2ο Σετ Ασκήσεων στα Σήματα και Συστήματα

1η Άσκηση

1. Να υπολογιστούν οι εκθετικοί και οι τριγωνομετρικοί συντελεστές Fourier των παρακάτω σημάτων:
   - $x(t) = e^{-|t|},\ -\nu \leq t \leq \nu$
   - $x(t) = 1 - |\nu t|,\ -1/\nu \leq t \leq 1/\nu$
2. Να υπολογιστεί η μέση ισχύς των σημάτων συναρτήσει του ν, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Parseval.

Λύση 1ης Ασκήσεως

1ο Ερώτημα

- Το σήμα έχει περίοδο $T = \nu - (-\nu) = 2\nu$, οπότε η συχνότητα του είναι $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2\nu} = \dfrac{\pi}{\nu}$. Αρχικά ξεκινάμε με τους εκθετικούς συντελεστές a_k.

$$\begin{aligned}
a_0 =& \frac{1}{T}\int_{-\nu}^{\nu} x(t)dt \\
=& \frac{1}{2\nu}\left(\int_{-\nu}^{0} e^{-|t|}dt + \int_{0}^{\nu} e^{-|t|}dt\right) \\
=& \frac{1}{2\nu}\left(\int_{-\nu}^{0} e^{-(-t)}dt + \int_{0}^{\nu} e^{-t}dt\right) \\
=& \frac{1}{2\nu}\left(\int_{-\nu}^{0} e^{t}dt + \int_{0}^{\nu} e^{-t}dt\right) \\
=& \frac{1}{2\nu}\left(\left[e^{t}\right]_{-\nu}^{0} + \left[-e^{-t}\right]_{0}^{\nu}\right) \\
=& \frac{1}{2\nu}\left(\left[e^{0} - e^{-\nu}\right] + \left[-e^{-\nu} - (-e^{0})\right]\right) \\
=& \frac{1}{2\nu}\left(\left[1 - e^{-\nu}\right] + \left[-e^{-\nu} + 1\right]\right) \\
=& \frac{1}{2\nu}\left(2 - 2e^{-\nu}\right)
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\nu}\left(1-e^{-\nu}\right)$$

Αντίστοιχα ισχύει:

$$\begin{aligned}
a_k =&\frac{1}{T}\int_{-\nu}^{\nu} x(t)e^{jk\omega t}dt\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\int_{-\nu}^{0} e^{-|t|}e^{jk\omega t}dt+\int_{0}^{\nu} e^{-|t|}e^{jk\omega t}dt\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\int_{-\nu}^{0} e^{-(-t)}e^{jk\omega t}dt+\int_{0}^{\nu} e^{-t}e^{jk\omega t}dt\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\int_{-\nu}^{0} e^{t}e^{jk\omega t}dt+\int_{0}^{\nu} e^{-t}e^{jk\omega t}dt\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\int_{-\nu}^{0} e^{t(1+jk\omega)}dt+\int_{0}^{\nu} e^{t(-1+jk\omega)t}dt\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\left[\frac{e^{t(1+jk\omega)}}{1+jk\omega}\right]_{-\nu}^{0}+\left[\frac{e^{t(-1+jk\omega)}}{(-1+jk\omega)}\right]_{0}^{\nu}\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\left[\frac{e^{0}}{1+jk\omega}-\frac{e^{-\nu(1+jk\omega)}}{1+jk\omega}\right]+\left[\frac{e^{\nu(-1+jk\omega)}}{(-1+jk\omega)}-\frac{e^{0}}{(-1+jk\omega)}\right]\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\left[\frac{1}{1+jk\omega}-\frac{e^{-\nu(1+jk\omega)}}{1+jk\omega}\right]+\left[\frac{e^{\nu(-1+jk\omega)}}{-1+jk\omega}-\frac{1}{-1+jk\omega}\right]\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\frac{1}{1+jk\omega}-\frac{e^{-\nu(1+jk\omega)}}{1+jk\omega}+\frac{e^{\nu(-1+jk\omega)}}{-1+jk\omega}-\frac{1}{-1+jk\omega}\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\frac{1}{1+jk\omega}-\frac{e^{-\nu(1+jk\omega)}}{1+jk\omega}+\frac{e^{\nu(-1+jk\omega)}}{-1+jk\omega}+\frac{1}{1-jk\omega}\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\frac{1}{1+jk\omega}-e^{-\nu}\frac{e^{-jk\nu\omega}}{1+jk\omega}+e^{-\nu}\frac{e^{jk\nu\omega}}{-1+jk\omega}+\frac{1}{1-jk\omega}\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\frac{1}{1+jk\omega}-e^{-\nu}\frac{e^{-jk\nu\omega}}{1+jk\omega}-e^{-\nu}\frac{e^{jk\nu\omega}}{1-jk\omega}+\frac{1}{1-jk\omega}\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\frac{1}{1+jk\omega}-e^{-\nu}\left[\frac{e^{-jk\nu\omega}}{1+jk\omega}+\frac{e^{jk\nu\omega}}{1-jk\omega}\right]+\frac{1}{1-jk\omega}\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\frac{1}{1+jk\omega}+\frac{1}{1-jk\omega}-e^{-\nu}\left[\frac{e^{-jk\nu\omega}}{1+jk\omega}+\frac{e^{jk\nu\omega}}{1-jk\omega}\right]\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\frac{1-jk\omega}{(1+jk\omega)(1-jk\omega)}+\frac{1+jk\omega}{(1-jk\omega)(1+jk\omega)}-e^{-\nu}\left[\frac{e^{-jk\nu\omega}}{1+jk\omega}+\frac{e^{jk\nu\omega}}{1-jk\omega}\right]\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\frac{2}{(1+jk\omega)(1-jk\omega)}-e^{-\nu}\left[\frac{e^{-jk\nu\frac{\pi}{\nu}}}{1+jk\omega}+\frac{e^{jk\nu\frac{\pi}{\nu}}}{1-jk\omega}\right]\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\frac{2}{1+k^2\omega^2}-e^{-\nu}\left[\frac{e^{-jk\pi}}{1+jk\omega}+\frac{e^{jk\pi}}{1-jk\omega}\right]\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{2\nu}\left(\frac{2}{1+k^2\omega^2}-e^{-\nu}\left[\frac{(-1)^k}{1+jk\omega}+\frac{(-1)^k}{1-jk\omega}\right]\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\frac{2}{1+k^2\omega^2}-e^{-\nu}(-1)^k\left[\frac{1}{1+jk\omega}+\frac{1}{1-jk\omega}\right]\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\left(\frac{2}{1+k^2\omega^2}-e^{-\nu}(-1)^k\frac{2}{1+k^2\omega^2}\right)\\
=&\frac{1}{2\nu}\frac{2}{1+k^2\omega^2}\left(1-e^{-\nu}(-1)^k\right)\\
=&\frac{1}{\nu}\frac{1}{1+k^2\omega^2}\left(1-e^{-\nu}(-1)^k\right)\\
=&\frac{1}{\nu\left(1+k^2\omega^2\right)}\left(1-e^{-\nu}(-1)^k\right)\\
=&\frac{1}{\nu+k^2\frac{\pi^2}{\nu}}\left(1-e^{-\nu}(-1)^k\right)
\end{aligned}
$$

Για την εύρεση των τριγωνομετρικών συντελεστών Fourier , παρατηρούμε τα εξής:

- Το σήμα είναι άρτιο, καθότι $x(-t)=e^{-|-t|}=e^{-|t|}=x(t)$, οπότε οι συντελεστές των ημιτόνων είναι $c_k=0,\ \forall k\in\mathbb{Z}^+$
- Βάσει των παραπάνω, προκύπτει ότι $b_k=a_k+a_{-k}\xRightarrow[(-1)^{-k}=(-1)^k]{(-k)^=k^2} b_k=a_k+a_k=2a_k=\frac{2}{\nu+k^2\frac{\pi^2}{\nu}}\left(1-e^{-\nu}(-1)^k\right)$

• Το σήμα έχει περίοδο $T=\frac{1}{\nu}-\left(-\frac{1}{\nu}\right)=\frac{2}{\nu}$, οπότε η συχνότητα του είναι $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{\frac{2}{\nu}}=\nu\pi$. Αρχικά ξεκινάμε με τους εκθετικούς συντελεστές a_k.

