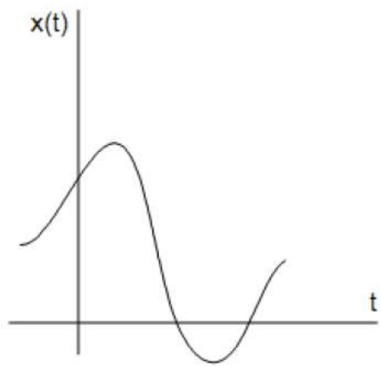
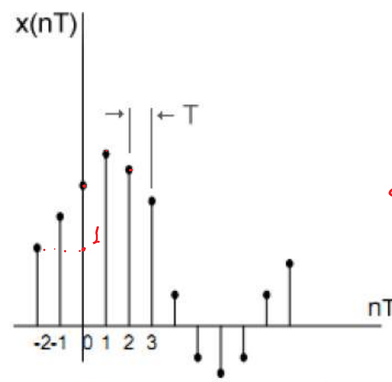
Εισαγωγή στα διακριτά σήματα με βάση σημειώσεις Γ. Παπαδουράκη από το μάθημα Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων

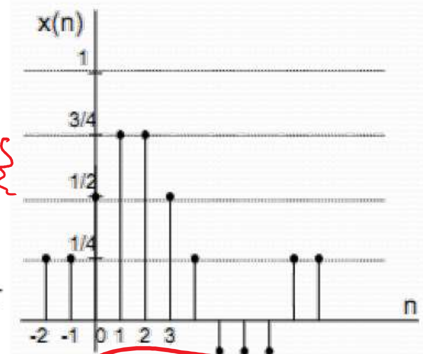
Είδη σημάτων



Σήμα συνεχούς χρόνου



Σήμα διακριτού χρόνου

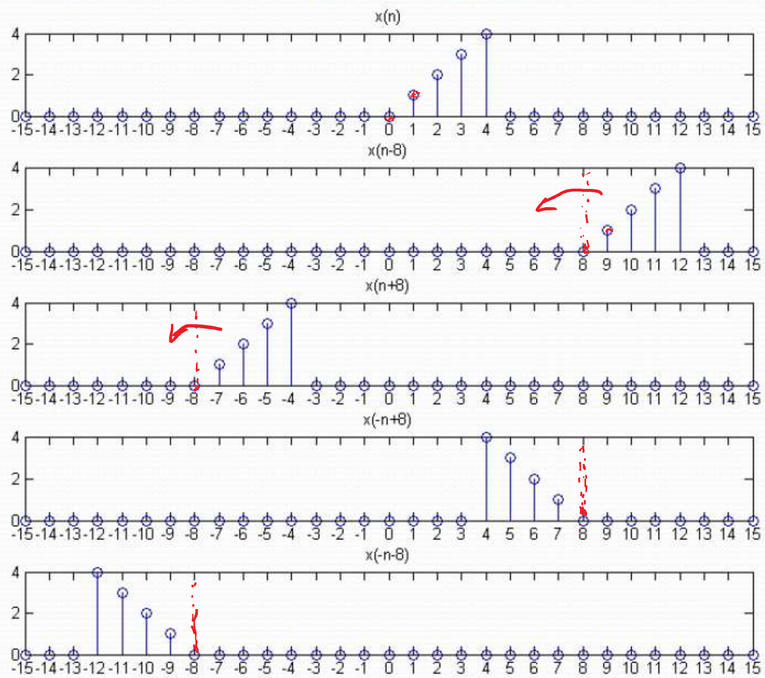


Ψηφιακό σήμα

Μετασχηματισμοί Σημάτων

Χρονική Μετατόπιση (ολίσθηση)

$x(0) = x_H(0-8)$



- x(n)
- x(n-8)
- x(n+8)

