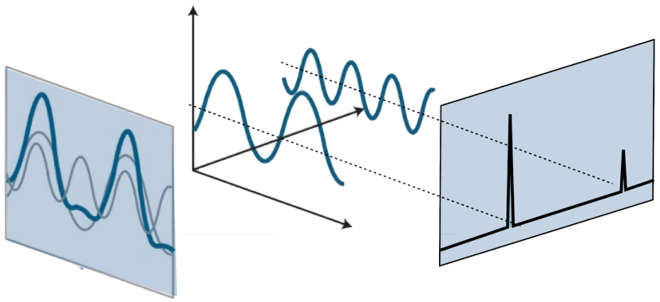
Σήματα και Συστήματα

Σήματα lab 7- Laplace

Κώστας Μαριάς
Ρούλα Χατζάκη

Μετασχηματισμός Laplace

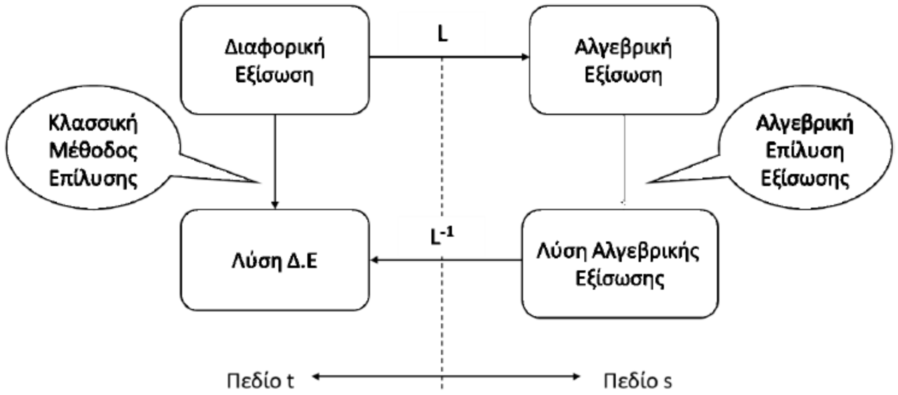


**!Laplace Transform? A visual explanation :*
https://www.youtube.com/watch?v=n2y7n6jw5d0&t=35s

- Ο μετασχηματισμός Laplace συχνά ερμηνεύεται ως ένας μετασχηματισμός από το πεδίο του χρόνου, όπου οι είσοδοι και οι έξοδοι είναι συναρτήσεις στο χρόνο, στο πεδίο της συχνότητας όπου οι ίδιες είσοδοι και έξοδοι είναι συναρτήσεις της μιγαδικής γωνιακής συχνότητας, σε ακτίνια ανά μονάδα χρόνου (rad/sec).

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, d(f).$, όπου *s* ο μιγαδικός αριθμός $s = \sigma + i\omega,$ με πραγματικούς αριθμούς *σ* και *ω*.

- Ο μετασχηματισμός Laplace ανάγει την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης στην επίλυση μιας αλγεβρικής εξίσωσης.



Σχέση μετασχηματισμού Laplace με Fourier

❖Fourier Transform

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{t})\, \mathrm{e}^{-j\omega t}\, d\, t$$

❖Laplace Transform

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$\downarrow$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\downarrow$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-\sigma t} \boxed{e^{-j\omega t}}\, dt$$

Παρατηρούμε ότι :

❖Για σ = 0 ο μετασχηματισμός Laplace συμπίπτει με τον μετασχηματισμό Fourier.

❖ Ο όρος $e^{-\sigma t}$ (που δεν υπάρχει στον μετασχηματισμό Fourier), είναι αυτός που εξασφαλίζει τη σύγκλιση του ολοκληρώματος άρα και την ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace ακόμα και όταν ο μετασχηματισμός Fourier δεν υπάρχει.

!?The intuition behind Fourier and Laplace transforms:
https://www.youtube.com/watch?v=3gjJDuCAEQQ

Μετασχηματισμός Laplace

- Στο Matlab /Octave μπορεί κανείς να βρει απευθείας τον μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης και τον αντίστροφο του κάνοντας χρήση των εντολών *laplace()* και *ilaplace()* αντίστοιχα.
  - Προϋπόθεση για την χρήση αυτών των εντολών είναι η δημιουργία συμβολικών μεταβλητών χρόνου *t* και μιγαδικής συχνότητας *s* με την χρήση της εντολής *syms*.
  - Πληκτρολογήστε help laplace
  - Περιγραφή στο MathWorks:

Laplace Transform

The Laplace transform $F = F(s)$ of the expression $f = f(t)$ with respect to the variable t at the point s is

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt.$$

Description

`laplace(f)` returns the Laplace Transform of `f`. By default, the independent variable is `t` and the transformation variable is `s`.