$$
\begin{aligned}
a_0=&\frac{1}{T}\int_{-1/\nu}^{1/\nu}x(t)dt\\
=&\frac{\nu}{2}\int_{-1/\nu}^{1/\nu}(1-|\nu t|)dt\\
=&\frac{\nu}{2}\left(\int_{-1/\nu}^{0}(1-(-\nu t))dt+\int_{0}^{1/\nu}(1-\nu t)dt\right)\\
=&\frac{\nu}{2}\left(\int_{-1/\nu}^{0}(1+\nu t)dt+\int_{0}^{1/\nu}(1-\nu t)dt\right)\\
=&\frac{\nu}{2}\left(\left[t+\frac{\nu t^2}{2}\right]_{-1/\nu}^{0}+\left[t-\frac{\nu t^2}{2}\right]_{0}^{1/\nu}\right)\\
=&\frac{\nu}{2}\left(\left[0+\frac{\nu 0^2}{2}-\left(-\frac{1}{\nu}\right)-\frac{\nu\left(-\frac{1}{\nu}\right)^2}{2}\right]+\left[1/\nu-\frac{\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}{2}-0+\frac{\nu 0^2}{2}\right]\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\nu}{2}\left(\left[\frac{1}{\nu} - \frac{\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}{2}\right] + \left[\frac{1}{\nu} - \frac{\nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^2}{2}\right]\right) \\
&= \frac{\nu}{2}\left(\frac{2}{\nu} - \nu\left(\frac{1}{\nu}\right)^2\right) \\
&= \frac{\nu}{2}\left(\frac{2}{\nu} - \nu\frac{1}{\nu^2}\right) \\
&= \frac{\nu}{2}\left(\frac{2}{\nu} - \frac{1}{\nu}\right) \\
&= \frac{\nu}{2} \cdot \frac{1}{\nu} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Αντίστοιχα ισχύει:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{T}\int_{-1/\nu}^{1/\nu} x(t)e^{jk\omega t}dt \\
&= \frac{\nu}{2}\int_{-1/\nu}^{1/\nu} (1 - |\nu t|)e^{jk\nu\pi t}dt \\
&= \frac{\nu}{2}\int_{-1/\nu}^{1/\nu} e^{jk\nu\pi t}dt - \frac{\nu}{2}\int_{-1/\nu}^{1/\nu} |\nu t|e^{jk\nu\pi t}dt \\
&= \frac{\nu}{2}\int_{-1/\nu}^{1/\nu} e^{jk\nu\pi t}dt - \frac{\nu}{2}\int_{-1/\nu}^{0} -\nu te^{jk\nu\pi t}dt - \frac{\nu}{2}\int_{0}^{1/\nu} \nu te^{jk\nu\pi t}dt \\
&= \frac{\nu}{2}\left[\frac{e^{jk\nu\pi t}}{jk\nu\pi}\right]_{-1/\nu}^{1/\nu} + \frac{\nu^2}{2}\int_{-1/\nu}^{0} te^{jk\nu\pi t}dt - \frac{\nu^2}{2}\int_{0}^{1/\nu} te^{jk\nu\pi t}dt
\end{aligned}
$$

