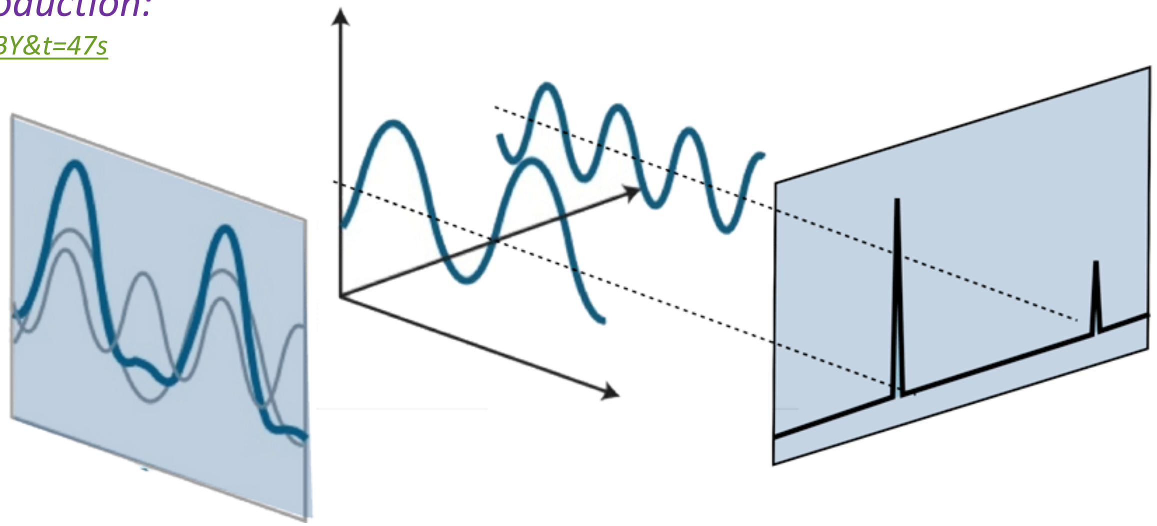
Σήματα και Συστήματα

Σήματα lab 6- Fourier

Κώστας Μαριάς
Ρούλα Χατζάκη

Μετασχηματισμός Fourier

**!Fourier Transform? A visual introduction:*
https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY&t=47s



Time Domain $\xrightarrow{\textit{Fourier Transform}}$ **Frequency Domain**

Time Domain $\xleftarrow{\textit{Inverse Fourier Transform}}$ **Frequency Domain**

Σειρές Fourier

- Η εκθετική σειρά Fourier ή Ανάπτυγμα Fourier του σήματος x(t) χαρακτηρίζεται από το ζεύγος των εξισώσεων:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad t \in [t_0, t_0+T] \qquad \text{Εξίσωση σύνθεσης}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \qquad \text{Εξίσωση ανάλυσης}$$

- Η Τριγωνομετρική αναπαράσταση Fourier του σήματος x(t) χαρακτηρίζεται από:

Εξίσωση σύνθεσης

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega_0 t), \quad t \in [t_0, t_0+T]$$

Ταυτ.Euler $\quad b_k \cos(k\omega_0 t) + c_k \sin(k\omega_0 t) = A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

$$A_k = 2|a_k|$$

$$2a_k = b_k - jc_k$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt \\ c_k &= \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)\sin(k\omega_0 t)dt \end{aligned}$$

Μετασχηματισμός Fourier

- Continuous Time Fourier Transform – CTFT / Συνεχής Χρόνος – Συνεχής Συχνότητα

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathrm{t})\, \mathrm{e}^{-j\omega t}\, d\, t$$

- Discrete Time Fourier Transform – DTFT / Διακριτός Χρόνος – Συνεχής Συχνότητα

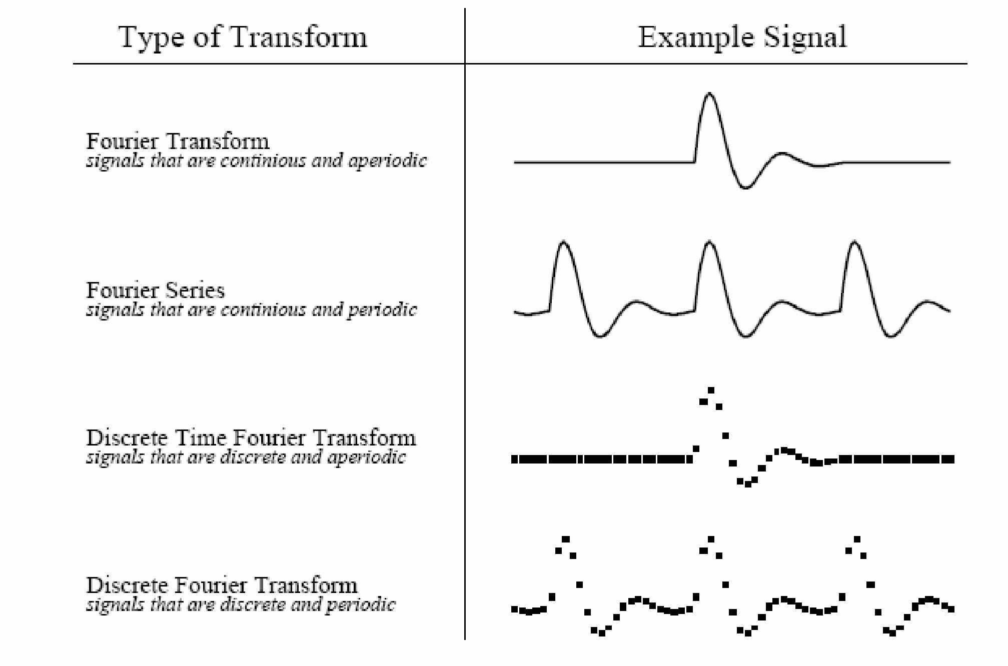
$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\, \mathrm{e}^{-j\omega t}$$

- Discrete Fourier Transform – DFT /Διακριτός Χρόνος – Διακριτή Συχνότητα

$$F(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi jnk}{M}} \qquad \omega = \frac{\pi k}{M}$$