$x(-(n-8))$

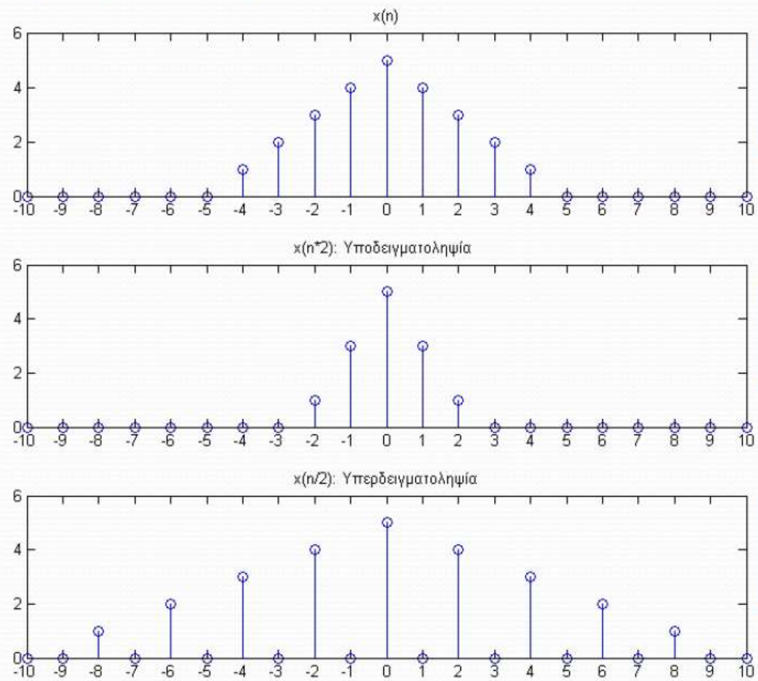
- x(-n+8)

$x(-(n+8))$

- x(-n-8)

Μετασχηματισμοί Σημάτων

Χρονική κλιμάκωση



- x(n)

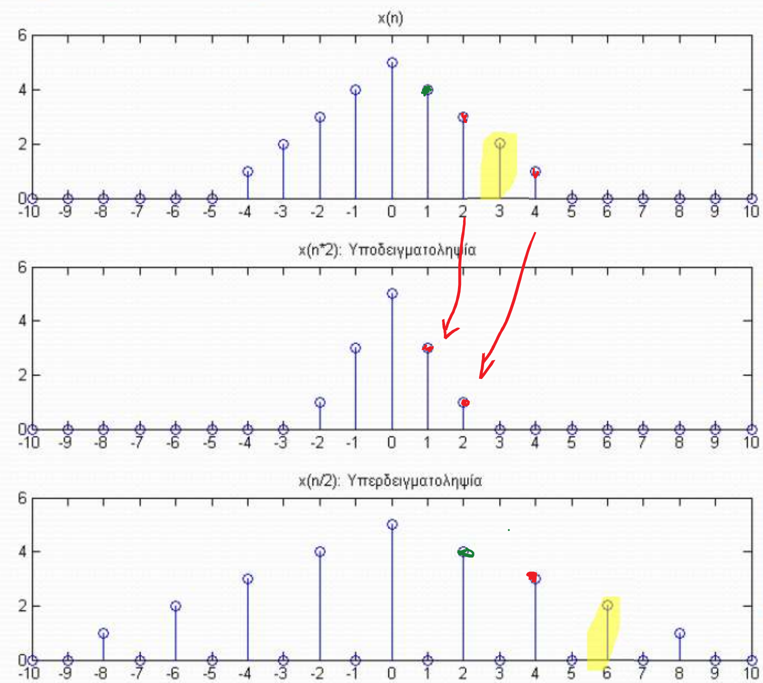
- Υποδειγματοληψία x(n*2)

- Υπερδειγματοληψία x(n/2)

Μετασχηματισμοί Σημάτων

Χρονική κλιμάκωση

$x_\alpha(4) = x_1(2 \cdot 2)$



- x(n) $n \to n*2$
- Υποδειγματοληψία x(n*2)

$n \to n/2$

- Υπερδειγματοληψία x(n/2)

Lab_03_Students.pdf - Adobe Acrobat Reader DC (32-bit)

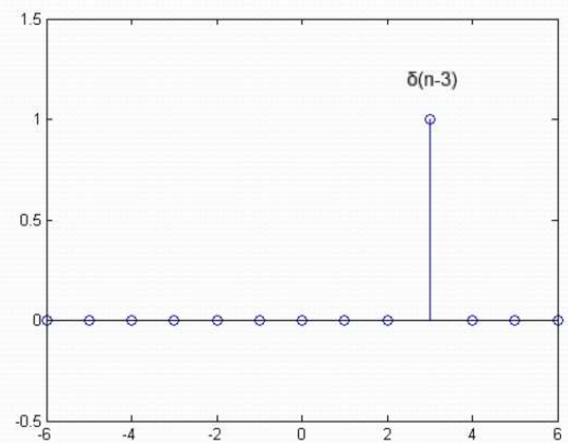
Θεμελιώδεις ακολουθίες

Διακριτή ακολουθία επιβράδυνσης

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

- Η διακριτή ακολουθία επιβράδυνσης είναι η ακολουθία δ(n) όπου υπέστη μετατόπιση κατά k και ορίζεται από την σχέση:

$$\delta(n-k) = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$



$$\delta(n-3) = \begin{cases} 1, & n=3 \\ 0, & n \neq 3 \end{cases}$$

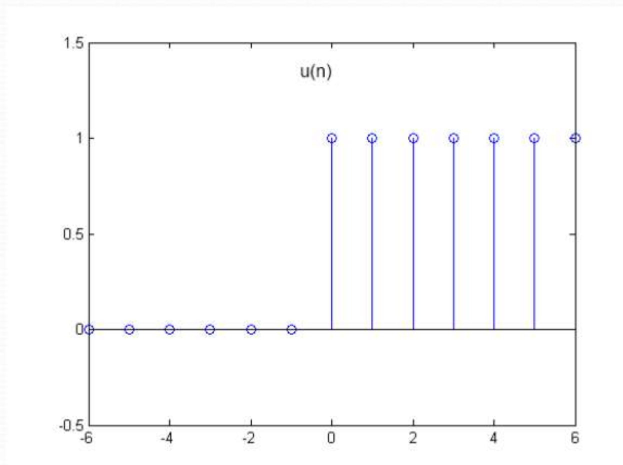
- Σημειώνουμε ότι δ[n-3] ισούται με 1 για n=3, και 0 για n ≠3

Θεμελιώδεις ακολουθίες

Μοναδιαία βηματική ακολουθία (unit step)

- Η μοναδιαία βηματική ακολουθία συμβολίζεται με u(n) και ορίζεται από την σχέση:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



- Σημειώνουμε ότι u[n-3] ισούται με 1 για n>=3, και 0 για n <3

Ανάλυση Σημάτων

- Χρησιμοποιώντας της διακριτή ακολουθία δέλτα **δ(n)**, μπορούμε να αναλύσουμε ένα τυχαίο σήμα x(n).
- Αυτό πραγματοποιείται με το άθροισμα των κατάλληλα μετατοπισμένων δ(n) τα οποία έχουν πολλαπλασιαστεί με έναν συντελεστή βάρους.
- Ο συντελεστής βάρους αντιστοιχεί στην εκάστοτε τιμή του σήματος x(n), όπως φαίνεται στην παρακάτω παράδειγμα:

$$x(n) = \cdots + x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + \cdots$$

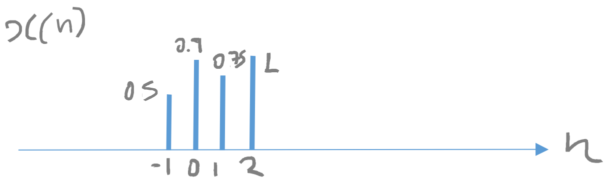
Ανάλυση Σημάτων

x(n) = ··· + x(-1)δ(n+1) + x(0)δ(n) + x(1)δ(n-1) + x(2)δ(n-2) + ···

- Αυτό το άθροισμα μπορεί να γραφτεί περιληπτικά:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

όπου κάθε όρος x(k) δ(n-k), είναι ένα σήμα με πλάτος x(k) τη χρονική στιγμή n=k, ενώ μηδενίζεται για οποιαδήποτε άλλη τιμή του n.



$$x(n) = [\,0.5 \quad 0.9 \quad 0.75 \quad 1\,]$$

χρονική στιγμή $n=0$

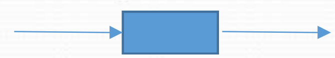
$$\boxed{x(n) = 0.5 \cdot \delta(n+1) + 0.9\,\delta(n) + 0.75\,\delta(n-1) + \delta(n-2)}$$

1 στο $n-1$

0 αλλού

Ιδιότητες Διακριτών Σημάτων

Γραμμικά Συστήματα



- Ένα σύστημα είναι γραμμικό εάν είναι **ομογενές** και για το οποίο ισχύει η **αρχή της υπέρθεσης**.

- Άρα για να είναι γραμμικό ένα σύστημα θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$T[\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)] = \alpha_1 T[x_1(n)] + \alpha_2 T[x_2(n)]$$

- Στις σημειώσεις τις θεωρίας μπορείτε να βρείτε διάφορα παραδείγματα με γραμμικά και μη γραμμικά συστήματα.