Γενικά ισχύει ότι $\int te^{at}dt = e^{at}\frac{at-1}{a^2} + C$, οπότε θα ισχύει:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{\nu}{2}\left[\frac{e^{jk\nu\pi t}}{jk\nu\pi}\right]_{-1/\nu}^{1/\nu} + \frac{\nu^2}{2}\int_{-1/\nu}^{0} te^{jk\nu\pi t}dt - \frac{\nu^2}{2}\int_{0}^{1/\nu} te^{jk\nu\pi t}dt \\
&= \frac{\nu}{2}\left[\frac{e^{jk\nu\pi t}}{jk\nu\pi}\right]_{-1/\nu}^{1/\nu} + \frac{\nu^2}{2}\left[e^{jk\nu\pi t}\frac{jk\nu\pi t - 1}{(jk\nu\pi)^2}\right]_{-1/\nu}^{0} - \frac{\nu^2}{2}\left[e^{jk\nu\pi t}\frac{jk\nu\pi t - 1}{(jk\nu\pi)^2}\right]_{0}^{1/\nu} \\
&= \frac{\sin(k\pi)}{k\pi} + \frac{\nu^2}{2}\left[-\frac{1}{j^2k^2\pi^2\nu^2} + e^{-jk\pi}\frac{jk\pi + 1}{j^2k^2\pi^2\nu^2}\right] - \frac{\nu^2}{2}\left[e^{jk\pi}\frac{jk\pi - 1}{j^2k^2\nu^2\pi^2} - \frac{-1}{j^2k^2\nu^2\pi^2}\right] \\
&= 0 + \frac{\nu^2}{2}\left[\frac{1}{k^2\pi^2\nu^2} - e^{-jk\pi}\frac{jk\pi + 1}{k^2\pi^2\nu^2}\right] - \frac{\nu^2}{2}\left[-e^{jk\pi}\frac{jk\pi - 1}{k^2\nu^2\pi^2} - \frac{1}{k^2\nu^2\pi^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k^2\pi^2} - e^{-jk\pi}\frac{jk\pi + 1}{k^2\pi^2}\right] + \frac{1}{2}\left[e^{jk\pi}\frac{jk\pi - 1}{k^2\pi^2} + \frac{1}{k^2\pi^2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{k^2\pi^2}-\frac{1}{2}e^{-jk\pi}\frac{jk\pi+1}{k^2\pi^2}+\frac{1}{2}e^{jk\pi}\frac{jk\pi-1}{k^2\pi^2}\\
=&\frac{1}{k^2\pi^2}-\frac{1}{2}\cos(k\pi)\frac{jk\pi+1}{k^2\pi^2}+\frac{1}{2}\cos(k\pi)\frac{jk\pi-1}{k^2\pi^2}\\
=&\frac{1}{k^2\pi^2}-\frac{1}{2}\cos(k\pi)\frac{jk\pi+1}{k^2\pi^2}+\frac{1}{2}\cos(k\pi)\frac{jk\pi-1}{k^2\pi^2}\\
=&\frac{1}{k^2\pi^2}-\frac{1}{2}\cos(k\pi)\frac{jk\pi}{k^2\pi^2}-\frac{1}{2}\cos(k\pi)\frac{1}{k^2\pi^2}+\frac{1}{2}\cos(k\pi)\frac{jk\pi}{k^2\pi^2}-\frac{1}{2}\cos(k\pi)\frac{1}{k^2\pi^2}\\
=&\frac{1}{k^2\pi^2}-\cos(k\pi)\frac{1}{k^2\pi^2}\\
=&\frac{1}{k^2\pi^2}-(-1)^k\frac{1}{k^2\pi^2}\\
=&\frac{1}{k^2\pi^2}\left(1-(-1)^k\right)
\end{aligned}
$$

Ομοίως, για την εύρεση των τριγωνομετρικών συντελεστών Fourier , παρατηρούμε τα εξής:

- Το σήμα είναι άρτιο, καθότι $x(-t)=1-|-\nu t|=1-|\nu t|=x(t)$, οπότε οι συντελεστές των ημιτόνων είναι $c_k=0,\ \forall k\in\mathbb{Z}^+$
- Βάσει των παραπάνω, προκύπτει ότι $b_k=a_k+a_{-k}\xRightarrow[(-1)^{-k}=(-1)^k]{(-k)^=k^2}b_k=a_k+a_k=2a_k=\frac{2}{k^2\pi^2}\left(1-(-1)^k\right)$

2ο Ερώτημα

Η μέση ισχύς του 1ου σήματος θα είναι

$$
\begin{aligned}
P_x=&\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2\\
=&a_0+\sum_{k=-\infty}^{-1}|a_k|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\\
=&a_0+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2+|a_{-k}|^2\xRightarrow{a_{-k}=a_k}\\
P_x=&a_0+\sum_{k=1}^{\infty}2|a_k|^2\\
=&a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\\
=&\frac{1}{\nu}\left(1-e^{-\nu}\right)+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\nu+k^2\frac{\pi^2}{\nu}}\left(1-e^{-\nu}(-1)^k\right)\right]^2
\end{aligned}
$$

Ομοίως, η μέση ισχύς του 2ου σήματος θα είναι

$$
\begin{aligned}
P_x =& \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \\
=& a_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} |a_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \\
=& a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + |a_{-k}|^2 \xRightarrow{a_{-k}=a_k} \\
P_x =& a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|a_k|^2 \\
=& a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \\
=& \frac{1}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k^2\pi^2}\left(1-(-1)^k\right)\right]^2
\end{aligned}
$$