`laplace(f,transVar)` uses the transformation variable `transVar` instead of `s`.

`laplace(f,var,transVar)` uses the independent variable `var` and the transformation variable `transVar` instead of `t` and `s`, respectively.

Μετασχηματισμός Laplace

❖ Άσκηση 1: Βρείτε τους μετασχηματισμούς Laplace (ευθύ ή/και αντίστροφο) των σημάτων α) $f(t) = e^{-t}$, β) $\mathrm{F(s)} = \frac{1}{1+s}$, γ) z=1

```
» clear all; close all; clc;
» % %compute Laplace of x(t)=e^(-t)
» syms t s % δημιουργία συμβολικών μεταβλητών χρόνου t και μιγαδικής συχνότητας συχνότητας s
» f=exp(-t);
» laplace(f) % Μετασχηματισμός  Laplace
```

```
ans =

1/(s + 1)
```

```
» %compute inverse Laplace of F(s)=1/(1+s)
» F=1/(1+s);
» ilaplace(F) % Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace
```

```
ans =

exp(-t)
```

```
» %compute Laplace σταθερών συναρτήσεων
» z=1;
» laplace(z,s)
```

```
ans =

1/s
```

Μετασχηματισμός Laplace

❖ <u>Άσκηση 2:</u> Βρείτε τους μετασχηματισμούς Laplace (ευθύ και αντίστροφο) του σήματος: $f(t) = -1.25 + 3.5te^{-2t} + 1.25e^{-2t}$

```
» clear all; close all; clc;
» % %compute Laplace and inverse laplace of  f(t) = −1.25+ 3.5t e^(−2t) % +1.25e^(−2t)
» syms t s
» f=-1.25+3.5*t*exp(-2*t)+1.25*exp(-2*t);
» F=laplace(f,t,s) % ίδιο με F=laplace(f)
```

```
F =

5/(4*(s + 2)) + 7/(2*(s + 2)^2) - 5/(4*s)
```

```
» %F=laplace(-1.25+3.5*t*exp(-2*t)+1.25*exp(-2*t))% εναλλακτικά οι 2 γραμμές γράφονται σε μία
» %χρησιμοποιήστε την simplify()
» sim=simplify(F)
```

```
sim =

(s - 5)/(s*(s + 2)^2)
```

```
» %χρησιμοποιήστε την pretty()
» pretty(sim)
```

```
   s - 5
----------
         2
s (s + 2)
```

```
» %inverse laplace s-5/s(s+2)^2
» syms t s
» F=(s-5)/(s*(s+2)^2);
» il=ilaplace(F)
» sim_il= simplify(il)
» pretty(sim_il)
```

```
il =

(5*exp(-2*t))/4 + (7*t*exp(-2*t))/2 - 5/4


sim_il =

(5*exp(-2*t))/4 + (7*t*exp(-2*t))/2 - 5/4

exp(-2 t) 5   t exp(-2 t) 7   5
----------- + ------------- - -
     4              2         4
```

Μετασχηματισμός Laplace

❖ Άσκηση 3: Βρείτε τους μετασχηματισμούς Laplace : (ευθύ) $f(t) = 2t + 3\sin(2t) + e^{t}u(t-2)$, (αντίστροφο) $F(s) = \dfrac{e^{(-2s)}(s-5)}{s(s+2)^2}$

» clear all; close all; clc;

» % compute Laplace and inverse laplace of f(t) = 2t+3sin(2t)+(e^t)*u(t-2)

» syms t s

» f=2*t+3*sin(2*t)+exp(t)*heaviside(t-2); %H Heaviside αντιστοιχεί στην βηματική

» F=laplace(f)% laplace

» sim=simplify(F)

» pretty(sim)

```
F =

6/(s^2 + 4) + 2/s^2 + (exp(-2*s)*exp(2))/(s - 1)


sim =

exp(2 - 2*s)/(s - 1) + 6/(s^2 + 4) + 2/s^2

exp(2 - 2 s)      6       2
------------ + ------ + --
   s - 1        2        2
               s  + 4   s
```

» %inverse laplace e^(-2s)*(s-5)/s(s+2)^2

» syms t s

» F=exp(-2*s)*(s-5)/(s*(s+2)^2);

» il=ilaplace(F)

» sim_il= simplify(il)

