

Θέματα εξεταστικής Σεπτεβρίου στο μάθημα “Σήματα και Συστήματα” για το ακαδημαϊκό έτος 2023-2024

1ο Θέμα

Εστω το περιοδικό σήμα $x(t) = e^{-|t-2|}$, $t \in [-1, 1]$

- (α) Βρείτε την εκθετική σειρά Fourier του σήματος.
- (β) Βρείτε την τριγωνομετρική σειρά Fourier του σήματος.

2ο Θέμα

Έστω η απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος:

$$2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

- (α) Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας του συστήματος, βάσει του μετασχηματισμού Fourier.
- (β) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση.

Υπόδειξη: $\alpha) \mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a + j\omega}$, $a > 0$, $\beta) \mathcal{F}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n X(\omega)$

Λύση 2ου Θέματος

1ο ερώτημα

$$2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 3y(t) = x(t) \Rightarrow \mathcal{F}\left\{2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 3y(t)\right\} = \mathcal{F}\{x(t)\} \Rightarrow 2\mathcal{F}\left\{\frac{d^2 y}{dt^2}\right\} + 5\mathcal{F}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 3\mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} \xrightarrow{\text{Υπόδειξη } \beta)} 2(j\omega)^2 Y(\omega) + 5(j\omega)^1 Y(\omega) + 3Y(\omega) = X(\omega) \Rightarrow (2(j\omega)^2 + 5(j\omega)^1 + 3) Y(\omega) = X(\omega) \Rightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{2(j\omega)^2 + 5(j\omega)^1 + 3}$$

2ο ερώτημα

$$H(\omega) = \frac{1}{2(j\omega)^2 + 5(j\omega)^1 + 3} \Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{(2j\omega + 3)(j\omega + 1)} \Rightarrow H(\omega) = \frac{A}{2j\omega + 3} + \frac{B}{j\omega + 1} \Rightarrow H(\omega) = \frac{A(j\omega + 1) + B(2j\omega + 3)}{(j\omega + 1)(2j\omega + 3)} \Rightarrow H(\omega) = \frac{j\omega(A + 2B) + (A + 3B)}{(j\omega + 1)(2j\omega + 3)} \Rightarrow \begin{cases} A + 2B = 0 \\ A + 3B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2B \\ -2B + 3B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2 \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow H(\omega) = -\frac{2}{2j\omega + 3} + \frac{1}{j\omega + 1} = -\frac{2}{2(j\omega + 1.5)} + \frac{1}{j\omega + 1} = -\frac{1}{j\omega + 1.5} + \frac{1}{j\omega + 1} \xrightarrow{\text{Υπόδειξη } \alpha)} h(t) = -e^{-1.5t}u(t) + e^{-t}u(t)$$

3ο Θέμα

Έστω ένα αναλογικό σήμα της μορφής

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

και ένα διακριτό σήμα

$$x_d(n) = x(0.001n), n \geq 0$$

Να υπολογιστούν οι ενέργειες των παραπάνω σημάτων και να τις συγκρίνετε. Τί παρατηρείτε;

Λύση 3ου Θέματος

Αρχικά υπολογίζουμε την ενέργεια του αναλογικού σήματος:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-t}u(t)|^2 dt \xrightarrow[u(t)=0, t<0]{u(t)=1, t\geq 0} E_x = \int_0^{\infty} |e^{-t}|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \left[-\frac{e^{-2t}}{2} \right]_0^{\infty} = \left[\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{e^{-2t}}{2} - \left(-\frac{e^{2 \cdot 0}}{2} \right) \right] = \left[0 + \frac{e^0}{2} \right] = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