2η Άσκηση

- Αν το σήμα $x(t)$ συνεχούς χρόνου έχει μετασχηματισμό Fourier Συνεχούς Χρόνου $X(\omega)$, τότε να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Fourier Συνεχούς Χρόνου του σήματος συνεχούς χρόνου $y(t) = x(t)\sin^2(t)$.
- Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $y(t) = sgn(t)$

Υπόδειξη: $sgn(t) = 2u(t) - 1$

Λύση 2ης Ασκήσεως

1ο Ερώτημα

$$
\begin{aligned}
y(t) =& x(t)\sin^2(t) \\
=& x(t)\cdot\frac{1-\cos(2t)}{2} \\
=& \frac{1}{2}x(t) - x(t)\frac{\cos(2t)}{2} \xRightarrow[\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}]{\cos(t)=} \\
=& \frac{1}{2}x(t) - x(t)\frac{\frac{e^{j2t}+e^{-j2t}}{2}}{2} \\
=& \frac{1}{2}x(t) - x(t)\frac{e^{j2t}+e^{-j2t}}{4} \\
=& \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{4}e^{j2t}x(t) - \frac{1}{4}e^{-j2t}x(t)
\end{aligned}
$$

Ουσιαστικά το σήμα $y(t)$ είναι γραμμικός συνδυασμός 3 σημάτων:

- $x(t)$
- $e^{j2t}x(t)$
- $e^{-j2t}x(t)$

Μαζί με την γραμμική ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier , λαμβάνεται υπόψιν και ιδιότητα ολισθήσεως στην συχνότητα:

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega) \Rightarrow e^{j\omega_0 t}x(t) \longleftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

οπότε ισχύει:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega) - \frac{1}{4}X(\omega - 2) - \frac{1}{4}X(\omega + 2)$$

2ο Ερώτημα

$$\begin{aligned} y(t) =& sgn(t) \\ =& 2u(t) - 1 \Rightarrow \\ Y(\omega) =& \mathcal{F}\{2u(t) - 1\} \\ =& 2\mathcal{F}\{u(t)\} - \mathcal{F}\{1\} \end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της βηματικής συναρτήσεως $u(t)$ είναι:

$$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

Για την εύρεση του μετασχηματισμού Fourier της μονάδας, καταφεύγομε στα εξής:

1. $\delta(t) \longleftrightarrow 1$
2. Δυϊκή ιδιότητα: $x(t) \longleftrightarrow X(\omega) \Rightarrow X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

Βάσει των παραπάνω, προκύπτει ότι:

$$1 \longleftarrow 2\pi\delta(-\omega)$$

Επειδή όμως η κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$ είναι άρτια, τότε θα ισχύει

$$1 \longleftarrow 2\pi\delta(\omega)$$

οπότε

$$Y(\omega) = 2\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) - 2\pi\delta(\omega)$$

3η Άσκηση

Να υπολογιστούν οι μετασχηματισμοί Fourier των παρακάτω σημάτων:

1. $y(t) = \left[e^{-a|t|}\right] * \left[e^{-at}u(t)\right]$
2. $y(t) = u(\nu t) * u(t/\nu)$

Λύση 3ης Ασκήσεως

1ο Ερώτημα

$y(t) = \left[e^{-a|t|}\right] * \left[e^{-at}u(t)\right] \Rightarrow Y(\omega) = \mathcal{F}\{e^{-a|t|}\}\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\}$

Έστω $x_1(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at}u(t), \ t >= 0 \\ e^{at}u(-t), \ t < 0 \end{cases}$. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι το σήμα είναι γραμμικός συνδυασμός των σημάτων $x_1(t) = e^{-at}u(t), \ x_2(t) = e^{at}u(-t)$, συγκεκριμένα:

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

Το σήμα $e^{-at}u(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier

$$\frac{1}{a + j\omega}$$

οπότε βάσει της ιδιότητας της αντανάκλασης, το σήμα $x_2(t) = x_1(-t)$ θα έχει μετασχηματισμό Fourier

$$\frac{1}{a - j\omega}$$

Κατά συνέπειαν, ο μετασχηματισμός Fourier του εν λόγω σήματος θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω, δηλαδή

$$X_1(s) = \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} = \frac{a + j\omega + a - j\omega}{(a + j\omega)(a - j\omega)} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