» pretty(sim_il)

```
il =

5*heaviside(t - 2)*(exp(4 - 2*t)/4 + (exp(4 - 2*t)*(t - 2))/2 - 1/4) + heaviside(t - 2)*exp(4 - 2*t)*(t - 2)


sim_il =

-(heaviside(t - 2)*exp(4 - 2*t)*(5*exp(2*t - 4) - 14*t + 23))/4

  heaviside(t - 2) exp(4 - 2 t) (exp(2 t - 4) 5 - 14 t + 23)
- ----------------------------------------------------------
                              4
```

Μετασχηματισμός Laplace & Polynomials

❖ Ο μετασχηματισμός Laplace ενός σήματος μπορεί να εκφραστεί σε ρητή μορφή ως:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^{-2} + \cdots + b_{\mathrm{M}} s^{-\mathrm{M}}}{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^{-2} + \cdots + \alpha_{\mathrm{N}} s^{-\mathrm{N}}}$$

❖ Παραγοντοποιώντας αριθμητή και παρανομαστή:

$$X(s) = \frac{b_0 (s - z_1)(s - z_2) \ldots . (s - z_M)}{a_0 (s - p_1)(s - p_2) \ldots . (s - p_N)} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M} (s - z_k)}{\prod_{k=1}^{N} (s - p_k)} s^{M-N}$$

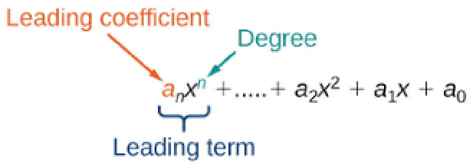
- αi , i = 1,2, … , N και bj , j = 1,2, … , M: σταθερές (πραγματικοί αριθμοί)
- M και N: οι βαθμοί των πολυωνύμων (θετικοί ακέραιοι).
- Μηδενικά (zeros): οι τιμές του s που μηδενίζουν τον αριθμητή ($z1$, $z2$, … , zM)
- Πόλοι (poles): οι τιμές του s που μηδενίζουν τον παρανομαστή ($p1$, $p2$, … , pN)
- Η περιοχή σύγκλισης (region of convergence- ROC)του Laplace μιας συνάρτησης δεν περιλαμβάνει πόλους.

Polynomials in Matlab/Octave

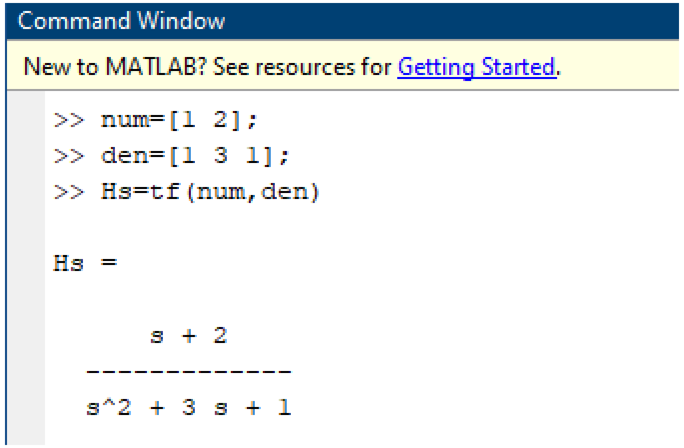
- Σε ότι αφορά το Matlab/Octave η αναπαράσταση των πολυωνύμων επιτυγχάνεται με την δημιουργία διανυσμάτων που περιγράφονται από τους συντελεστές (coefficients).

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \qquad B(s) = b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \ldots + b_{m-1} s + b_m \text{ and } A(s) = a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} s + a_n .$$

- Matlab: *b=[b1 b2 .. bm], a= [a1 a2 … an]*



Για παράδειγμα, $\dfrac{s+2}{s^2+3s+1}$ →



** Τα αρχικά «0» δεν έχουν επίδραση, π.χ τα διανύσματα [0 1 2] και [1 2] αντιπροσωπεύουν και τα δύο το πολυώνυμο s + 2. Τα ενδιάμεσα όμως διαφοροποιούν το πολυωνυμο, π.χ το διάνυσμα [1 2 0] αντιπροσωπεύει τα πολυώνυμα s (s + 2), αλλά το διάνυσμα [1 2] αντιπροσωπεύει s + 2.

Μετασχηματισμός Laplace

- Η συνάρτηση residue μετατρέπει μια ρητή συνάρτηση σε άθροισμα κλασμάτων (Partial fraction expansion).