Μετασχηματισμός Fourier

Time Duration		
Finite	Infinite	
Discrete FT (DFT) $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega_k n}$ $k = 0, 1, \ldots, N-1$	Discrete Time FT (DTFT) $X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$ $\omega \in (-\pi, +\pi)$	discr. time n
Fourier Series (FS) $X(k) = \int_0^P x(t) e^{-j\omega_k t} dt$ $k = -\infty, \ldots, +\infty$	Fourier Transform (FT) $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ $\omega \in (-\infty, +\infty)$	cont. time t
discrete freq. k	continuous freq. ω	



Μετασχηματισμός Fourier

- Στο Matlab /Octave μπορεί κανείς να βρει απευθείας τον μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης και τον αντίστροφο της κάνοντας χρήση των εντολών *fourier()* και *ifourier()* αντίστοιχα.
  - Προϋπόθεση για την χρήση αυτών των εντολών είναι η δημιουργία συμβολικών μεταβλητών χρόνου *t* και κυκλικής συχνότητας *ω* με την χρήση της εντολής *syms*.
  - Πληκτρολογήστε help fourier
  - Περιγραφή στο MathWorks:

Fourier Transform

The Fourier transform of the expression $f = f(x)$ with respect to the variable x at the point w is

$$F(w) = c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iswx}dx.$$

c and s are parameters of the Fourier transform. The `fourier` function uses $c = 1$, $s = -1$.

Description

`fourier(f)` returns the Fourier Transform of `f`. By default, the function `symvar` determines the independent variable, and `w` is the transformation variable.

`fourier(f,transVar)` uses the transformation variable `transVar` instead of `w`.

`fourier(f,var,transVar)` uses the independent variable `var` and the transformation variable `transVar` instead of `symvar` and `w`, respectively.

Μετασχηματισμός Fourier

- Άσκηση 1: Βρείτε τους μετασχηματισμούς Fourier των σημάτων α) $x = e^{-t^2}$, β) $\mathrm{X} = \frac{1}{1+\mathrm{j}*\omega}$, γ) z=1

  - clear all; close all; clc;
  - %compute FT of x(t)=e^(-t^2)
  - syms t w % δημιουργία συμβολικών μεταβλητών χρόνου t και κυκλικής συχνότητας ω
  - x=exp(-t^2);
  - fourier(x) % Μετασχηματισμός Fourier

```
ans =

pi^(1/2)*exp(-w^2/4)
```

  - %compute inverse FT of x(ω)=1/(1+jω)
  - X=1/(1+j*w);
  - ifourier(X) % Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

```
ans =

(exp(-x)*(sign(x) + 1))/2
```

  - %compute FT σταθερών συναρτήσεων
  - z=1;
  - fourier(z,w)

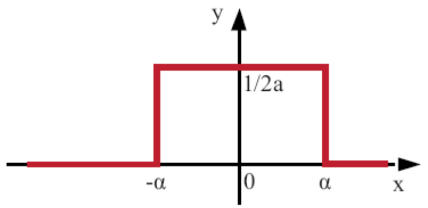
```
ans =

2*pi*dirac(w)
```

Μετασχηματισμός Fourier

❖ Άσκηση 2: Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του ορθογώνιου παλμού που περιγράφεται από την συνάρτηση:

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & |t|<a\\ 0, & |t|>a\end{cases}$$



Λύση

Αρχικά χρειάζεται να εκφραστεί η f(t) ως γραμμικός συνδυασμός βηματικών συναρτήσεων: $f(t)=u(t+a)-u(t-a)$

» clear all; close all; clc;

» syms a t w; % δημιουργία συμβολικών μεταβλητών

» H=1/(2*a)*(heaviside(t+a)-heaviside(t-a)); % δημιουργία ορθογώνιου παλμού

» % H= 1/(2*a)*rectangularPulse(-a,a,t)); % εναλλακτικός τρόπος για την δημιουργία ορθογώνιου παλμού

» fourier(H)

H Heaviside (t) αντιστοιχεί στη βηματική συνάρτηση u(t): έτσι η συνάρτηση
H (t) = heaviside(t) = 0 για t <0
και H (t) = heaviside (t) = 1 για t> 0.

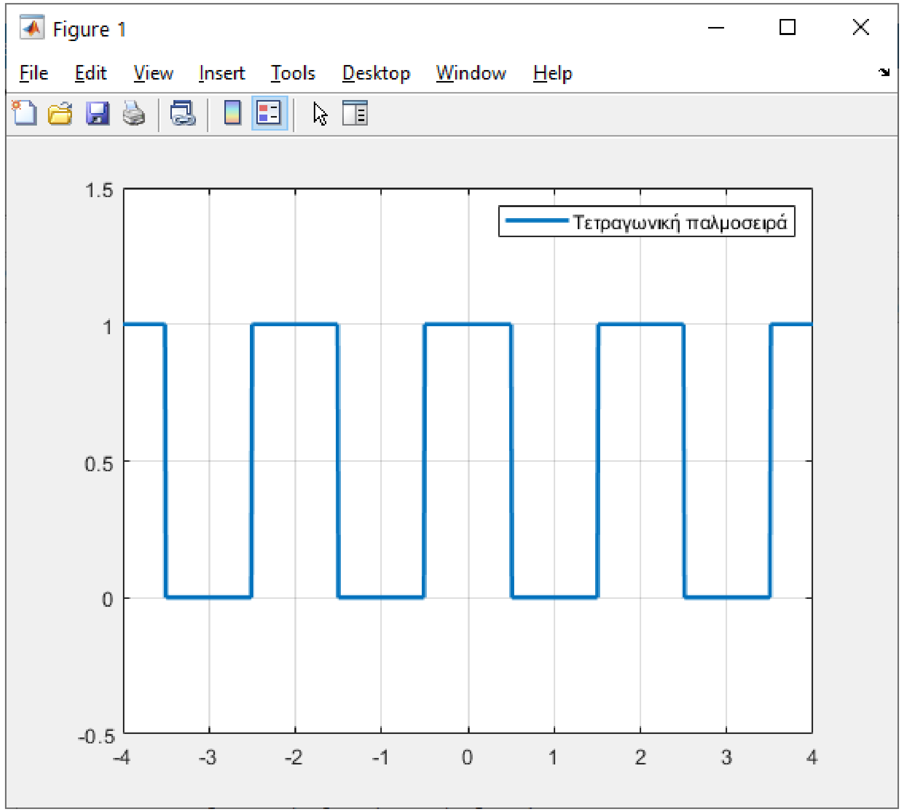
```
ans =

((sin(a*w) + cos(a*w)*1i)/w - (- sin(a*w) + cos(a*w)*1i)/w)/(2*a)
```