Ιδιότητες Διακριτών Σημάτων

Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα

- Αν σε ένα σύστημα υπάρχει μια μετατόπιση (καθυστέρηση) στην είσοδο κατά n0 και παράγει μια έξοδο με την ίδια μετατόπιση n0, τότε το σύστημα ονομάζεται **Χρονικά Αμετάβλητο ή Αμετάβλητο στην μετατόπιση**.

$$x[n-n_0] \longrightarrow \boxed{\text{Σύστημα}} \longrightarrow y[n-n_0]$$

- Εάν ένα σύστημα είναι και Γραμμικό και Χρονικά αμετάβλητο θα το γράφουμε για συντομία ως: **ΓΧΑ** ή **LSI**, από τις λέξεις Linear Shift Invariant.

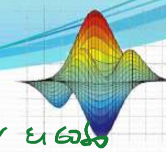
Κρουστική απόκριση (Impulse Response)

- Εάν σε ένα γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (ΓΧΑ) σύστημα η είσοδος είναι η μοναδιαία κρουστική ακολουθία δ(n), τότε το σήμα εξόδου(απόκριση) ονομάζεται **Κρουστική απόκριση h(n)**.

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{\;T\;} \longrightarrow h(n)$$

- Η κρουστική απόκριση h(n) θα είναι αιτιατή **αν και μόνο αν** είναι ίση με το μηδέν για κάθε n<0.

$y(n) = x(n-5) + 3\,x(n-2) + x(n) - 5\cdot y(n-4)$



Εξισώσεις Διαφορών

$x(n) \rightarrow \delta(n)$ στην είσοδο

$y(n) \rightarrow h(n)$ κρουστική απόκριση (έξοδο)

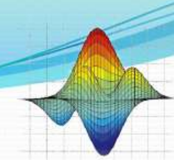
- Η γενική μορφή μιας γραμμικής εξίσωσης διαφορών με σταθερούς συντελεστές είναι:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{q} b(k)x(n-k) - \sum_{k=1}^{p} a(k)y(n-k)$$

Όπου a(k) και b(k) είναι σταθερές οι οποίες καθορίζουν το σύστημα

- Οι εξισώσεις διαφορών παρέχουν μια μέθοδο υπολογισμού της απόκρισης ενός συστήματος για μια τυχαία είσοδο x(n).
- Για την λύση τέτοιων εξισώσεων είναι συχνά απαραίτητο να υπολογιστεί ένα σύνολο Αρχικών Συνθηκών.
- Για ένα ΓΧΑ σύστημα το οποίο περιγράφεται από μια εξίσωση διαφορών, η κρουστική του απόκριση h(n), υπολογίζεται λύνοντας την αντίστοιχη εξίσωση διαφορών για x(n)=δ(n) και y(n)=h(n).

Συνέλιξη (Convolution)



- Με το **άθροισμα της συνέλιξης** μπορούμε να βρούμε την απόκριση ενός συστήματος διακριτού χρόνου για είσοδο x(n), αν γνωρίζουμε την κρουστική του απόκριση h(n).
- Η έξοδος y(n) του συστήματος θα ισούται με την συνέλιξη της εισόδου x(n) και της κρουστικής h(n) του συστήματος και ορίζεται ως εξής:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

όπου το σύμβολο * αντιστοιχεί στο τελεστή της συνέλιξης.

έξοδος του συστήματος

είσοδος

κρουστική απόκριση

Σχέση κρουστικής απόκρισης και απόκρισης συχνότητας – Εισαγωγή στα φίλτρα με ένα απλό παράδειγμα

Σχέση κρουστικής απόκρισης και $\boxed{\text{απόκρισης συχνότητας}}$ n: χρόνος

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot \underline{x(n-k)}$$

Θεωρώ ότι στην είσοδο έχω ένα μιγ. ημιτ. σήμα $x(n) = e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j\sin(\omega \cdot n)$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot \underline{e^{j\omega(n-k)}} = e^{j\omega n} \cdot \boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot e^{-j\omega k}}$$

Διακριτός Μ/μος Fourier του $h(n)$ $H(e^{j\omega})$

$$\Rightarrow y(n) = \underbrace{e^{j\omega n}}_{x(n)} \cdot H(e^{j\omega})$$

Η δράση του συστήματος πάνω στο $x(n) = e^{j\omega n}$ είναι απλά πολ/μός με $H(e^{j\omega})$

