

### 3η Σειρά Ασκήσεων στα Σήματα και Συστήματα “2024-2025”

#### 1η Άσκηση

Βρείτε τον μετασχηματισμό Laplace, των παρακάτω σημάτων μαζί με την περιοχή συγκλίσεως:

- $x(t) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{-2t}\right)u(t)$

- $x(t) = tu(t) + e^{-t}u(t)$

#### Λύση 1η Ασκήσεως

(α)  $x_1(t) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}e^{-2t}\right)u(t)$

Χρησιμοποιούμε τη γραμμικότητα και τις βασικές ιδιότητες:

- $\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \Re[s] > 0$

- $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}, \quad \Re[s] > -a$

Επομένως:

$$X_1(s) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{1}{4s} + \frac{1}{8(s+2)}, \quad \Re[s] > 0$$

(β)  $x_2(t) = tu(t) + e^{-t}u(t)$

Ιδιότητες:

- $\mathcal{L}\{tu(t)\} = \frac{1}{s^2}, \quad \Re[s] > 0$

- $\mathcal{L}\{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{s+1}, \quad \Re[s] > -1$

Άρα:

$$X_2(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}, \quad \Re[s] > 0$$

## 2η Άσκηση

Σας δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace:

$$X(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

οποίος έχει περιοχή συγκλίσεως  $R_x = \{s : \Re[s] > 0\}$ . Να βρείτε τους μετασχηματισμούς Laplace των παρακάτω σημάτων καθώς και τις αντίστοιχες περιοχές συγκλίσεως:

- $\frac{d^2}{dt^2}x(2t)$
- $\frac{dx(t)}{dt} * \frac{d^2x(t)}{dt^2}$
- $t^2x(t)$
- $\int_{-\infty}^t x(2u)du$

Υπόδειξη: Εξυπακούεται ότι για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace πρέπει να χρησιμοποιήσετε τις ιδιότητες.

### Λύση 2ης Ασκήσεως

Δίνεται:  $X(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2}$ ,  $\Re[s] > 0$

(α)  $\frac{d^2}{dt^2}x(2t)$ :  
Ιδιότητες:

- Κλιμάκωση:  $x(at) \rightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)$ ,  $\Re[s/a] > 0$
- Παράγωγος 2ης τάξης:  $x''(t) \rightarrow s^2X(s)$ , ROC ίδιο όπως του  $X(s)$

Άρα:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}x(2t)\right\} = s^2 \cdot \frac{1}{2}X\left(\frac{s}{2}\right) = 2e^{-2s}, \quad \Re[s] > 0$$

(β)  $x'(t) * x''(t)$ :

Ιδιότητες:

- Παράγωγος:  $x'(t) \rightarrow sX(s)$
- Παράγωγος 2ης τάξης:  $x''(t) \rightarrow s^2X(s)$
- Συνέλιξη στο χρόνο  $\rightarrow$  γινόμενο στο  $s$ :  $PO^n =$  τομή των  $PO^n$  των παραγόντων

Άρα:

$$\mathcal{L}\{x'(t) * x''(t)\} = sX(s) \cdot s^2X(s) = \frac{e^{-4s}}{s}, \quad \Re[s] > 0$$

(γ)  $t^2x(t)$ :

Ιδιότητα:

- $t^n x(t) \rightarrow (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} X(s)$

Άρα:

$$\mathcal{L}\{t^2x(t)\} = \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{e^{-2s}}{s^2} \right), \quad \Re[s] > 0$$

(δ)  $\int_{-\infty}^t x(2u)du$ :

Ιδιότητες:

- Ολοκλήρωση στο χρόνο:  $\int x(u)du \rightarrow \frac{1}{s}X(s)$

- Κλιμάκωση: όπως στο (α)

Άρα:

$$\mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^t x(2u)du\right\} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{2}X\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{2e^{-2s}}{s^3}, \quad \Re[s] > 0$$

### 3η Άσκηση

Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace του

$$X(s) = \frac{s+1}{s^3 - 2s^2 + s}, \quad \Re[s] > 1$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τους μετασχηματισμού Laplace γνωστών στοιχειωδών σημάτων.

### Λύση 3ης Ασκήσεως

Δίνεται:

$$X(s) = \frac{s+1}{s^3 - 2s^2 + s}, \quad \Re[s] > 1$$

Παρονομαστής:

$$s^3 - 2s^2 + s = s(s-1)^2$$

Κάνουμε μερική ανάλυση:

$$\frac{s+1}{s(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

Λύνοντας για A,B, βρίσκουμε:

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 2$$

Άρα:

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2}, \quad \text{Re}[s] > 1$$

Αντίστροφα:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = u(t), \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s-1}\right\} = -e^t u(t), \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2}\right\} = 2te^t u(t)$$

Τελικό:

$$x(t) = u(t) - e^t u(t) + 2te^t u(t), \quad \text{Re}[s] > 1$$

#### 4η Άσκηση

Έστω ευσταθές ΓΧΑ σύστημα το οποίο περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y(t) = x(t) + \frac{dx}{dt}$$

- Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος,  $H(s)$ , και προσδιορίστε το πεδίο σύγκλισης.
- Βρείτε τους πόλους του συστήματος. Είναι αιτιατό;
- Βρείτε την κρουστική απόκριση  $h(t)$

#### Λύση 4ης Ασκήσεως

Δίνεται:

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t)$$

(α,β) Συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

Πόλοι είναι τα σημεία όπου δεν ορίζεται η συνάρτηση μεταφοράς, δηλαδή όπου ο παρονομαστής μηδενίζεται

$$\begin{aligned} s^2 + 2s + 2 &= 0 \Rightarrow \\ (s^2 + 2s + 1) + 1 &= 0 \Rightarrow \\ (s+1)^2 + 1 &= 0 \Rightarrow \\ (s+1)^2 &= -1 \Rightarrow \\ s+1 &= \pm i \Rightarrow \\ s &= -1 \pm i \end{aligned}$$

Αφού το σύστημα είναι ευσταθές θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει τον φανταστικό άξονα, το οποίο είναι εφικτό αν η περιοχή σύγκλισης είναι  $\text{Re}[s] > -1$ . Το σύστημα είναι αιτιατό γιατί το πεδίο σύγκλισης είναι δεξιά των πόλων.

(γ) Κρουστική απόκριση:

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} \Rightarrow h(t) = e^{-t} \cos(t) u(t)$$