Τριγωνομετρική σειρά Fourier (Τετραγωνική παλμοσειρά)

❖ <u>Άσκηση 3:</u> Να αναλυθεί σε σειρές Fourier (τριγωνομετρική μορφή) η τετραγωνική παλμοσειρά :

» t=-4:0.01:4; %χρόνος
» sineform=cos(2*pi*(1/2)*t); %δημιουργία παλμοσειράς
» pulse=(sineform>=0); %δημιουργία παλμοσειράς
» figure(1)
» plot(t,pulse,'linewidth',2);
» grid on
» axis([-4 4 -0.5 1.5])
» legend('Τετραγωνική παλμοσειρά')



Τριγωνομετρική σειρά Fourier (Τετραγωνική παλμοσειρά)

❖ Άσκηση 3:

- Αναπαράσταση με τριγωνομετρική μορφή σειράς fourier:

$$x_N(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos(k\pi t), \qquad -\infty < t < \infty$$

- Με συντελεστές:

$$a_k = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}, k \neq 0 \qquad a_0 = \frac{1}{2}, \quad b_k = 0$$

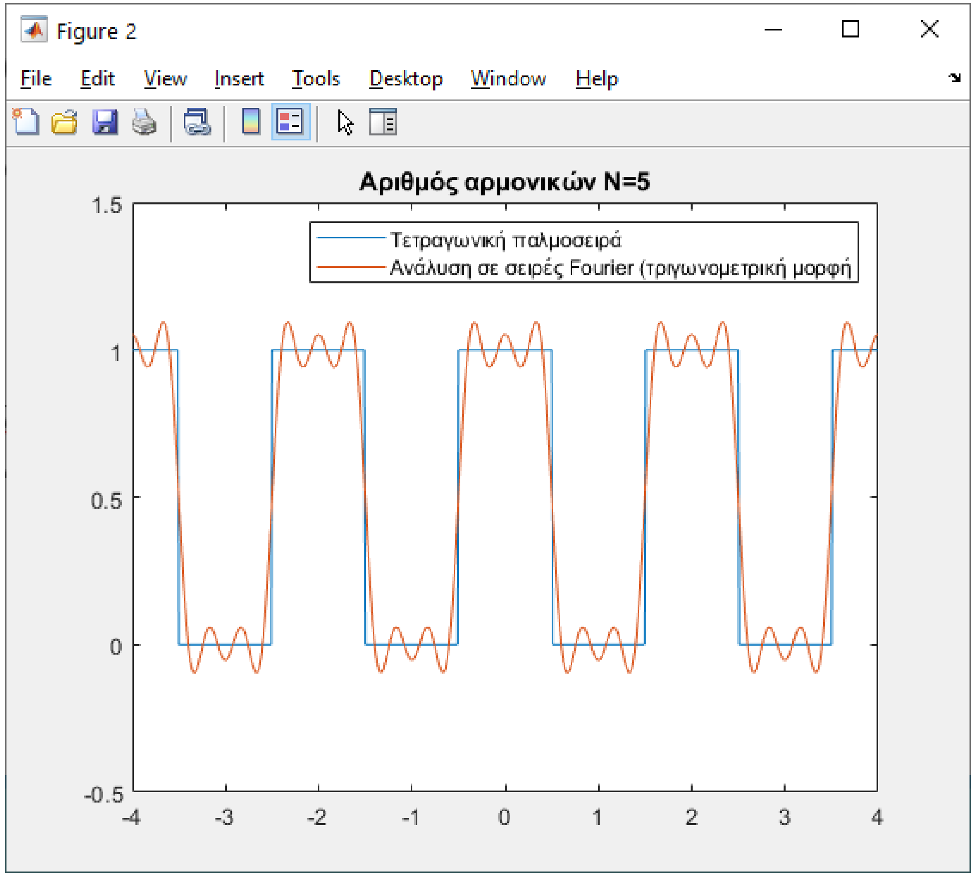
- Με τις άρτιες αρμονικές να ισούνται με το μηδέν:

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 0, \quad k = 2,4,6,\ldots$$

Τριγωνομετρική σειρά Fourier (Τετραγωνική παλμοσειρά)

❖ Άσκηση 3: :

```
» N=5; %Αριθμός αρμονικών δοκιμάστε 5, 51,101,201
» a0 = 0.5;
» xN = a0*ones(1,length(t)); %dc component
» for k = 1:2:N %Οι άρτιες αρμονικές είναι μηδέν
» xN = xN + 2/k/pi*sin(k*pi/2)*cos(k*pi*t);
» end
» figure(2)
» plot(t,pulse,t,xN)
» axis([-4 4 -0.5 1.5])
» legend('Τετραγωνική παλμοσειρά','Ανάλυση σε σειρές Fourier (τριγωνομετρική μορφή')
» title('Αριθμός αρμονικών N=5')
```



Μετασχηματισμός Fourier (Τετραγωνική παλμοσειρά) * Gibbs

❖ Άσκηση 3:

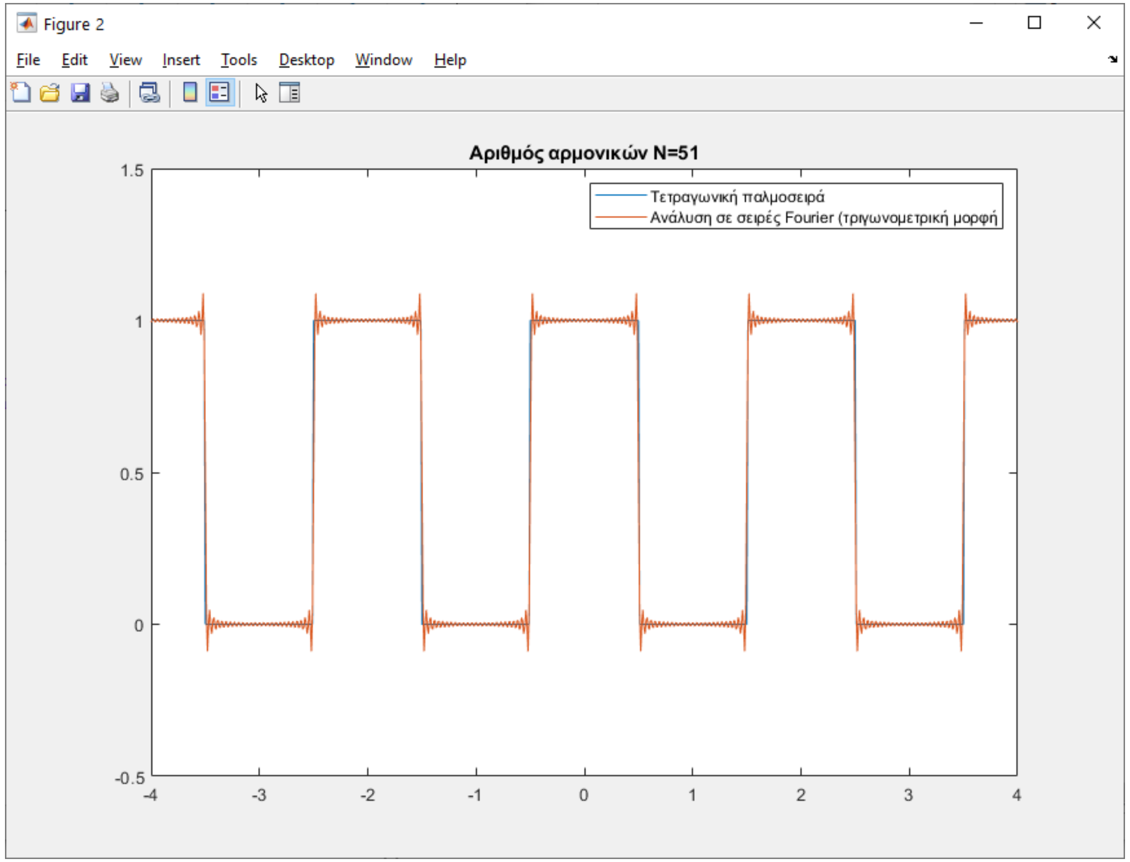
» N=51; %Αριθμός αρμονικών

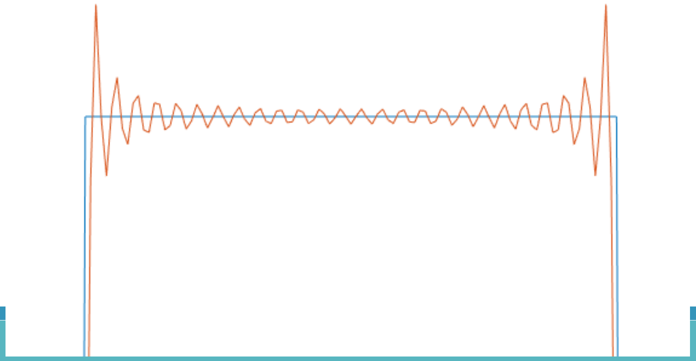
❖ Παρατηρείται το Φαινόμενο Gibbs:

Όταν υπάρχει ασυνέχεια η αναπαράσταση με σειρές Fourier δεν ταυτίζεται με το αρχικό σήμα.

Στα σημεία ασυνέχειας το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier δίνει τη μέση τιμή του αριστερού και του δεξιού ορίου του σήματος.

Οταν ο αριθμός N των συχνοτήτων που προσεγγίζουμε το σήμα γίνει άπειρο, τότε το φαινόμενο Gibbs παύει να υφίσταται.

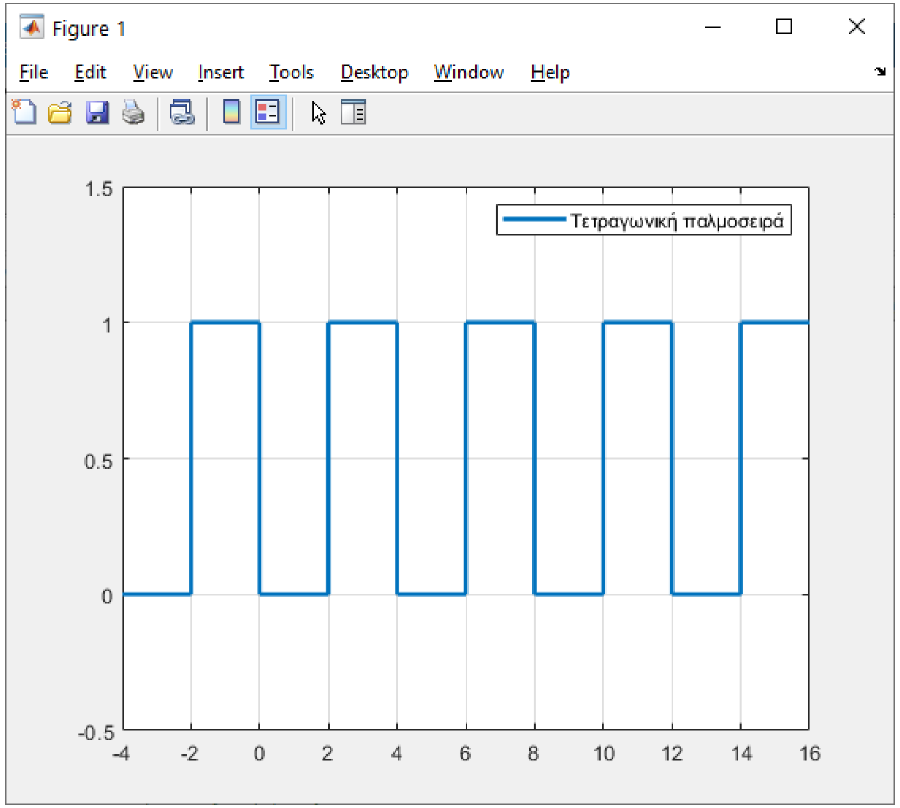




Συντελεστές Fourier & Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (Τετραγωνική παλμοσειρά)

❖ Άσκηση 4: Δημιουργήστε την τετραγωνική παλμοσειρά, και βρείτε τους συντελεστές Fourier και την φασματική πυκνότητα ισχύος. Τέλος ανακατασκευάστε το σήμα από τους συντελεστές.

