$

Λύση 5ης Άσκησης

Ερώτημα 1ο

Το σύστημά μας περιγράφεται από την σχέση $y(t) = T\{x(2t+1)\} = \sqrt{|x(2t+1)|}$

- Γραμμικότητα: Έστω $x_1(t),\ x_2(t)$ σήματα εισόδου και $y_1 = 4x_1(2t+1),\ y_2 = 4x_2(2t+1)$ οι αντίστοιχες έξοδοι του δεδομένου συστήματος. Αν έχομε σήμα $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, τότε η έξοδος θα είναι $y(t) = \sqrt{|x(2t+1)|} = \sqrt{|\alpha x_1(2t+1) + \beta x_2(2t+1)|} \leq \sqrt{|\alpha x_1(2t+1)| + |\beta x_2(2t+1)|} \neq \alpha\sqrt{|x_1(2t+1)|]} + \beta\sqrt{|x_2(2t+1)|}$, οπότε το σύστημά μας δεν είναι γραμμικό.

- Χρονικά αναλλοίωτο: έστω ότι ολισθαίνεται η είσοδος $x(2t+1)$ κατά t_0 χρονικές μονάδες, οπότε $T\{x(2t+1-t_0)\} = \sqrt{|x(2t+1-t_0)|}$. Όμως, ισχύει $y(t-t_0) = T\{x(2(t-t_0)+1)\} = \sqrt{x(2(t-t_0)+1)} \neq \sqrt{|x(2t+1-t_0)|}$, οπότε η ολίσθηση στην έσοδο δεν προκαλεί ίση ολίσθηση στην έξοδο. Άρα δεν είναι χρονικά αναλλοίωτο.

- Αιτιατό δεν είναι διότι η τρέχουσα τιμή της εξόδου δεν εξαρτάται ούτε από παρελθούσα ούτε τωρινή τιμή της εξόδου.

- Δυναμικό είναι διότι δεν χρησιμοποιείται μόνο η τρέχουσα τιμή της εισόδου για να υπολογιστεί η τρέχουσα έξοδος. Συγκεκριμένα χρησιμοποιείται η μελλοντική τιμή της εισόδου.

Ερώτημα 2ο

Το σύστημά μας περιγράφεται από την σχέση $y(t) = T\{x(t)\} = e^{-|x(t)|}$

- Γραμμικότητα: Έστω $x_1(t),\ x_2(t)$ σήματα εισόδου και $y_1 = e^{-|x_1(t)|},\ y_2 = e^{-|x_2(t)|}$ οι αντίστοιχες έξοδοι του δεδομένου συστήματος. Αν έχομε σήμα $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, τότε η έξοδος θα είναι $y(t) = e^{-|x(t)|} = e^{-|(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))|} \neq e^{-|(\alpha x_1(t)| + |\beta x_2(t))|} \neq \alpha e^{-|x_1(t)|} + \beta e^{-|x_2(t)|}$, οπότε το σύστημά μας δεν είναι γραμμικό.

- Χρονικά αναλλοίωτο: έστω ότι ολισθαίνεται η είσοδος $x(t)$ κατά t_0 χρονικές μονάδες, οπότε $T\{x(t-1-t_0)\} = \sqrt{-|x(t-t_0)|}$. Όμως, ισχύει $y(t-t_0) = T\{x(t-t_0)\} = \sqrt{-|x(t-t_0)|}$, οπότε η ολίσθηση στην έσοδο προκαλεί ίση ολίσθηση στην έξοδο. Άρα είναι χρονικά αναλλοίωτο.

- Αιτιατό είναι διότι η τρέχουσα τιμή της εξόδου εξαρτάται από μη μελλοντική τιμή της εισόδου.

- Δυναμικό δεν είναι διότι χρησιμοποιείται μόνο η τρέχουσα τιμή της εισόδου για να υπολογιστεί η τρέχουσα έξοδος. Συγκεκριμένα χρησιμοποιείται μία παρελθοντική τιμή της εισόδου.

