# Σήματα και Συστήματα

# Σήματα lab 5- Συνέλιξη



Κώστας Μαριάς
Ρούλα Χατζάκη

# Συνέλιξη

## Το ολοκλήρωμα της συνέλιξης (συγκερασμού).

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Το σήμα εξόδου του συστήματος δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως ***ολοκλήρωμα της συνέλιξης***, και συμβολίζεται ως

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

Το ***ολοκλήρωμα της συνέλιξης*** γράφεται και ως

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

# Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave )

❖ Άσκηση 1:

Έστω το Γραμμικό Χρονικά Αμετάβλητο σύστημα, $x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$

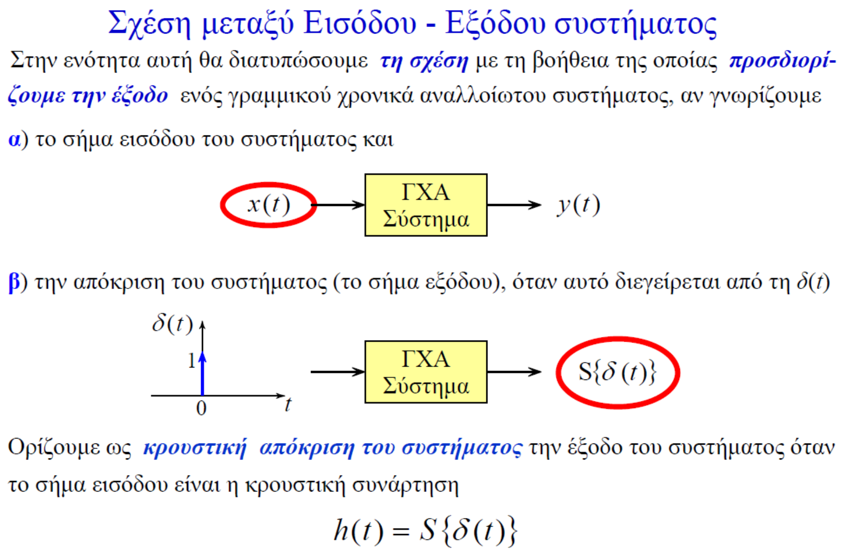
με $x(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 2\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$ και κρουστική απόκριση $h(t)=\begin{cases}1-t, & 0\le t\le 1\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases}$

βρείτε την έξοδο του συστήματος y(t).

Λύση:

Από την θεωρία έχουμε δει ότι, η έξοδος ενός συστήματος υπολογίζεται από την συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης του συστήματος με το σήμα εισόδου του συστήματος.

!!!Στην Άσκηση 1 εξετάζουμε την θεωρητική επίλυση της συνέλιξης.



Σχέση μεταξύ Εισόδου - Εξόδου συστήματος

Στην ενότητα αυτή θα διατυπώσουμε ***τη σχέση*** με τη βοήθεια της οποίας ***προσδιορίζουμε την έξοδο*** ενός γραμμικού χρονικά αναλλοίωτου συστήματος, αν γνωρίζουμε

***α***) το σήμα εισόδου του συστήματος και



***β***) την απόκριση του συστήματος (το σήμα εξόδου), όταν αυτό διεγείρεται από τη $\delta(t)$



Ορίζουμε ως ***κρουστική απόκριση του συστήματος*** την έξοδο του συστήματος όταν το σήμα εισόδου είναι η κρουστική συνάρτηση

$$h(t) = S\{\delta(t)\}$$

# Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave )

❖ Άσκηση 1:

- 1ο βήμα ***t->τ*** και σχεδιασμός σημάτων

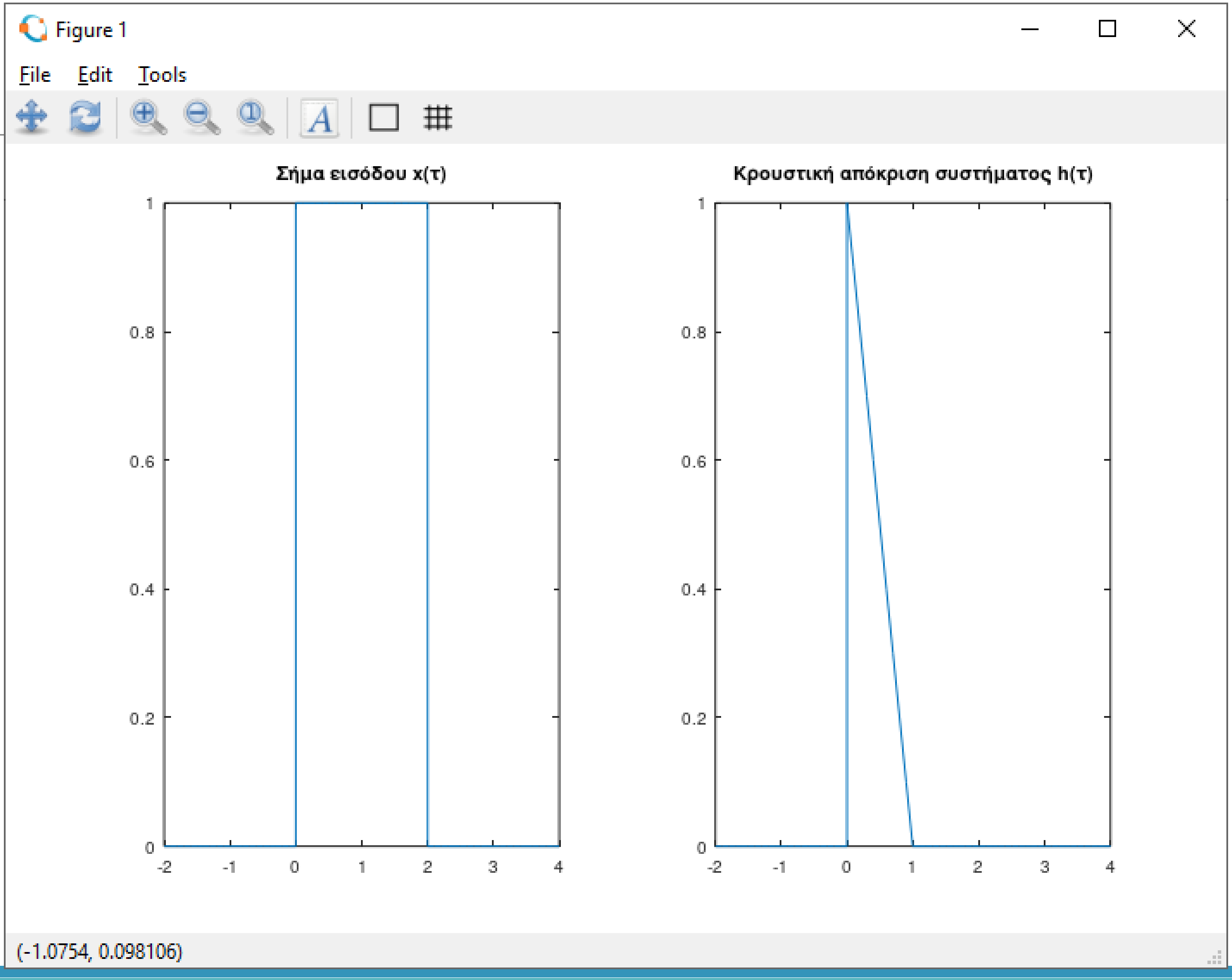
```
clear all; close all; clc;
tx1=-2:0.1:0; % χ(τ)=0 αλλού, επιλέγω να αναπαραστήσω απο -2 εως 0
tx2=0:0.1:2; % χ(τ)=1  απο 0 εως 2
tx3=2:0.1:4; % χ(τ)=0 αλλού επιλέγω να αναπαραστήσω απο 2 εως 4
tx=[tx1 tx2 tx3]; %  διάνυσμα χρόνου του σήματος
x1=zeros(size(tx1)); % δημιουργώ τμηματικά το σήμα για 0 και 1
x2=ones(size(tx2));
x3=zeros(size(tx3));
x=[x1 x2 x3];%  διάνυσμα σήματος
subplot (1,2,1)
plot(tx,x)
title ('Σήμα εισόδου x(τ)')
```

```
% Ομοίως για την κρουστική απόκριση
th1=-2:0.1:0;
th2=0:0.1:1;
th3=1:0.1:4;
th=[th1 th2 th3];
h1=zeros(size(th1));
h2=1-th2;
h3=zeros(size(th3));
h=[h1 h2 h3];
subplot (1,2,2)
plot(th,h)
title ('Κρουστική απόκριση συστήματος h(τ)')
```