» %Δημιουργήστε την τετραγωνική παλμοσειρά :
» step=0.001;
» t=-4:step:16-step; %χρόνος
» sineform=sin(2*pi/4*t); %δημιουργία παλμοσειράς
» pulse=(sineform<=0); %δημιουργία παλμοσειράς
» figure(1)
» plot(t,pulse,'linewidth',2);
» grid on
» axis([-4 16 -0.5 1.5])
» legend('Τετραγωνική παλμοσειρά')



Συντελεστές Fourier & Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (Τετραγωνική παλμοσειρά)

❖ <u>Άσκηση 4:</u>

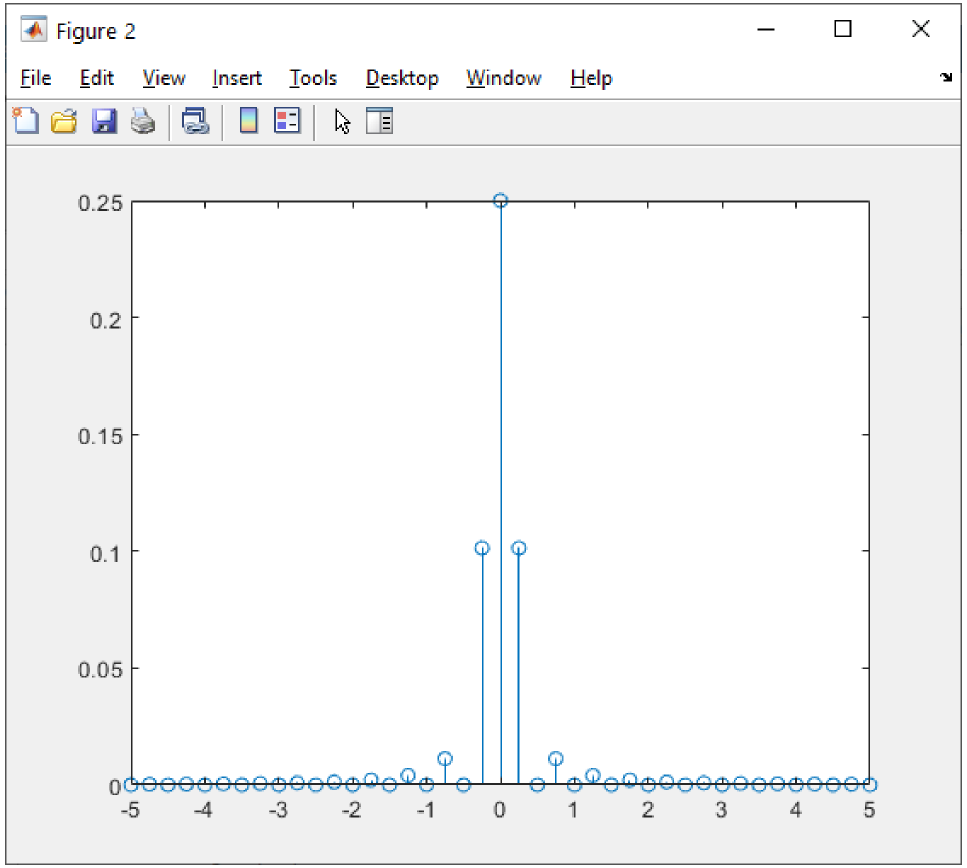
```
%Υπολογίστε τους συντελεστές Fourier αριθμητικά
FC=-20:20; %Δείκτες συντελεστών (Coefficients) Fourier
T0=4; %περίοδος σήματος
t1=-4:step:0-step; %διάνυσμα χρόνου της πρώτης περιόδου του σήματος
pulse_period1=pulse(1:length(t1)); %πρώτη περιοδος του σήματος
for k = 1:length(FC)
   cc(k)=(1/T0)*sum(pulse_period1.*exp(-1j*2*pi*FC(k)*(1/T0)*t1))*step;
end
```

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\omega_o t}dt, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Συντελεστές Fourier & Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (Τετραγωνική παλμοσειρά)

❖ Άσκηση 4:

» %Φασματική Πυκνότητα Ισχύος
» F0=1/T0; %Θεμελιώδης συχνότητα
» fp2 = abs(cc).^2;
» P=sum(fp2); %Ισχύς (Parseval)
» figure(2)
» stem(FC*F0,fp2); %Φασματική Πυκνότητα Ισχύος



Σύμφωνα με την ταυτότητα Parseval η ολική ισχύς περιοδικού σήματος, με περίοδο δίνεται από τον τύπο:

$$P_X = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

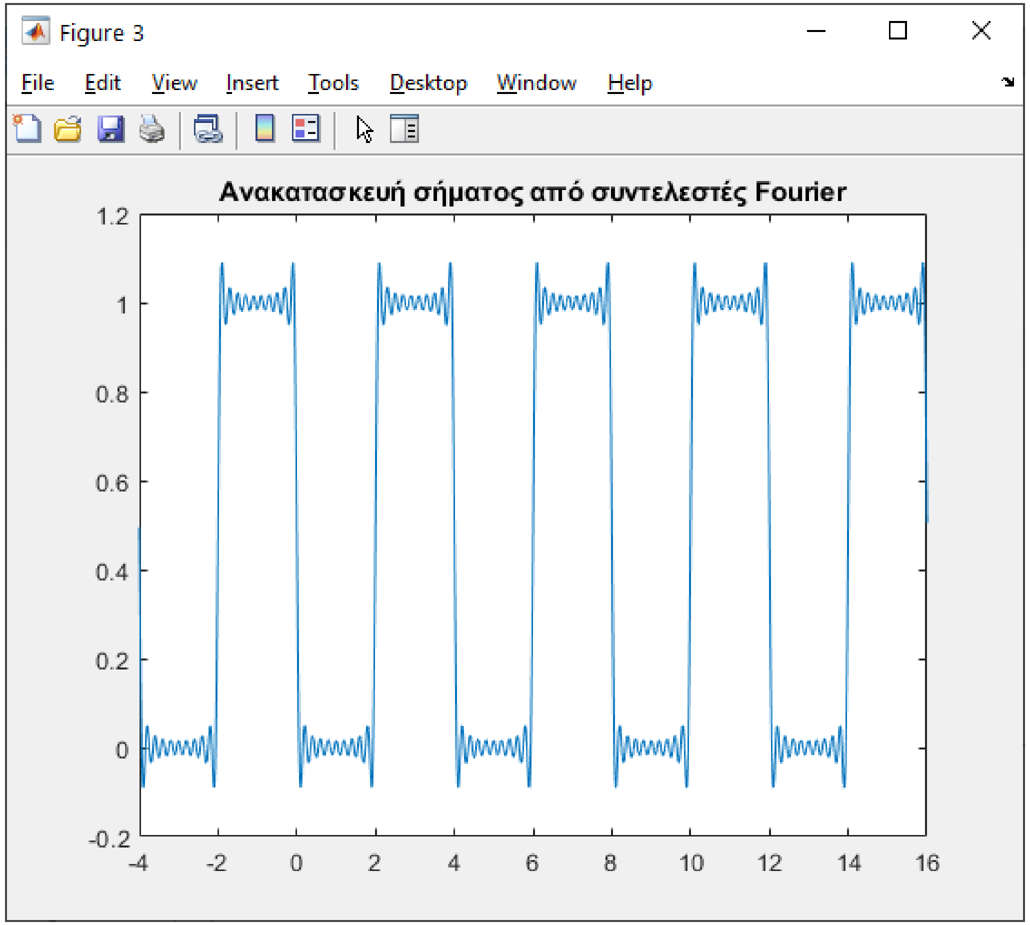
Όπου *Ck* οι συντελεστές Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi F_0 kt}$$