Description

`[r,p,k] = residue(b,a)` finds the residues, poles, and direct term of a Partial Fraction Expansion of the ratio of two polynomials, where the expansion is of the form

$$\frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{r_n}{s-p_n} + \ldots + \frac{r_2}{s-p_2} + \frac{r_1}{s-p_1} + k(s).$$

The inputs to `residue` are vectors of coefficients of the polynomials `b = [bm ... b1 b0]` and `a = [an ... a1 a0]`. The outputs are the residues `r = [rn ... r2 r1]`, the poles `p = [pn ... p2 p1]`, and the polynomial `k`. For most textbook problems, `k` is `0` or a constant.

Μετασχηματισμός Laplace

❖ <u>Άσκηση 4:</u> Μετατρέψτε την συνάρτηση από ρητή σε άθροισμα κλασμάτων: $X(s) = \dfrac{s^2 + 3s + 1}{s^3 + 5s^2 + 2s - 8}$.

» clear all; close all; clc;

» % %compute Partial fraction expansion x(s) = s^2+3s+1/ s^3+5s^2+2s-8

» num=[1 3 1];

» den=[1 5 2 -8];

» [R,P,K]=residue(num,den)

```
R =

    0.5000
    0.1667
    0.3333


P =

   -4.0000
   -2.0000
    1.0000


K =

     []
```

*! Άρα η συνάρτηση X(s) μπορεί να εκφραστεί ως το παρακάτω άθροισμα κλασμάτων:

$$X(s) = \frac{0.5}{s+4} + \frac{0.16}{s+2} + \frac{0.33}{s-1}$$

Μετασχηματισμός Laplace

❖ Άσκηση 5: Μετατρέψτε την συνάρτηση από άθροισμα κλασμάτων σε ρητή : $X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s-1} + \frac{3}{s+1}$

```
» clear all; close all; clc;
» %reverse Partial fraction expansion x(s) = (1/s+2)+ (2/s-1)+ (3/s+1)
» R=[1 2 3];
» P=[-2 1 -1];
» K=[];
» [num,den]=residue(R,P,K)
```

```
num =

     6     9    -3


den =

     1     2    -1    -2
```

*! Άρα η συνάρτηση X(s) μπορεί να εκφραστεί ως ρητή:

$$X(s) = \frac{6s^2 + 9s - 3}{s^3 + 2s^2 - s - 2}.$$

Μετασχηματισμός Laplace

❖ Άσκηση 5: Να βρεθεί η συνέλιξη των σημάτων στο πεδίο της συχνότητας: $X_1(s) = \frac{1}{s^2+4}$ και $X_2(s) = \frac{8}{s-3}$

» clear all; close all; clc;

» %Να βρεθεί η συνέλιξη των σημάτων στο πεδίο της συχνότητας x1=1/(s^2)+4 και x2=8/s-3

» syms t s

» x1=1/(s^2)+4;

» x2=8/(s-3);

» il_x1=ilaplace(x1,t);

» il_x2=ilaplace(x2,t);

» L=(2*pi*j)*laplace(il_x1*il_x2)

» simplify(L)

» pretty(ans)

```
L =

pi*(8/(s - 3)^2 + 32)*2i


ans =

pi*(8/(s - 3)^2 + 32)*2i

   /      8           \
pi | -------- + 32 | 2i
   |         2        |
   \ (s - 3)          /
```

*! Υπενθύμιση:

$$L\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} X_1(s) * X_2(s).$$

Μετασχηματισμός Laplace

❖ Άσκηση 6: Να βρεθεί η συνέλιξη των σημάτων στο πεδίο της συχνότητας: $X_1(s) = \dfrac{1}{s^2+4}$ και $X_2(s) = \dfrac{8}{s-3}$

```
clear all; close all; clc;
%Να βρεθεί η συνέλιξη των σημάτων στο πεδίο της συχνότητας x1=1/(s^2)+4 και x2=8/s-3
syms t s
x1=1/(s^2)+4;
x2=8/(s-3);
il_x1=ilaplace(x1,t);
il_x2=ilaplace(x2,t);
L=(2*pi*j)*laplace(il_x1*il_x2)
simplify(L)
pretty(ans)
```

```
L =

pi*(8/(s - 3)^2 + 32)*2i


ans =

pi*(8/(s - 3)^2 + 32)*2i

   /     8          \
pi | -------- + 32 | 2i
   |        2       |
   \ (s - 3)        /
```

*! Υπενθύμιση:

$$L\{x_1(t)x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi j} X_1(s) * X_2(s).$$

Μετασχηματισμός Laplace

❖ Άσκηση 7: Να βρεθεί η λύση της διαφορικής $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}, \; y(0) = 2, \; y'(0) = 3$

*! Γνωρίζω ότι ισχύει:

$$L\{\, y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) \,\} = L\{e^{-t}\}$$