# Συνέλιξη (θεωρητική

❖ Άσκηση 1:

- 1ο βήμα ***t->τ*** και σχεδιασμός σημάτων



# Συνέλιξη (θεωρητική ε

❖ Άσκηση 1:

» %Αναπαράσταση στο ίδιο γράφημα

» figure(2)

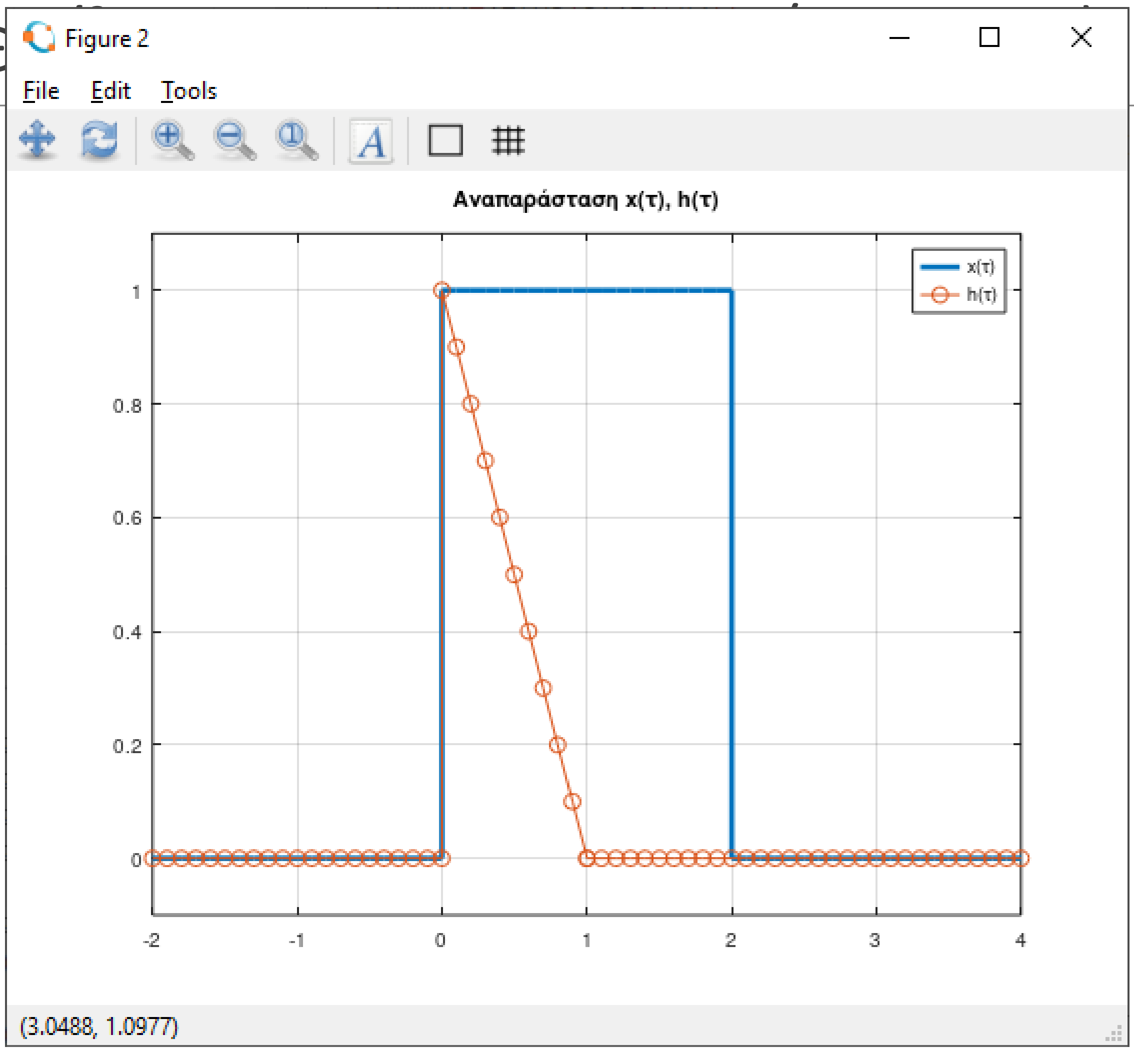
» plot(tx,x,'linewidth',2,th,h,'-o')

» ylim([-0.1 1.1])

» legend('x(τ)', 'h(τ)')