Συντελεστές Fourier & Φασματική Πυκνότητα Ισχύος (Τετραγωνική παλμοσειρά)

❖ Άσκηση 4:

```
%Ανακατασκευή από συντελεστές Fourier
for r=1:length(t) %Για κάθε χρονική στιγμή
RecostrPulse(r) = sum(cc.*exp(1j*2*pi*FC*F0*t(r)));
end
figure(3)
plot(t,real(RecostrPulse));
title('Ανακατασκευή σήματος από συντελεστές Fourier')
```



Fast Fourier Transform

- Fast Fourier Transform/Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier (FFT): γρήγορος αλγόριθμος για τον υπολογισμό του DFT.
  - Πιο γρήγορος όταν ο αριθμός των δειγμάτων N είναι δύναμη του 2 (π.χ. 256, 512, 1024, 4096)
  - Πρέπει ο αριθμός των συντελεστών Fourier να είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον αριθμό δειγμάτων στο χρόνο
- Σημαντικές συναρτήσεις Matlab:
  - Ευθύς Fourier N σημείων: *Y=**fft**(x,N)*
  - Αντίστροφος Fourier N σημείων*: x=**ifft**(Y,N)*
  - Μετατόπιση του συντελεστή μηδενικής συχνότητας στο κέντρο – Ανταλλαγή αριστερού μισού με το δεξί: ***fftshift**(x)*

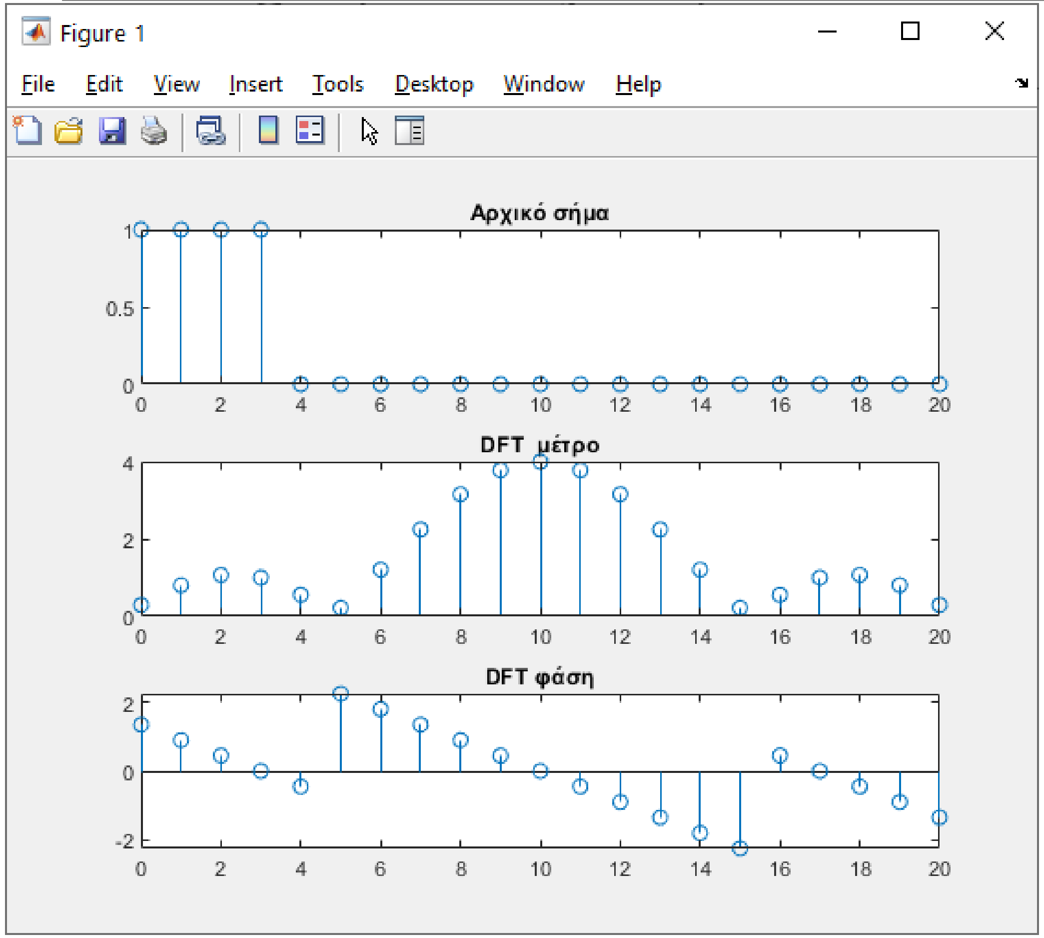
Ευθύς και αντίστροφος Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT) μοναδιαίου παλμού