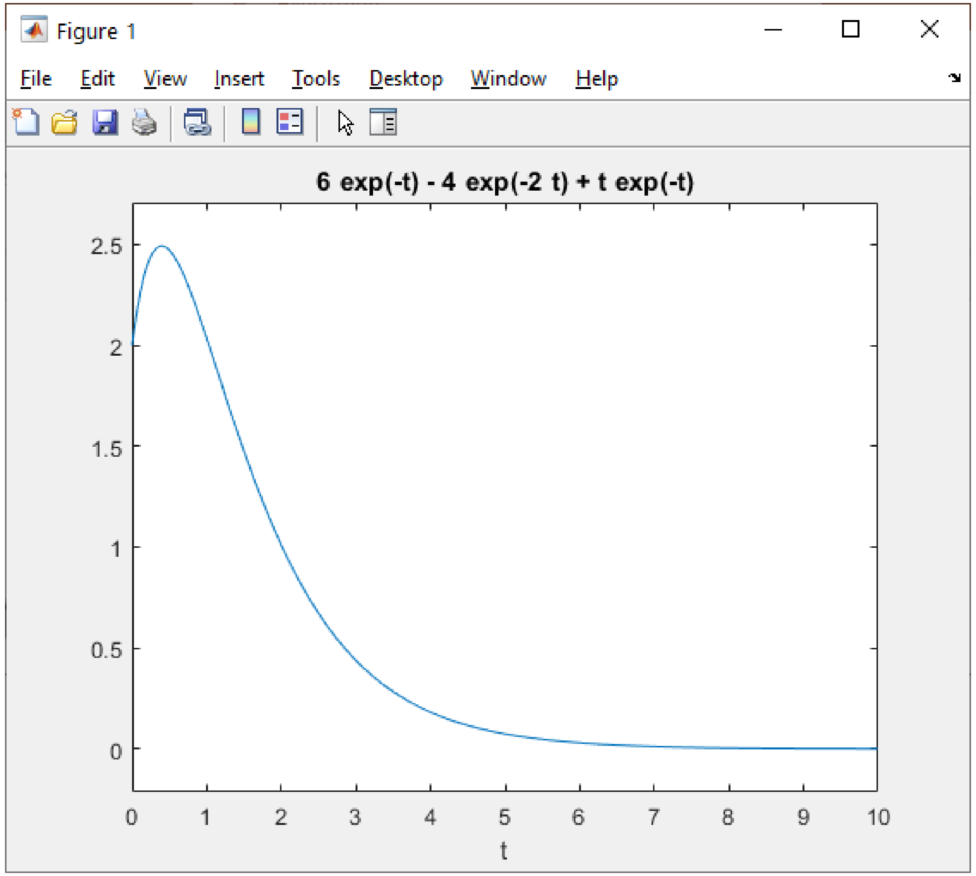
» %Να βρεθεί η συνέλιξη των σημάτων στο πεδίο της συχνότητας x1=1/(s^2)+4 και x2=8/s-3
» syms t s y % καταχώρηση του y(s) ως y
» x=laplace(exp(-t),s); %laplace δεξιού μέλους
» y0=2; %αρχικές συνθήκες
» yp0=3; %αρχικές συνθήκες
» y1=s*y-y0; % ορίζουμε τον L{y'(t)} ως y1
» y2=s*y1-yp0;% ορίζουμε τον L{y''(t)} ως y2
» g=y2+3*y1+2*y-x; % το x μεταφέρεται στο αριστερό μέλος της διαφορικής (το αποτέλεσμα είναι ένα πολυώνυμο του Y)
» result=solve(g,y);
» yt=ilaplace(result,t)
» ezplot(yt,[0 10])

```
yt =

6*exp(-t) - 4*exp(-2*t) + t*exp(-t)
```

Μετασχηματισμός Laplace

❖Άσκηση 7:



Αναφορές

Το παρών έγγραφο δημιουργήθηκε με βάση τα παρακάτω συγγράμματα, εκπαιδευτικά υλικά:

[1] Νικόλαος Ασημάκης, Μαρία Αδάμ, Σήματα και Συστήματα, ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ-Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2015.

[2] Β. Διακολουκάς, "Σήματα και Συστήματα," Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.

[3] Καραμπογιάς, Σ. (2003). Σήματα και Συστήματα. Αθήνα: Έκδοση Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

[4] VinayK. Ingle and John G.Proakis, "Digital Signal Processing," BookwareCompanion Series, 2003.

[5] Αναστασία Βελώνη, Σήματα και Συστήματα, Τμήμα Η.Υ.Σ, Ανώτατο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά Τεχνολογικού Τομέα