» grid

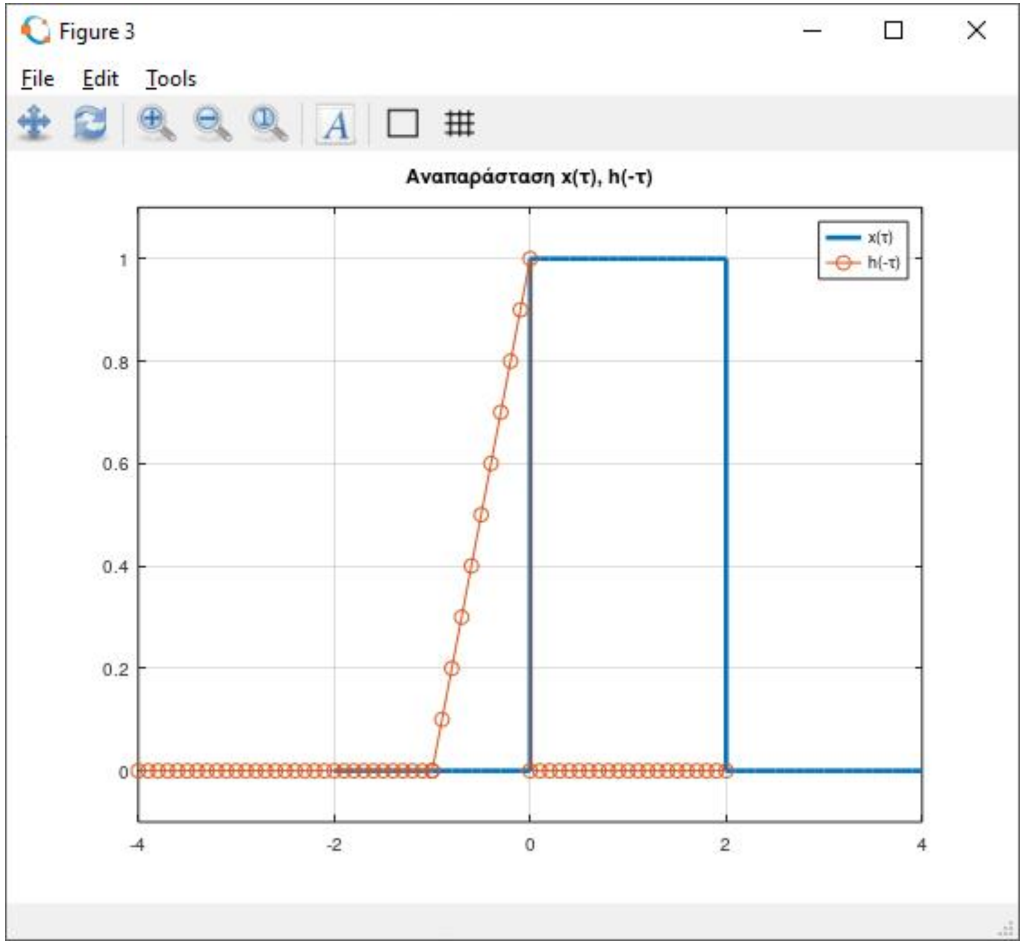
» title ('Αναπαράσταση x(τ), h(τ)')



# Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave )

- Άσκηση 1:
  - 2ο βήμα ***Ανάκλαση,*** επιλέγουμε να ανακλάσουμε το *h(τ)* δηλαδή *h(-τ) (*θα μπορούσαμε και το χ(τ)).

```
figure(3)
plot(tx,x,'linewidth',2,-th,h,'-o') %ανάκλαση με -th
ylim([-0.1 1.1])
legend('x(τ)', 'h(-τ)')
grid
title ('Αναπαράσταση x(τ), h(-τ)')
```



# Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση

❖ <u>Άσκηση 1:</u>

- <u>3ο βήμα ***Μετατόπιση,*** </u>το h(-τ) μετατοπίζεται κατά t δηλαδή σχεδιάζουμε το h(t-τ), όπου t μια σταθερά. (θα εξετάσουμε το t=-2)).

» figure(4)

» t=-2;

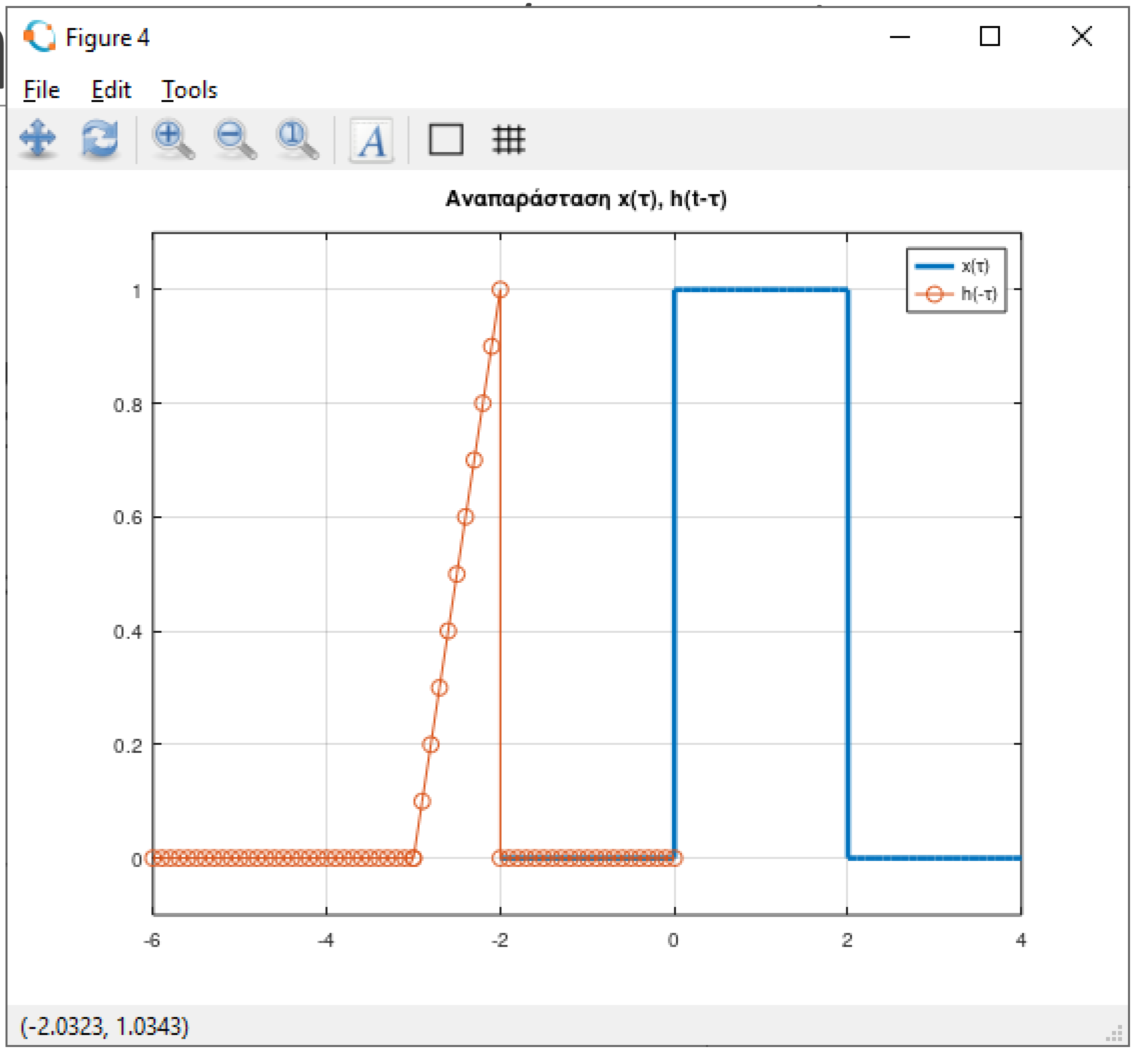
» plot(tx,x,'linewidth',2,-th+t,h,'-o') %μετατόπιση h(t-τ)