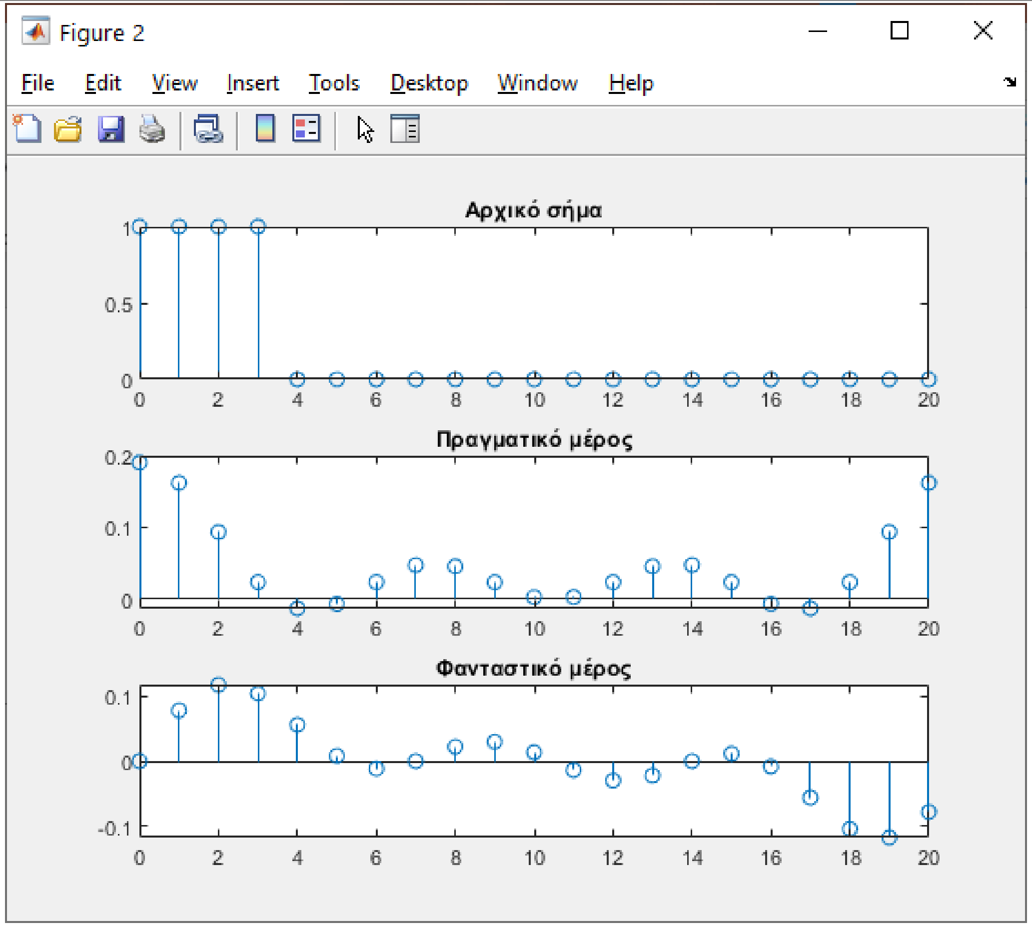
❖ Άσκηση 5 : Υπολογίστε τον ευθύ και αντίστροφο Διακριτό Μετασχηματισμός Fourier (DFT) μοναδιαίου παλμού χ για n[0,20]. Έπειτα βρείτε το μέτρο και τη φάση για τον ευθύ, και το πραγματικό και φανταστικό μέρος για τον αντίστροφο.

```
n=0:20;
x=0*n;
x(1:4)=1;
y=fft(x);
y=fftshift(y);
mag_y=abs(y); % Υπολογίζεται το μέτρο του μετασχηματισμού DFT
ang_y=angle(y); %Υπολογίζεται η φάση DFT
figure(1);
subplot(3,1,1)
stem(n,x)
title('Αρχικό σήμα');
subplot(3,1,2)
stem(n,mag_y);
title('DFT  μέτρο');
subplot(3,1,3)
stem(n,ang_y);
title('DFT φάση');
```

```
%Αντίστροφος Inverse DFT of unit step
z=ifft(x);
zr=real(z); % Υπολογίζεται το πραγματικό μέρος
zi=imag(z); %Υπολογίζεται το φανταστικό μέρος
figure(2);
subplot(3,1,1)
stem(n,x)
title('Αρχικό σήμα');
subplot(3,1,2)
stem(n,zr);
title('Πραγματικό μέρος');
subplot(3,1,3)
stem(n,zi);
title('Φανταστικό μέρος');
```

Ευθύς και αντίστροφος Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT) μοναδιαίου παλμού