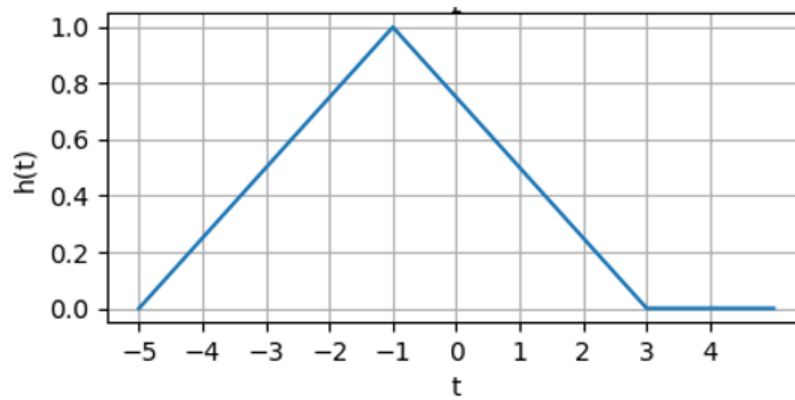
Εν συνεχεία, υπολογίζουμε την ενέργεια του διακριτού σήματος:

$$E_{x_d} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_d(t)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x(0.001n)|^2 \xrightarrow[u(t)=0, t<0]{u(t)=1, t\geq 0} E_{x_d} = \sum_{n=0}^{\infty} |e^{-0.001n}|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-0.002n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-0.002})^n.$$

Το εν λόγω άθροισμα είναι το άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $a_0 = e^{-0.002 \cdot 0} = e^0 = 1$ και λόγο $\lambda = e^{-0.002} < 1$. Άρα, η ενέργεια του διακριτού σήματος είναι $E_{x_d} = \frac{a_0}{1 - \lambda} = \frac{1}{1 - e^{-0.002}} \approx 500.05$

4ο Θέμα

Έστω σήμα $x(t)$ του οποίου η γραφική παράσταση είναι στην επόμενη σελίδα.



(α) Να εκφραστεί το παραπάνω σήμα με την χρήση της βηματικής συναρτήσεως

(β) Βρείτε με γραφικό τρόπο την συνέλιξη $x(t) * u(t)$

Λύση 2ου Θέματος

1ο ερώτημα

ΤΟ σήμα είναι τριγωνικός παλμός. Ο βασικός τριγωνικός παλμός είναι: $Tri(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ t+1, & -1 \leq t < 0 \\ -t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$.

Η συνάρτηση $y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & -0 \leq t \end{cases}$ μπορεί να γραφτεί βάσει της βηματικής συναρτήσεως $u(t)$ ως εξής:

$$y(t) = tu(t)$$

Επειδή ο άνω μεσαίος είναι μετατόπιση της $y(t)$ κατά μία μονάδα προς τα αριστερά και ο κάτω μεσαίος είναι μια μετατοπισμένη κατα μονάδα προς τα αριστερά ανάκλαση του $y(t)$, τότε ο βασικός τριγωνικός παλμός γράφεται ως εξής:

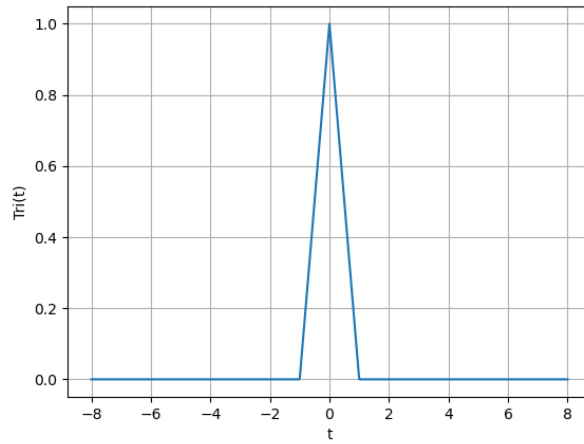
$$Tri(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ u(t+1)(t+1), & -1 \leq t < 0 \\ -u(1-t)(t-1), & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

Ο παλμός της εικόνας κατασκευάζεται από τον βασικό τριγωνικό παλμό ως εξής:

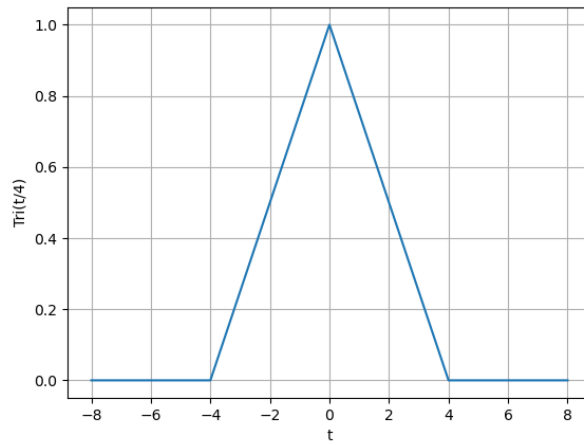
1. Διαστολή του βασικού τριγωνικού παλμού κατά 4, διότι το διάστημα του μη μηδενικού παλμού είναι ορίζεται για $t \in [-1, 1]$ συνολικού μήκους 2, ενώ το διάστημα του μη μηδενικού παλμού στο σήμα της εικόνας είναι ορίζεται για $t \in [-5, 3]$ συνολικού μήκους $(3-(-5))=8$. Άρα ο λόγος κλιμάκωσης είναι $a = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ και το αποτέλεσμα της διαστολής είναι το σήμα

$$x_1(t) = Tri\left(\frac{t}{4}\right)$$

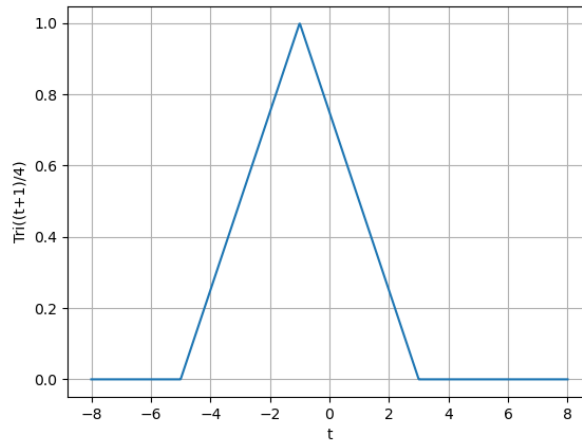
2. Μετατόπιση του ενδιάμεσου σήματος



Σχήμα 1: Βασικός τριγωνικός παλμός



Σχήμα 2: Διεσταλμένος βασικός τριγωνικός παλμός



Σχήμα 3: Μετατόπιση του διεσταλμένου βασικού τριγωνικού παλμού

5ο Θέμα

Έστω ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου το οποίο έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+3)}, \quad -3 < \operatorname{Re}[s] < 1$$

και σήμα εισόδου $x(t)$ με μετασχηματισμό Laplace:

$$X(s) = \frac{1}{s+1}$$

- Να βρεθεί η κρουστική απόκριση. Είναι το σύστημα ευσταθές;
- Να βρεθεί η έξοδος $y(t)$ για όλα τα πιθανά πεδία σύγκλισης του $X(s)$.

Υπόδειξη: α) $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}[s] > -a$ β) $\mathcal{L}\{-e^{-at}u(-t)\} = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}[s] < -a$, γ)
 $y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(s) = X(s)H(s), R_y = R_x \cap R_h$

Λύση 5ου Θέματος

1ο ερώτημα

Αφού ο αριθμός $s = 0$ ανήκει στο πεδίο σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace, τότε το σύστημα είναι ευσταθές. Για την εύρεση της $h(t)$ καταφεύγουμε στην αναγραφή της $H(s)$ ως άθροισμα απλο-ύστερων κλασμάτων:

$$H(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s+3)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3} \\
&= \frac{A(s+3) + B(s-1)}{(s-1)(s+3)} \\
&= \frac{s(A+B) + 3A - B}{(s-1)(s+3)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 3A-B=1 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ (3A-B) + (A+B) = 1+1 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} B=1-A \\ 4A=2 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} B=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \\ A=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \\
H(s) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+3}
\end{aligned}$$

Ο όρος $\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s+(-1)}$ μπορεί να προέρχεται:

- Είτε από το σήμα $e^t u(t)$ αν $Re[s] > 1$ (απορρίπτεται διότι δεν υπάρχει επικάλυψη με το πεδίο συγκλίσεως της $H(s)$).
- Είτε από το σήμα $-e^t u(-t)$ αν $Re[s] < 1$ (αποδεκτή λύση).