» ylim([-0.1 1.1])

» legend('x(τ)', 'h(-τ)')

» grid

» title ('Αναπαράσταση x(τ), h(t-τ)')



# Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave )

- Άσκηση 1:
  - $4^o$ βήμα ***Ολίσθηση,*** η τιμή της εξόδου *y(t)* εξαρτάται από την επικάλυψη (μηδενική, μερική, πλήρης) που εμφανίζουν τα σήματα *x(t), h(t)* την χρονική στιγμή *t*. Για να εξετάσουμε τις τιμές εξόδου, ολισθαίνουμε το σήμα *h(t) από -∞ έως +∞, ενώ το x(t) παραμένει σταθερό.*
    - Για t<0 (εξετάζουμε t=-2) τα σήματα έχουν μηδενική επικάλυψή άρα η έξοδος y(t)=0.
    - Για 0<t<1 (εξετάζουμε t=0,5) τα σήματα έχουν μερική επικάλυψή.
    - Για 1<t<2 (εξετάζουμε t=1,5) τα σήματα έχουν πλήρης επικάλυψή.
    - Για 2<t<3 (εξετάζουμε t=2,5) τα σήματα έχουν μερική επικάλυψή
    - Για 3<t<4 (εξετάζουμε t=3,5) τα σήματα έχουν μηδενική επικάλυψή. άρα η έξοδος y(t)=0.

# Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave )

- <u>Άσκηση 1:</u>
  - <u>4$^{o}$ βήμα ***Ολίσθηση***</u>

```
» figure(5)
» t=-2; t1=0.5; t2=1.5; t3=2.5; t4=3.5;
» subplot(3,2,1)
» plot(tx,x,'linewidth',2,-th+t,h,'-o')
» ylim([-0.1 1.1])
» legend('x(τ)', 'h(t-τ)')
» grid
» title ('Επικάλυψη για t<0 (εξετάζουμε t=-2)')
» hold on
» subplot(3,2,2)
» plot(tx,x,'linewidth',2,-th+t1,h,'-o')
» ylim([-0.1 1.1])
» legend('x(τ)', 'h(t-τ)')
» grid
» title ('Επικάλυψη 0<t<1 (εξετάζουμε t=0,5)')
» hold on
» subplot(3,2,3)
» plot(tx,x,'linewidth',2,-th+t2,h,'-o')
» ylim([-0.1 1.1])
» legend('x(τ)', 'h(t-τ)')
» grid
» title ('Επικάλυψη 1<t<2 (εξετάζουμε t=1,5)')
» hold on
» subplot(3,2,4)
» plot(tx,x,'linewidth',2,-th+t3,h,'-o')
» ylim([-0.1 1.1])
» legend('x(τ)', 'h(t-τ)')
» grid
» title ('Επικάλυψη 2<t<3 (εξετάζουμε t=2,5)')
» hold on
» subplot(3,2,5)
» plot(tx,x,'linewidth',2,-th+t4,h,'-o')
» ylim([-0.1 1.1])
» legend('x(τ)', 'h(t-τ)')
» grid
» title ('Επικάλυψη 3<t<4 (εξετάζουμε t=3,5)')
```