οπότε

$$Y(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{a + j\omega}$$

2ο Ερώτημα

$y(t) = u(\nu t) * u(t/\nu) \Rightarrow Y(\omega) = \mathcal{F}\{u(\nu t)\}\mathcal{F}\{u(t/\nu)\}$

Ισχύει ότι $u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$, οπότε βάσει της ιδιότητα της κλιμακώσεως στον χρόνο, θα ισχύει:

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) \Rightarrow x(ct) \leftrightarrow \frac{1}{|c|}X\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

άρα $u(\nu t) \leftrightarrow \dfrac{1}{|\nu|}\left(\dfrac{1}{j\frac{\omega}{\nu}} + \pi\delta\left(\dfrac{\omega}{\nu}\right)\right) \Rightarrow u(\nu t) \leftrightarrow \dfrac{1}{j\omega} + \dfrac{1}{\nu}\delta\left(\dfrac{\omega}{\nu}\right) \Rightarrow u(\nu t) \leftrightarrow \dfrac{1}{j\omega} + \dfrac{1}{\nu}\nu\delta\left(\omega\right) \Rightarrow u(\nu t) \leftrightarrow \dfrac{1}{j\omega} + \delta\left(\omega\right)$.

Αντίστοιχα, $u\left(t \cdot \dfrac{1}{\nu}\right) \leftrightarrow \dfrac{1}{\left|\frac{1}{\nu}\right|}\left(\dfrac{1}{j\frac{\omega}{\frac{1}{\nu}}} + \delta\left(\dfrac{\omega}{\frac{1}{\nu}}\right)\right) \Rightarrow u\left(t \cdot \dfrac{1}{\nu}\right) \leftrightarrow \dfrac{1}{j\omega} + \dfrac{1}{\frac{1}{\nu}}\delta(\nu\omega) \Rightarrow u\left(t \cdot \dfrac{1}{\nu}\right) \leftrightarrow \dfrac{1}{j\omega} + \nu\delta(\nu\omega) \Rightarrow u\left(t \cdot \dfrac{1}{\nu}\right) \leftrightarrow \dfrac{1}{j\omega} + \nu\dfrac{1}{\nu}\delta(\omega) \Rightarrow u\left(t \cdot \dfrac{1}{\nu}\right) \leftrightarrow \dfrac{1}{j\omega} + \delta(\omega)$, οπότε θα ισχύει

$$Y(\omega) = (\frac{1}{j\omega} + \delta\left(\omega\right))^2$$

4η Άσκηση

Να βρεθούν τα αρχικά σήματα που αντιστοιχούν στους παρακάτω μετασχηματισμούς Fourier :

- $X(\omega) = j\omega\Pi(\omega)$
- $X(\omega) = -j\omega^3$

Υπόδειξη: $j^2 = -1$

Λύση 4ης Ασκήσεως

1ο Ερώτημα

Βάσει της ιδιότητας της παραγώγισης στον χρόνο:

$$s(t) \leftrightarrow S(\omega) \Rightarrow s^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^{(n)} S(\omega)$$

προκύπτει ότι το σήμα $x(t)$ είναι η πρώτη παράγωγος του σήματος του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier είναι $\Pi(\omega)$. Το σήμα με αυτόν τον μετασχηματισμό είναι το σήμα (από διαφάνεια 45 της διαλέξεως περί Αναπτύγματος και Μετασχηματισμού Fourier):

$$\frac{\sin(0.5t)}{\pi t}$$

οπότε $x(t) = \left(\frac{\sin(0.5t)}{\pi t}\right)' = \frac{0.5t\cos(0.5t) - \sin(0.5t)}{\pi t^2}$

2ο Ερώτημα

$X(\omega) = -j\omega^3 \Rightarrow X(\omega) = j^2 j\omega^3 = (j\omega)^3 \cdot 1$. Βάσει της ιδιότητας της παραγώγισης στον χρόνο:

$$s(t) \leftrightarrow S(\omega) \Rightarrow s^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^{(n)} S(\omega)$$