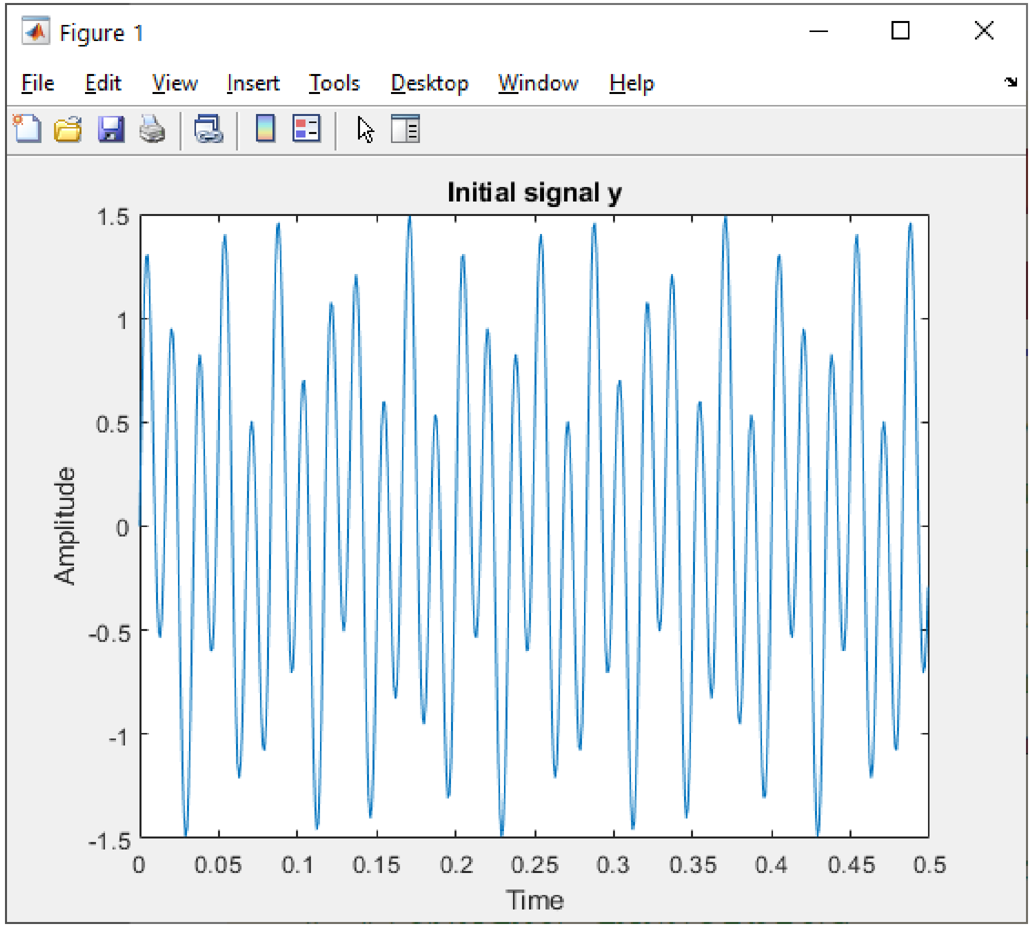
Fast Fourier Transform

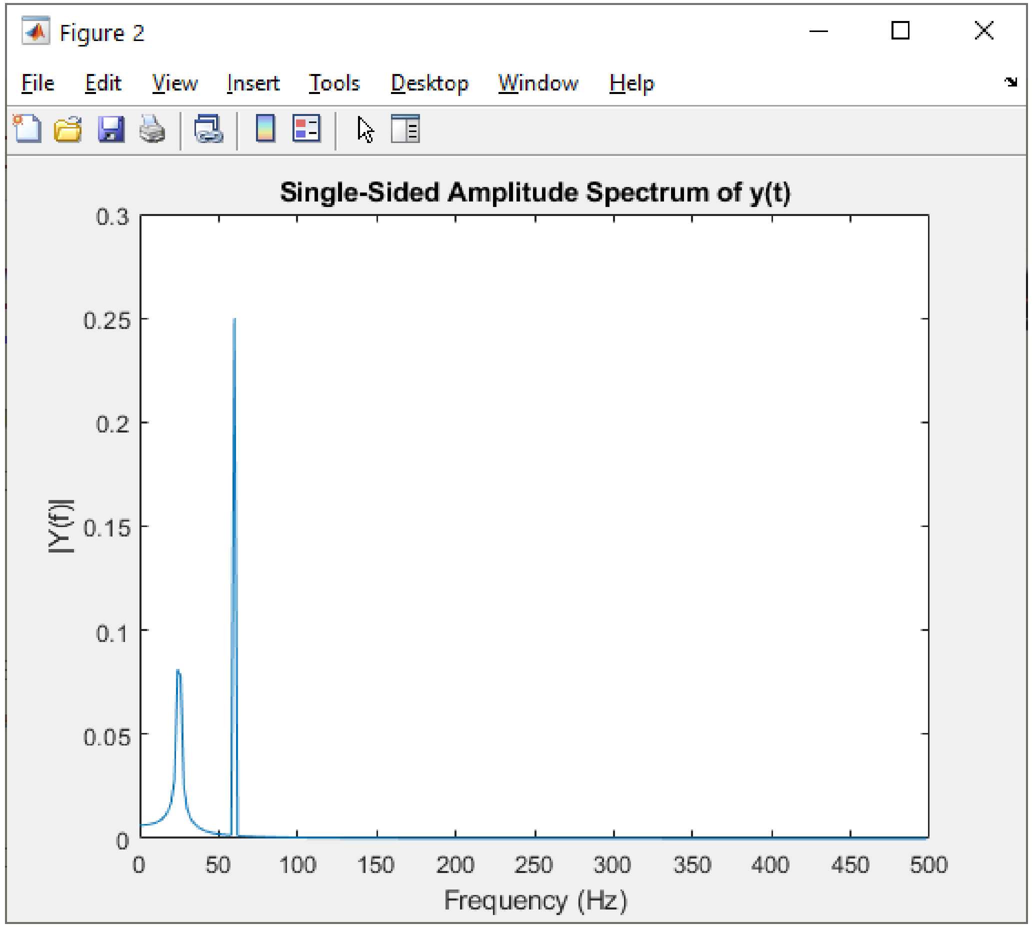
❖Άσκηση 6 : Υπολογίστε τον FFT του ημιτονοειδούς σήματος.

```
fs = 1000; % Συχνότητα δειγματοληψίας
T = 1/fs; % Περίοδος δειγματοληψίας
N = 500; % Δείγματα σήματος
t = (0:N-1)*T; % Διάνυσμα χρόνου
% Σήμα απο άθροισμα 25 Hz sinusoid και 60 Hz sinusoid
y = 0.5*sin(2*pi*25*t) + sin(2*pi*60*t);
figure(1);
plot(t,y)
title('Initial signal y');
xlabel('Time')
ylabel('Amplitude')
```

```
Y = fft(y)*T; % Εφαρμόζουμε τον FFT
% Διάνυσμα συχνότητας
DF = fs/N; % Βήμα συχνότητας
F= 0:DF:fs/2-DF;% Για τα μισά δείγματα του FFT
% Plot single-sided amplitude spectrum.
figure(2)
plot(F,abs(Y(1:N/2))) % Τα πρώτα μισά δείγματα
title('Single-Sided Amplitude Spectrum of y(t)')
xlabel('Frequency (Hz)')
ylabel('|Y(f)|')
```

Fast Fourier Transform





Αναφορές

Το παρών έγγραφο δημιουργήθηκε με βάση τα παρακάτω συγγράμματα, εκπαιδευτικά υλικά:

[1] Νικόλαος Ασημάκης, Μαρία Αδάμ, Σήματα και Συστήματα, ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ-Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2015.

[2] Β. Διακολουκάς, "Σήματα και Συστήματα," Πολυτεχνείο Κρήτης, Χανιά.

[3] Καραμπογιάς, Σ. (2003). Σήματα και Συστήματα. Αθήνα: Έκδοση Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

[4] VinayK. Ingle and John G.Proakis, "Digital Signal Processing," BookwareCompanion Series, 2003.

[5] Αναστασία Βελώνη, Σήματα και Συστήματα, Τμήμα Η.Υ.Σ, Ανώτατο Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Πειραιά Τεχνολογικού Τομέα