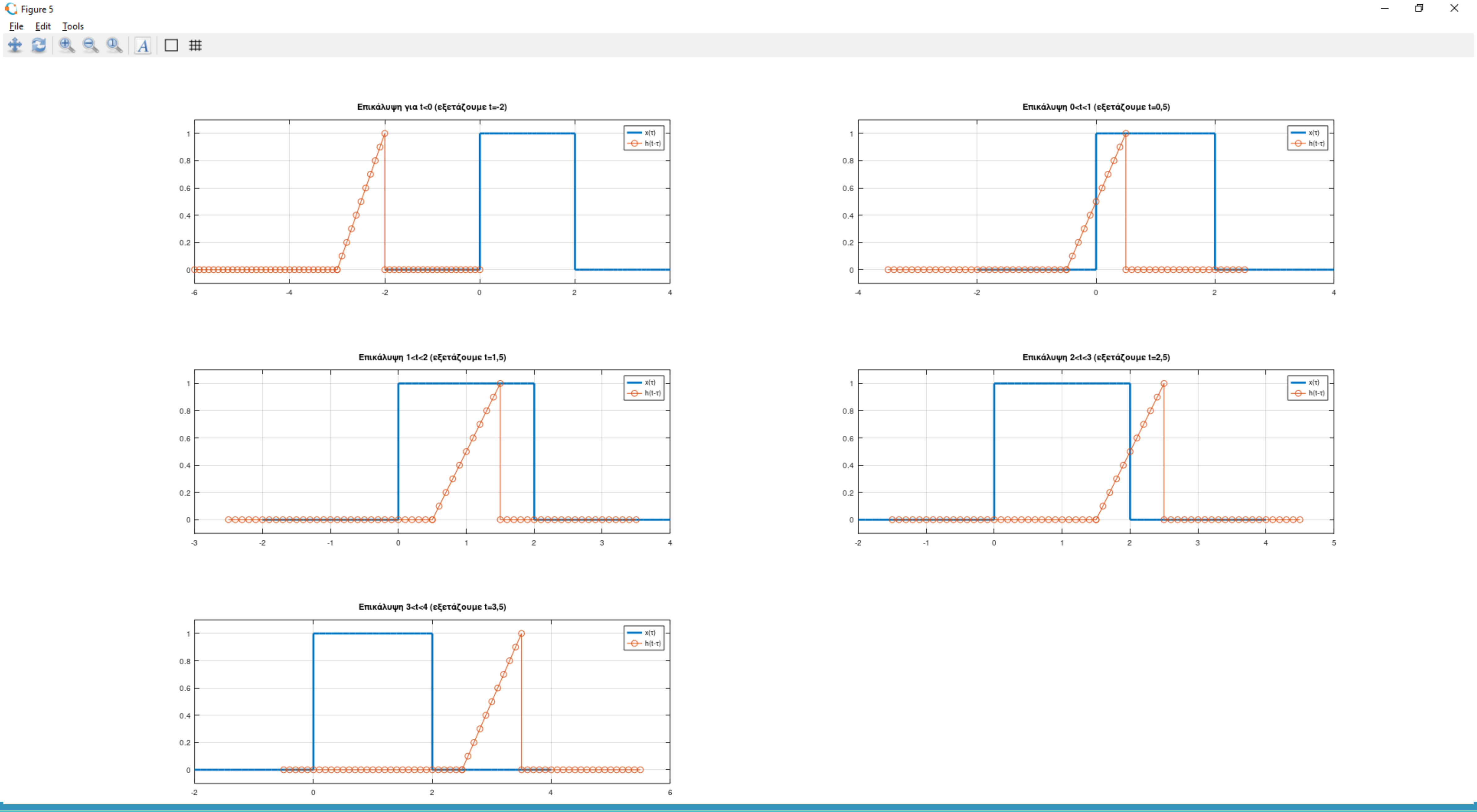


Figure 5
File Edit Tools
Επικάλυψη για t<0 (εξετάζουμε t=-2)
Επικάλυψη 0<t<1 (εξετάζουμε t=0,5)
Επικάλυψη 1<t<2 (εξετάζουμε t=1,5)
Επικάλυψη 2<t<3 (εξετάζουμε t=2,5)
Επικάλυψη 3<t<4 (εξετάζουμε t=3,5)
x(τ)
h(t-τ)

# Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave )

❖ <u>Άσκηση 1:</u>

- 5ο βήμα ***<u>Καθορισμός ορίων ολοκληρωμάτων και υπολογισμός εξόδου.</u>***
  - Για t<0 τα σήματα έχουν μηδενική επικάλυψή άρα η έξοδος y(t)=0.
  - Για 0<t<1, τα σήματα έχουν μερική επικάλυψή, τα όρια του ολοκληρώματά θα αντιστοιχούν στο εμβαδόν της αλληλοεπικάλυψης των σημάτων, το x(τ)=1 και το *h(t), δίνεται* αντικαθιστώντας το *t* με *t-τ* στο αρχικό σήμα.

    $$y(t)=\int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau . \quad h(t-\tau)=1-(t-\tau)=1-t+\tau$$

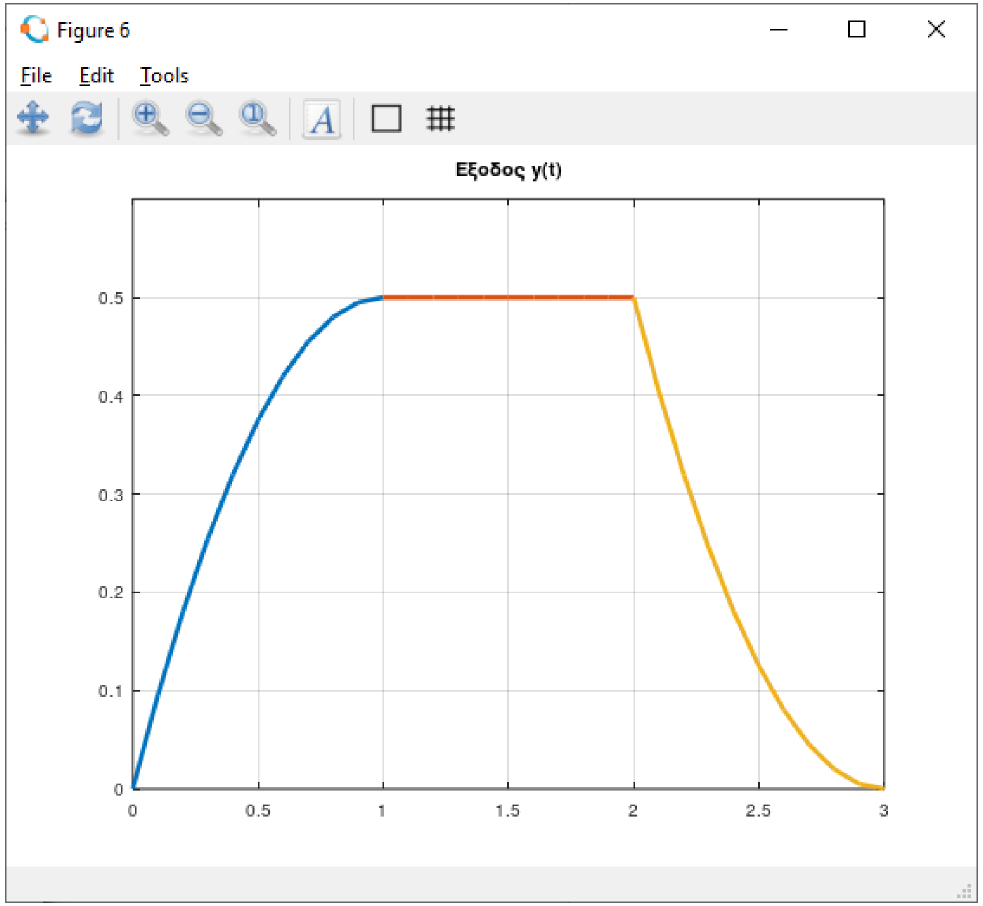
  - Για 1<t<2 τα σήματα έχουν πλήρης επικάλυψή $y(t)=\int_{t-1}^{t} 1-t+\tau d\tau .$ το οποίο μας δίνει $y(t)=\frac{1}{2},\ 1<t<2.$
  - Για 2<t<3 τα σήματα έχουν μερική επικάλυψή $y(t)=\int_{t-1}^{2} 1-t+\tau d\tau$ το οποίο μας δίνει $y(t)=\frac{1}{2}(3-t)^2,\ 2<t<3.$
  - Για t>3 τα σήματα έχουν μηδενική επικάλυψή. άρα η έξοδος y(t)=0.
- Επομένως $y(t)=\begin{cases} t-t^2/2 & 0\le t<1 \\ 1/2 & 1\le t<2 \\ (3-t)^2/2 & 2\le t<3 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$

# Συνέλιξη (θεωρητική επίλυση στο MATLAB/Octave )

❖ <u>Άσκηση 1:</u>

- 5ο βήμα ***Καθορισμός ορίων ολοκληρωμάτων και υπολογισμός εξόδου.***

```
% Σχεδιασμός εξόδου y(t)
t1y=0:0.1:1;
t2y=1:0.1:2;
t3y=2:0.1:3;
y1=t1y-(t1y.^2)/2;
y2=0.5*ones(size(t2y));
y3=0.5*((3-t3y).^2);
figure(6)
plot(t1y,y1,'linewidth',2,t2y,y2,'linewidth',2,t3y,y3,'linewidth',2)
ylim([0 0.6])
grid
title ('Εξοδος y(t)')
```