Ερώτημα 3ο

Το σύστημά μας περιγράφεται από την σχέση $y(t) = T\{x(t)\} = \cos(3t)x(t)$

- Γραμμικότητα: Έστω $x_1(t),\ x_2(t)$ σήματα εισόδου και $y_1 = \cos(3t)x_1(t),\ y_2 = \cos(3t)x_2(t)$ οι αντίστοιχες έξοδοι του δεδομένου συστήματος. Αν έχομε σήμα $x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$, τότε η έξοδος θα είναι $y(t) = \cos(3t)x(t) = \cos(3t)\left(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\right) \Rightarrow y(t) = \alpha a\cos(3t)x_1(t) + b\cos(3t)x_2(t) = ay_1(t) + by_2(t)$. Άρα είναι γραμμικό.

- Χρονικά αναλλοίωτο: έστω ότι ολισθαίνεται η είσοδος $x(t)$ κατά t_0 χρονικές μονάδες, οπότε $T\{x(t-t_0)\} = \cos(3t)x(t-t_0)$. Επίσης, ισχύει $y(t-t_0) = T\{x(t-t_0)\} = \cos(3t)x(t-t_0)$, οπότε η ολίσθηση στην έσοδο δεν προκαλεί ίση ολίσθηση στην έξοδο. Άρα είναι δεν χρονικά αναλλοίωτο.

- Αιτιατό είναι διότι η τρέχουσα τιμή της εξόδου εξαρτάται τωρινή τιμή της εξόδου.

- Δυναμικό δεν είναι διότι χρησιμοποιείται μόνο η τρέχουσα τιμή της εισόδου για να υπολογιστεί η τρέχουσα έξοδος.

6η Άσκηση

Να βρείτε εάν ένα ΓΧΑ σύστημα είναι ΦΕΦΕ φραγμένο αν:

- $h(t) = \dfrac{1}{t}u(t-1)$
- $h(t) = \Pi(t)$
- $h(t) = \delta(10-t)$
- $h(t) = e^{at}u(-t),\ a > 0$

Λύση 6ης Άσκησης

1ο Ερώτημα

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t}u(t-1)dt = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{t}\cdot 0dt + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{t}\cdot 1dt = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{t}dt = [\ln|t|]_1^{\infty} = \lim_{t\to\infty} \ln|t| - \ln 1 = \infty - 0 = \infty$$

Άρα το σύστημα δεν είναι ΦΕΦΕ φραγμένο.

2ο Ερώτημα

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t)dt = \int_{-\infty}^{-1/2} 0dt + \int_{-1/2}^{1/2} 1dt + \int_{1/2}^{\infty} 0dt = + \int_{-1/2}^{1/2} 1dt = [t]_{-1/2}^{1/2} = 1/2 + 1/2 = 1 < \infty$$

Άρα το σύστημα είναι ΦΕΦΕ φραγμένο.

3ο Ερώτημα

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(10-t)dt \overset{u=10-t}{=} \int_{10-(-\infty)}^{10-\infty} \delta(u)\,(-du) = \int_{\infty}^{-\infty} -\delta(u)du = -\int_{\infty}^{-\infty} \delta(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)du = 1 < \infty$$

Άρα το σύστημα είναι ΦΕΦΕ φραγμένο.

4ο Ερώτημα

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}u(-t)dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} \cdot 1dt + \int_{0}^{\infty} e^{at} \cdot 0dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at} \cdot 1dt = \int_{-\infty}^{0} e^{at}dt = \left[\frac{e^{at}}{a}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{e^{a \cdot 0}}{a} - \lim_{t \to \infty} \frac{e^{at}}{a} = \frac{1}{a} - 0 = \frac{1}{a} < \infty$$

Άρα το σύστημα είναι ΦΕΦΕ φραγμένο.