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\angle H(e^{j\omega})} \Rightarrow y(n) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\angle H(e^{j\omega})} \cdot e^{j\omega n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(n) = \underbrace{|H(e^{j\omega})|}_{\text{Επίδραση στο μέτρο του } x(n)} e^{j(\omega n + \underbrace{\angle H(e^{j\omega})}_{\text{Επίδραση στη φάση}})}$$

Δύναμη της περιγραφής με την Απόκριση Συχνότητας

$$x(n) = a_1 \cdot e^{j\omega_1 \cdot n} + a_2 \cdot e^{j\omega_2 \cdot n} \Rightarrow \text{λόγω ΓΧΑ}$$

$$y(n) = a_1 \cdot H(e^{j\omega_1})\, e^{j\omega_1 n} + a_2 \cdot H(e^{j\omega_2}) \cdot e^{j\omega_2 \cdot n}$$

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος

$$\Rightarrow y(n) = \frac{1}{2} x(n) + \frac{1}{2} x(n-1)$$ } (μέσος όρος των 2 τελευταίων εισόδων)

Αρχικά θα βρούμε την κρουστική απόκριση για $x(n) = \delta(n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1) \quad \text{άρα} \quad h(n) = \begin{cases} 1/2 & \text{για } n = 0,1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$$

ΔΜΦ

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\, e^{-j\omega k} = \sum_{k=0}^{1} h(k)\, e^{-j\omega k} = h(0) \cdot e^{-j\omega 0} + h(1) \cdot e^{-j\omega} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-j\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-j\omega} \Rightarrow$$

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$$

$$\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x \Rightarrow \frac{\sin 2x}{2} = \sin x\cdot\cos x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos\omega - j\sin\omega) \Rightarrow$$

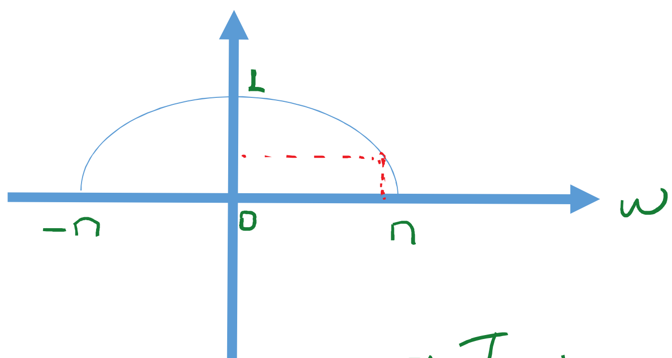
$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\cos\left(2\cdot\frac{\omega}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot j\sin\left(2\cdot\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1+\cos\left(2\frac{\omega}{2}\right)}{2} - j\cdot\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - j\cdot\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \left[\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

η απόκριση συχνότητας του συστήματος που είναι τον μέσο όρο των δύο τελευταίων δειγμάτων

$$|H(e^{j\omega})| = |e^{-j\frac{\omega}{2}}|\cdot\left|\cos\frac{\omega}{2}\right| = \left|\cos\frac{\omega}{2}\right|$$



Αναλόγως με το συχνοτικό περιεχόμενο έχουμε διαφορετική συμπεριφορά.

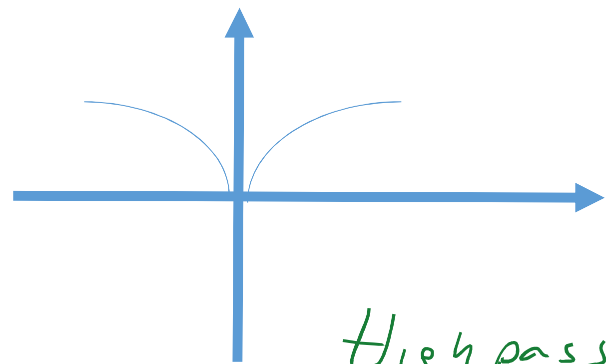
Στις χαμηλές συχνότητες ($\to 0$) έχουμε "κέρδος" ~ 1

Στις υψηλότερες συχνότητες ($\to \pi, -\pi$) έχουμε σημαντική απόσβεση!

$\Rightarrow$ Το σύστημά μας είναι ένα ΧΑΜΗΛΟΠΕΡΑΤΟ ΦΙΛΤΡΟ!

Να γίνει η ίδια ανάλυση για το σύστημα:

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) - \frac{1}{2}x(n-1)$$



High pass filter

Υψιπερατό φίλτρο