# Συνέλιξη (Conv in MATLAB/Octave)

- Στο MATLAB/Octave η Συνέλιξη υλοποιείται με την εντολή **conv**. Αναζητήστε την περιγραφή της με >> *help conv*

  *conv Convolution and polynomial multiplication.*

  *C = conv(A, B) convolves vectors A and B.*

  *The resulting vector is length LENGTH(A)+LENGTH(B)-1*

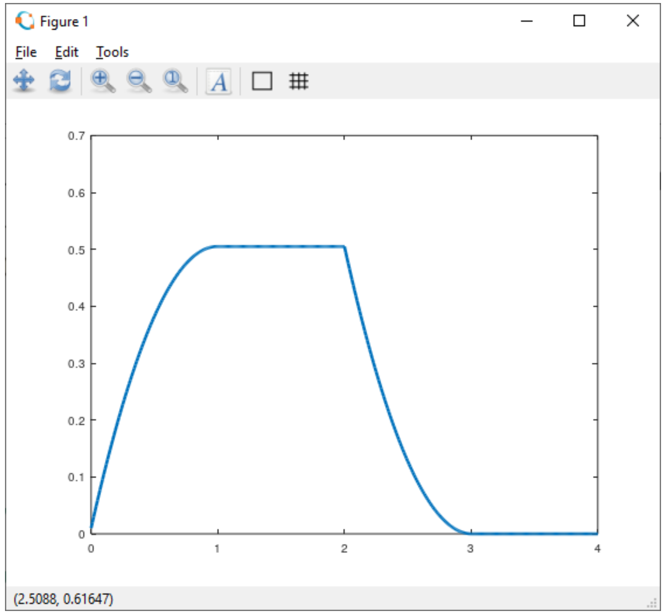
  *If A and B are vectors of polynomial coefficients, convolving them is equivalent to multiplying the two polynomials.*

- *Για να επιτευχθεί η συνέλιξη 2 σημάτων συνεχούς χρόνου με χρήση της conv χρειάζεται να τηρούνται τα παρακάτω:*

  1. *Τα δύο σήματα πρέπει είναι ορισμένα στο ίδιο χρονικό διάστημα. (Επιλέγουμε το χρονικό διάστημα του σήματος με την μεγαλύτερη διάρκεια)*
  2. *Τα χρονικά διάστημα όπου ορίζεται το σήμα δεν πρέπει να επικαλύπτονται.(π.χ 1 για 0<t<1, 0 για 1<t<2)*
  3. *Ο σωστός υπολογισμός της εξόδου γίνεται πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα της conv με το χρονικό βήμα, καθώς το MATLAB/Octave προσεγγίζει την συνέλιξη ως άθροισμα.*
  4. *Το χρονικό διάστημα σχεδιασμού ορίζεται ως το διπλάσιο του χρονικού διαστήματος που ορίζονται δυο τα σήματα, καθώς length(y)= length (x)+ length(h)-1.*

# Συνέλιξη

❖ <u>Άσκηση 2: </u>Σύμφωνα με τα παραπάνω θα υλοποιήσουμε την άσκησης 1 με χρήση της εντολής conv. Άρα τα σήματα θα ορίζονται ως εξής $x(t)=1,\ 0\le t\le 2$ $\quad h(t)=\begin{cases}1-t, 0\le t\le 1\\ 0,\ 1<t\le 2\end{cases}.$




```
% Convolution y(t)=h(t)*x(t),using conv
step=0.01;
t=0:step:2;
x=ones(size(t));
t1=0:step:1;
t2=1+step:step:2 %1+step για αποφυγή επικάλυψη χρονικών διαστημάτων, Σημ. 2
h1=1-t1;
h2=zeros(size(t2)); %Ορίζω στο μεγαλύτερο χρονικό διάστημα Σημ.1
h=[h1 h2];
y=conv(x,h)*step; %Πολλαπλασιάζω με time step Σημ.3
ty=0:step:4;%ορίζω τον χρόνο σχεδίασης στο διπλάσιο του χρόνου ορισμού των σημάτων.Σημ.4
plot(ty,y,'linewidth',2);
```

*Ελέγξτε τι θα συμβεί στο σήμα εξόδου σας εάν δεν τηρούνται οι 4 σημειώσεις που δόθηκαν.

# Συνέλιξη

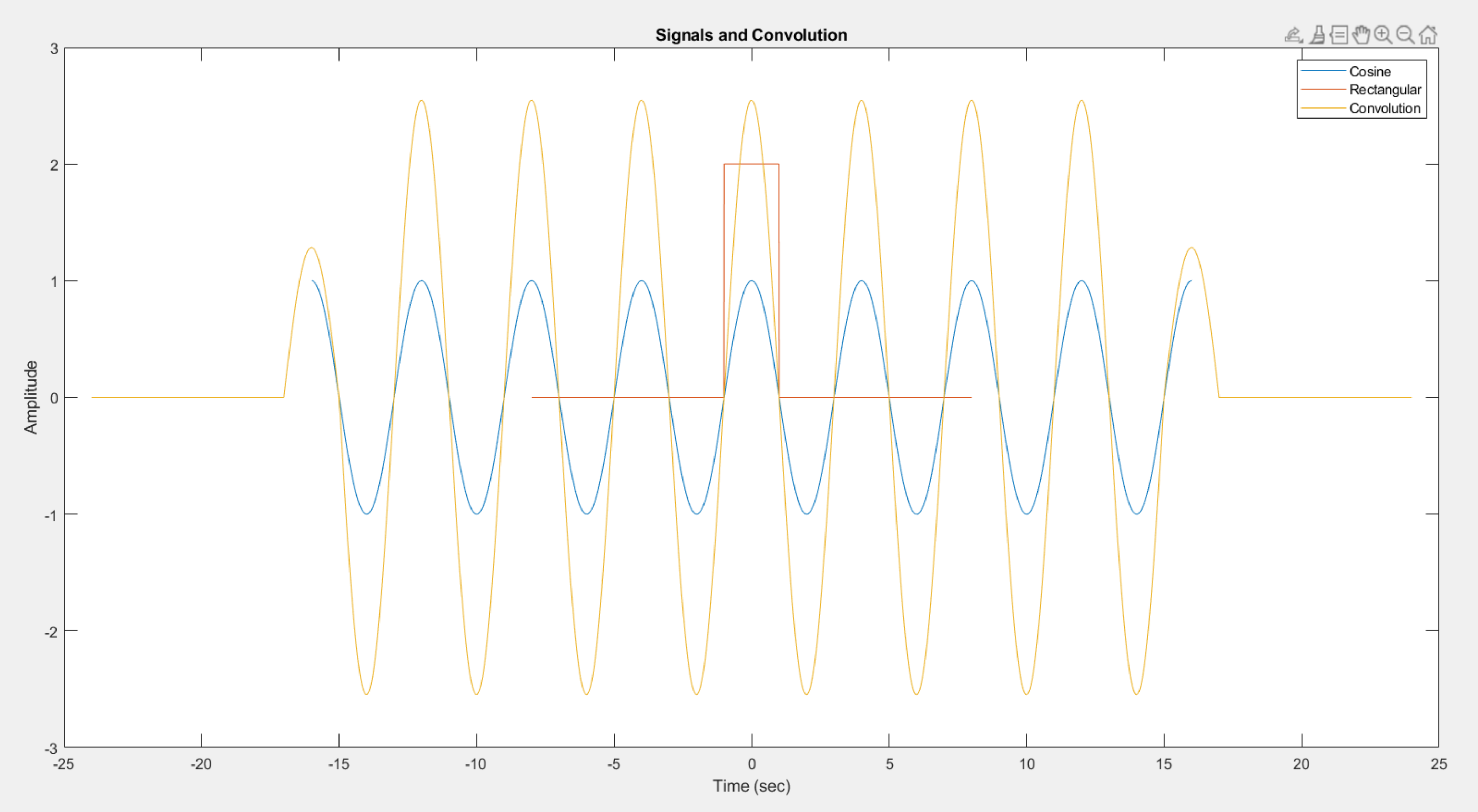
❖ <u>Άσκηση 3:</u> Για τα παρακάτω σήματα συνεχούς χρόνου, υπολογίστε την συνέλιξη τους.