προκύπτει ότι το σήμα $x(t)$ είναι η 3η παράγωγος του σήματος του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1. Η κρουστική συνάρτηση $\delta(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier ίσο με 1, οπότε θα ισχύει:

$$x(t) = \delta^{(3)}(t)$$

5η Άσκηση

1. Αν σε ένα ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας
$$H(\omega) = j\omega^3$$
εισαχθεί σήμα
$$x(t) = e^{-at}u(t),\ a > 0$$
τότε ποιά θα είναι η έξοδός του;

2. Έστω ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνότητας
$$H(\omega) = \frac{-\omega^2 + 2}{-j\omega^3 + 2j\omega + 1}$$
Βρείτε, την διαφορική εξίσωση η οποία περιγράφει το σύστημα αυτό.

Λύση 5ης Ασκήσεως

1ο Ερώτημα

$H(\omega) = j\omega^3 = -(-1)j\omega^3 \Rightarrow H(\omega) = -j^2 j\omega = -j^3\omega^3 \Rightarrow H(\omega) = -(j\omega)^3.$

Άρα $y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(s) = X(s)H(s) \Rightarrow Y(s) = -(j\omega)^3 X(s)$, οπότε βάσει της ιδιότητας της παραγώγισης στον χρόνο και της γραμμικότητας θα ισχύει:

$$
\begin{aligned}
y(t) =& - x^{(3)}(t) \\
=& - \left(e^{-at}u(t)\right)^{(3)}
\end{aligned}
$$

Ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
e^{-at}u(t))' =& \left(e^{-at}\right)' u(t) + e^{-at}u'(t) \\
=& - ae^{-at}u(t) + e^{-at}\delta(t) \\
=& e^{-at}(-au(t) + \delta(t)) \Rightarrow \\
e^{-at}u(t))'' =& \left(e^{-at}\right)' (-au(t) + \delta(t)) + e^{-at}(-au(t) + \delta(t))' \\
=& - ae^{-at}(-au(t) + \delta(t)) + e^{-at}(-au'(t) + \delta'(t)) \\
=& - ae^{-at}(-au(t) + \delta(t)) + e^{-at}(-a\delta(t) + \delta'(t)) \\
=& e^{-at}(a^2u(t) - 2a\delta(t) + \delta'(t)) \Rightarrow \\
e^{-at}u(t))^{(3)} =& \left(e^{-at}\right)' (a^2u(t) - 2a\delta(t) + \delta'(t)) + e^{-at}(a^2u(t) - 2a\delta(t) + \delta'(t))' \\
=& - ae^{-at}(a^2u(t) - 2a\delta(t) + \delta'(t)) + e^{-at}(a^2u'(t) - 2a\delta'(t) + \delta''(t)) \\
=& - ae^{-at}(a^2u(t) - 2a\delta(t) + \delta'(t)) + e^{-at}(a^2\delta(t) - 2a\delta'(t) + \delta''(t)) \\
=& e^{-at}\left(-a^3u(t) + 2a^2\delta((t) - a\delta'(t) + a^2\delta(t) - 2a\delta'(t) + \delta''(t)\right) \\
=& e^{-at}\left(-a^3u(t) + 3a^2\delta((t) - 3a\delta'(t) + \delta''(t)\right)
\end{aligned}
$$

2ο Ερώτημα

$$
\begin{aligned}
H(\omega) =& \frac{-\omega^2 + 2}{-j\omega^3 + 2j\omega + 1} \Rightarrow \\
H(\omega) =& \frac{-1 \cdot \omega^2 + 2}{j \cdot (-1) \cdot \omega^3 + 2j\omega + 1} \Rightarrow \\
H(\omega) =& \frac{j^2 \cdot \omega^2 + 2}{jj^2 \cdot \omega^3 + 2j\omega + 1} \Rightarrow \\
H(\omega) =& \frac{(j\omega)^2 + 2}{j^3 \cdot \omega^3 + 2j\omega + 1} \Rightarrow \\
H(\omega) =& \frac{(j\omega)^2 + 2}{(j\omega)^3 + 2j\omega + 1} \Rightarrow
\end{aligned}
$$

Βάσει της τελευταίας ισότητος, προκύπτει ότι:

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 2\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t) + 2x(t)$$