Ο όρος $\frac{1}{s+3} = \frac{1}{s+3}$ μπορεί να προέρχεται:

- Είτε από το σήμα $e^{-3t} u(t)$ αν $Re[s] > -3$ (αποδεκτή λύση).
- Είτε από το σήμα $-e^{-3t} u(-t)$ αν $Re[s] < -3$ (απορρίπτεται διότι δεν υπάρχει επικάλυψη με το πεδίο συγκλίσεως της $H(s)$).

Άρα

$$h(t) = -\frac{1}{2} \cdot e^t u(-t) + \frac{1}{2} \cdot e^{-3t} u(t)$$

2ο ερώτημα

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1}{s+1} \frac{s+1}{(s-1)(s+3)} = \frac{1}{(s-1)(s+3)}, R_y = R_x \cap R_h$$

Ο μετασχηματισμός Laplace $X(s) = \frac{1}{s+1}$ έχει 2 πιθανές περιοχές συγκλίσεως:

- $\mathbf{R}[s] = \{s : Re[s] < -1\} \Rightarrow R_y = R_x \cap R_h = \{s : -3 < Re[s] < -1\}$
- $\mathbf{R}[s] = \{s : Re[s] > -1\} \Rightarrow R_y = R_x \cap R_h = \{s : -1 < Re[s] < 1\}$

Πριν αναλυθεί κάθε περίπτωση, θα μετατρέψουμε τον μετασχηματισμό Laplace $Y(s)$ σε άθροισμα απλο-
ύστερων κλασμάτων:

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{1}{(s-1)(s+3)} \\
 &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3} \\
 &= \frac{A(s+3) + B(s-1)}{(s-1)(s+3)} \\
 &= \frac{s(A+B) + 3A - B}{(s-1)(s+3)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 3A-B=1 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 4A-(A+B)=1 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ 4A=1 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{4} \\ A=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \\
 H(s) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+3}
 \end{aligned}$$

Ο όρος $\frac{1}{s-1} = \frac{1}{s+(-1)}$ μπορεί να προέρχεται:

- Είτε από το σήμα $e^t u(t)$ αν $Re[s] > 1$.
- Είτε από το σήμα $-e^t u(-t)$ αν $Re[s] < 1$.

Ο όρος $\frac{1}{s+3} = \frac{1}{s+3}$ μπορεί να προέρχεται:

- Είτε από το σήμα $e^{-3t} u(t)$ αν $Re[s] > -3$.
- Είτε από το σήμα $-e^{-3t} u(-t)$ αν $Re[s] < -3$.

Στην 1η περίπτωση ($R_y = \{s : -3 < Re[s] < -1\}$), μερική έστω επικάλυψη έχουν τα σήματα $-e^t u(-t)$ και $e^{-3t} u(t)$, οπότε

$$y(t) = -\frac{1}{4} e^t u(-t) - \frac{1}{4} e^{-3t} u(t)$$

Στην 2η περίπτωση ($R_y = \{s : -1 < Re[s] < 1\}$), μερική έστω επικάλυψη έχουν τα σήματα $-e^t u(-t)$ και $e^{-3t} u(t)$, οπότε

$$y(t) = -\frac{1}{4} e^t u(-t) - \frac{1}{4} e^{-3t} u(t)$$

6ο Θέμα

Δεδομένης της παρακάτω διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = e^{-t}u(t), \quad x(0) = 1 \quad (1)$$

χωρίς να βρείτε το αρχικό σήμα $x(t)$ υπολογίστε τις παρακάτω ποσότητες:

(α) μονόπλευρο Laplace του σήματος $g(t) = \int_{-\infty}^t x(2\tau)d\tau$

(β) μονόπλευρο Laplace του σήματος $k(t) = [x(2t)]'$

- Υπόδειξη: α) $\mathcal{ML}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}$, $\mathcal{Re}[s] > -a$, β) $\mathcal{ML}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s} + \int_{-\infty}^0 x(\tau)d\tau$, $R \cap \{s : \mathcal{Re}[s] > 0\}$, γ) $\int_{-\infty}^0 x(t)dt = 0$, δ) $\mathcal{ML}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)$ με περιοχή σύγκλισης $\frac{s_1}{a} < \mathcal{Re}[s] < \frac{s_2}{a}$, ε) $\mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)$ με ίδια περιοχή σύγκλισης

Λύση του Θέματος

1ο ερώτημα

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) &= e^{-t}u(t), \quad x(0) = 1 \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)\right\} = \mathcal{ML}\{e^{-t}u(t)\}, \quad x(0) = 1 \xrightarrow{\text{Υπόδειξη α)}} \\ \mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + 2\mathcal{ML}\{x(t)\} &= \frac{1}{s+1}, \quad \mathcal{Re}[s] > -1 \xrightarrow{\text{Υπόδειξη ε)}} sX(s) - x(0) + 2X(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow \\ X(s)(s+2) &= \frac{1}{s+1} + x(0), \quad \mathcal{Re}[s] > -1 \Rightarrow X(s)(s+2) = \frac{1}{s+1} + x(0), \quad \mathcal{Re}[s] > -1 \Rightarrow X(s)(s+2) = \\ \frac{1}{s+1} + 1, \quad \mathcal{Re}[s] > -1 \Rightarrow X(s)(s+2) &= \frac{s+2}{s+1} + 1, \quad \mathcal{Re}[s] > -1 \Rightarrow X(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)}, \quad \mathcal{Re}[s] > \\ -1 \Rightarrow X(s) &= \frac{1}{s+1}, \quad \mathcal{Re}[s] > -1 \end{aligned}$$

Βάσει των υποδείξεων β) και γ), προκύπτει ότι $\mathcal{ML}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s} + \int_{-\infty}^0 x(\tau)d\tau = \frac{1}{s(s+1)} + 0 = \frac{1}{s(s+1)}$, $\mathcal{Re}[s] = [\mathcal{Re}[s] > -1] \cap [\mathcal{Re}[s] > 0] = \mathcal{Re}[s] > 0$.

Άρα το σήμα $g(t)$, το οποίο είναι η συσταλμένη κατά 2 φορές παράγωγος του $x(t)$, θα έχει, βάσει της υποδείξεως δ) μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace, $\mathcal{ML}\{g(t)\} = \mathcal{ML}\{x'(2t)\} = \frac{1}{|2|}\left(\frac{1}{\frac{s}{2}(\frac{s}{2}+1)}\right) = \frac{1}{s(\frac{s}{2}+1)}$, $\mathcal{Re}[s] > 0$.

2ο ερώτημα

Αρχικά μπορούμε να βρούμε τον μετασχηματισμό Laplace τη παραγώγου του $x(t)$. Βάσει της υποδείξεως ε), ισχύει ότι $\mathcal{ML} \left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} = sX(s) - x(0) = s \frac{1}{s+1} - 1 = \frac{s - (s+1)}{s+1} = -\frac{1}{s+1}$, $\mathcal{Re}[s] > -1$. Άρα το σήμα $k(t)$, το οποίο είναι η συσταλμένη κατά 2 φορές παράγωγος του $x(t)$, θα έχει, βάσει της υποδείξεως δ) μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace, $\mathcal{ML} \{k(t)\} = \mathcal{ML} \{x'(2t)\} = \frac{1}{|2|} \left(-\frac{1}{\frac{s}{2} + 1} \right) = -\frac{1}{s+2}$, $\mathcal{Re}[s] > -\frac{1}{2}$.