$x(t) = \cos(\pi t/2), \ \ -5 \leq t \leq 5$ , $h(t) = 2rect(t/2)$ από –T/8 εως Tα/8

<u>Λύση</u>

```
» % Convolution y(t)=h(t)*x(t),using conv
» step = 0.01; % Βήμα χρόνου
» tx = -16:step:16; % Διανυσμα χρόνου για x(t)
» x = cos(pi * tx/ 2); % σήμα x(t)
» th = -8:step:8; % Διανυσμα χρόνου για h(t)
» h = 2*rectpuls(th/2); % h(t)
» ty = -24:step:24; % Διάνυσμα χρόνου συνέλιξης [tx1+th1, tx2+th2]
» y = conv(x,h)*step; % Συνέλιξη
» plot(tx, x, th, h,ty, y);
» xlabel('Time (sec)');
» ylabel('Amplitude');
» title('Signals and Convolution');
» legend('Cosine', 'Rectangular', 'Convolution');
```

❖ Άσκηση 3:

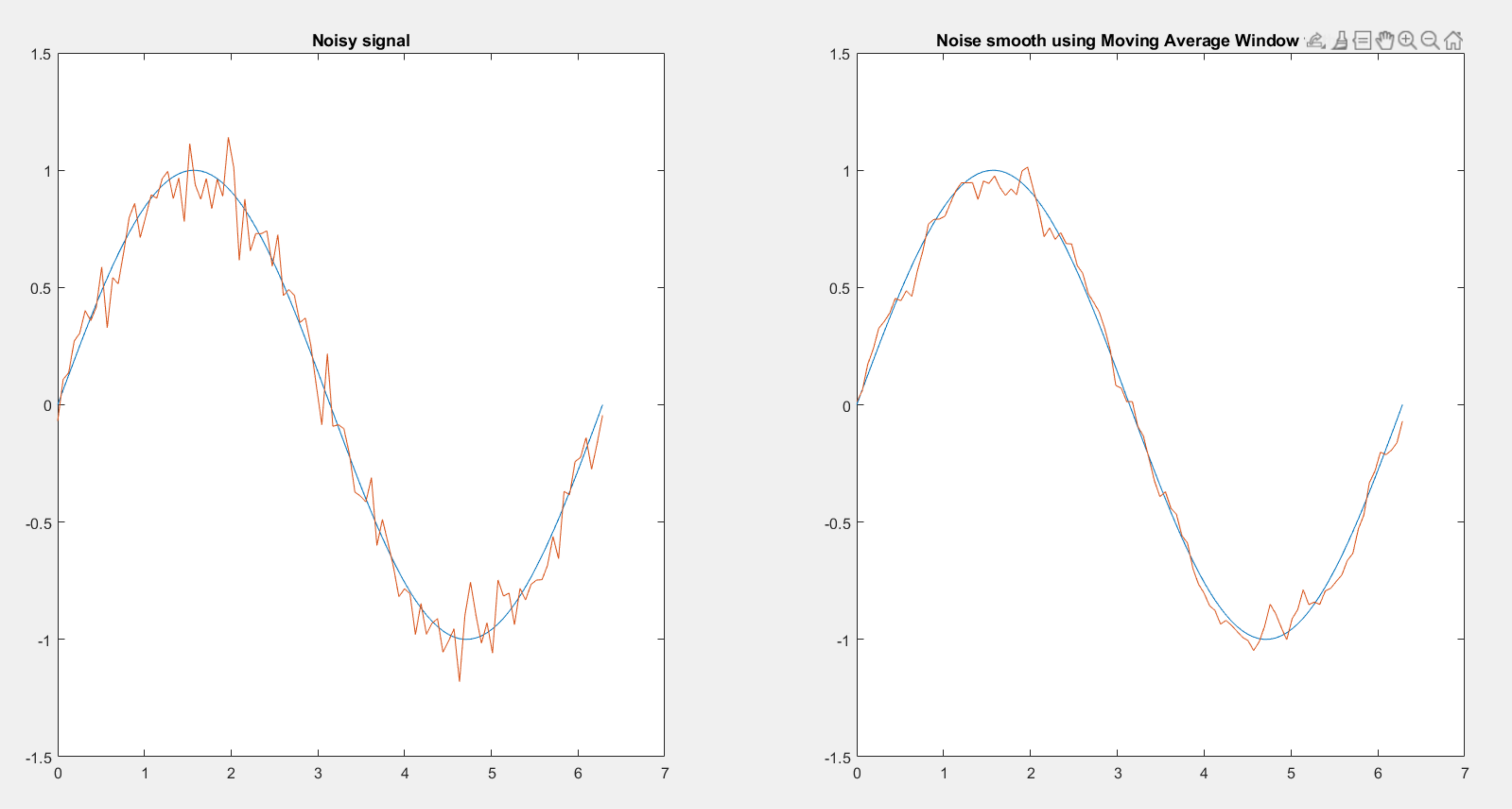

Signals and Convolution
Cosine
Rectangular
Convolution
Amplitude
Time (sec)
3
2
1
0
-1
-2
-3
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
25

# Συνέλιξη

❖ <u>Άσκηση 4</u>: Η conv χρησιμοποιείται και για την εφαρμογή φίλτρων στο σήμα, όπως αυτό του Moving Average Window

```
» x=linspace(0,2*pi,100);
» z=sin(x);
» noise1=normrnd(0,0.1,[1,length(z)]);%Δημιουργία θορύβου
» mask=ones(1,3); % Μάσκα [1 1 1] για Moving Average
» ysmooth=conv(z+noise1,mask,'same')/length(mask);% Εφαρμογή φίλτρου Moving Average με conv
» figure(1)
» subplot (1,2,1)
» plot(x,z,x,z+noise1)
» title('Noisy signal')
» subplot (1,2,2)
» plot(x,z,x,ysmooth)
» title('Noise smooth using Moving Average Window with conv ')
```

Άσκηση 4:



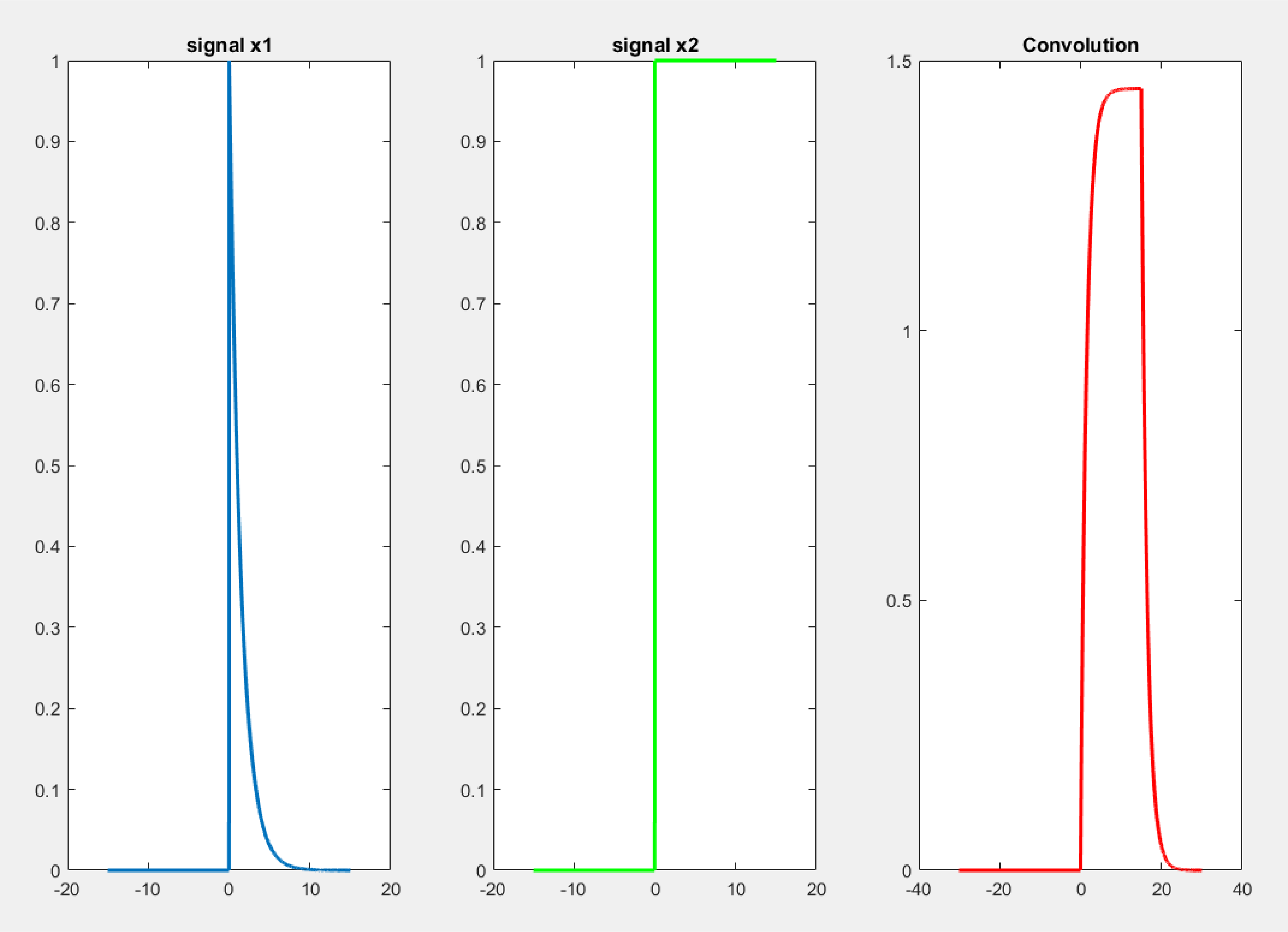
Noisy signal
Noise smooth using Moving Average Window
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
1
2
3
4
5
6
7

# Συνέλιξη

Άσκηση 5:  Υπολογίστε την συνέλιξη των σημάτων X1(t)= (1/2)^|t|.*u(t), X2(t)= u(t)

```
» step=0.01; %Βήμα χρόνου
» t1 = -15:step:15; %Διάνυσμα χρόνου
» x1 = (1/2).^abs(t1).*(t1>=0); %Πρώτο σήμα
» x2 = 1*(t1>=0); %SOS: Πολλαπλασιασμός με 1
» z = conv(x1,x2)*step; %Συνέλιξη
» tconv=2*t1(1):step:2*t1(end); %Άξονας χρόνου
» figure(1)
» subplot(1,3,1)
» plot(t1,x1,'linewidth', 2);
» title('signal x1')
» subplot(1,3,2)
» plot(t1,x2,'g','linewidth',2);
» title('signal x2')
» subplot(1,3,3)
» plot(tconv,z,'r','linewidth',2);
» title('Convolution')
```

Άσκηση 5:



signal x1
signal x2
Convolution
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-20
-10
0
10
20
1.5
1
0.5
0
-40
-20
0
20
40

# Αναφορές

Το παρών έγγραφο δημιουργήθηκε με βάση τα παρακάτω συγγράμματα, εκπαιδευτικά υλικά:


[1] Νικόλαος Ασημάκης, Μαρία Αδάμ, Σήματα και Συστήματα, ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ-Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2015.

[2] Β. Διακολουκάς, "Σήματα και Συστήματα," Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.

[3] Καραμπογιάς, Σ. (2003). Σήματα και Συστήματα. Αθήνα: Έκδοση Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

[4] VinayK. Ingle and John G.Proakis, "Digital Signal Processing," BookwareCompanion Series, 2003.

[5] Αναστασία Βελώνη, Σήματα και Συστήματα, Τμήμα Η.Υ.Σ, Ανώτατο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά Τεχνολογικού Τομέα