Ανακεφαλαιωτικές Ασκήσεις

Κ.Σπανάκης

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχ/κών και Μηχ/κών Η/Υ

kspan@ics.forth.gr

1 Ασκήσεις

Άσκηση 1η

- Να βρεθεί η εκθετική σειρά Fourier του εξής σήματος:

$$x(t) = \sin(200t) + \cos(200t) + 2\sin(400t) + 5\cos(400t)$$

Άσκηση 1η

- Να βρεθεί η εκθετική σειρά Fourier του εξής σήματος:

$$x(t) = \sin(200t) + \cos(200t) + 2\sin(400t) + 5\cos(400t)$$

- Δεδομένης της απόκρισης συχνότητος:

$$H(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq 300 \\ 1, & |\omega| > 300 \end{cases}$$

να βρείτε την έξοδο του συστήματος με είσοδο $x(t)$

Άσκηση 1η

- Να βρεθεί η εκθετική σειρά Fourier του εξής σήματος:

$$x(t) = \sin(200t) + \cos(200t) + 2\sin(400t) + 5\cos(400t)$$

- Δεδομένης της απόκρισης συχνότητος:

$$H(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq 300 \\ 1, & |\omega| > 300 \end{cases}$$

  να βρείτε την έξοδο του συστήματος με είσοδο $x(t)$

- Υπόδειξη: $\sin(at) = \frac{e^{jat} - e^{-jat}}{2j}$, $\cos(at) = \frac{e^{jat} + e^{-jat}}{2}$

Λύση 1ου σήματος

- $x(t) = \sin(200t) + \cos(200t) + 2\sin(400t) + 5\cos(400t) \Rightarrow$

Λύση 1ου σήματος

- $x(t) = \sin(200t) + \cos(200t) + 2\sin(400t) + 5\cos(400t) \Rightarrow$

Λύση 1ου σήματος

- $x(t) = \sin(200t) + \cos(200t) + 2\sin(400t) + 5\cos(400t) \Rightarrow x(t) = \dfrac{e^{j200t} - e^{-j200t}}{2j} + \dfrac{e^{j200t} + e^{-j200t}}{2} + 2\dfrac{e^{j400t} - e^{-j400t}}{2j} + 5\dfrac{e^{j400t} + e^{-j400t}}{2} \Rightarrow$

Λύση 1ου σήματος

- $x(t) = \sin(200t) + \cos(200t) + 2\sin(400t) + 5\cos(400t) \Rightarrow x(t) = \frac{e^{j200t} - e^{-j200t}}{2j} + \frac{e^{j200t} + e^{-j200t}}{2} + 2\frac{e^{j400t} - e^{-j400t}}{2j} + 5\frac{e^{j400t} + e^{-j400t}}{2} \Rightarrow x(t) = e^{-j400t}\left(-\frac{2}{2j} + \frac{5}{2}\right) + e^{-j200t}\left(-\frac{1}{2j} + \frac{1}{2}\right) + e^{j200t}\left(\frac{1}{2j} + \frac{1}{2}\right) + e^{j400t}\left(\frac{2}{2j} + \frac{5}{2}\right) \Rightarrow$

Λύση 1ου σήματος

- $x(t) = \sin(200t) + \cos(200t) + 2\sin(400t) + 5\cos(400t) \Rightarrow x(t) = \frac{e^{j200t} - e^{-j200t}}{2j} + \frac{e^{j200t} + e^{-j200t}}{2} + 2\frac{e^{j400t} - e^{-j400t}}{2j} + 5\frac{e^{j400t} + e^{-j400t}}{2} \Rightarrow x(t) = e^{-j400t}\left(-\frac{2}{2j} + \frac{5}{2}\right) + e^{-j200t}\left(-\frac{1}{2j} + \frac{1}{2}\right) + e^{j200t}\left(\frac{1}{2j} + \frac{1}{2}\right) + e^{j400t}\left(\frac{2}{2j} + \frac{5}{2}\right) \Rightarrow x(t) = e^{-j400t}\left(-\frac{1}{j} + \frac{5}{2}\right) + e^{-j200t}\left(-\frac{1}{2j} + \frac{1}{2}\right) + e^{j200t}\left(\frac{1}{2j} + \frac{1}{2}\right) + e^{j400t}\left(\frac{1}{j} + \frac{5}{2}\right) \Rightarrow$

Λύση 1ου σήματος

- $x(t) = \sin(200t) + \cos(200t) + 2\sin(400t) + 5\cos(400t) \Rightarrow x(t) = \frac{e^{j200t} - e^{-j200t}}{2j} + \frac{e^{j200t} + e^{-j200t}}{2} + 2\frac{e^{j400t} - e^{-j400t}}{2j} + 5\frac{e^{j400t} + e^{-j400t}}{2} \Rightarrow x(t) = e^{-j400t}\left(-\frac{2}{2j} + \frac{5}{2}\right) + e^{-j200t}\left(-\frac{1}{2j} + \frac{1}{2}\right) + e^{j200t}\left(\frac{1}{2j} + \frac{1}{2}\right) + e^{j400t}\left(\frac{2}{2j} + \frac{5}{2}\right) \Rightarrow x(t) = e^{-j400t}\left(-\frac{1}{j} + \frac{5}{2}\right) + e^{-j200t}\left(-\frac{1}{2j} + \frac{1}{2}\right) + e^{j200t}\left(\frac{1}{2j} + \frac{1}{2}\right) + e^{j400t}\left(\frac{1}{j} + \frac{5}{2}\right) \Rightarrow x(t) = e^{-j400t}\left(j + \frac{5}{2}\right) + e^{-j200t}\left(\frac{j}{2} + \frac{1}{2}\right) + e^{j200t}\left(-\frac{j}{2} + \frac{1}{2}\right) + e^{j400t}\left(-j + \frac{5}{2}\right) \Rightarrow$

Λύση 2ου σήματος

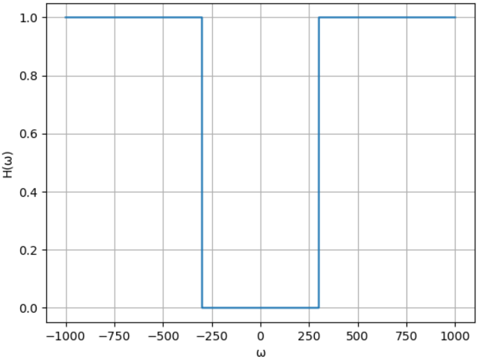
- 2 τρόποι:

Λύση 2ου σήματος

- 2 τρόποι:
  - Εύρεση του μετασχηματισμού Fourier $X(\omega)$ του σήματος εισόδου και υπολογισμός του $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$, με το τελικό σήμα να βρίσκεται με την χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier στο $Y(\omega)$

Λύση 2ου σήματος

- 2 τρόποι:
  - Εύρεση του μετασχηματισμού Fourier $X(\omega)$ του σήματος εισόδου και υπολογισμός του $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$, με το τελικό σήμα να βρίσκεται με την χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier στο $Y(\omega)$
  - Μελέτη της απόκρισης συχνότητος $H(\omega)$.



Λύση 2ου σήματος (Συνέχεια)

- 1ος τρόπος: Σίγουρος αν βασίζεσαι αποκλειστικά στα μαθηματικά αλλά και αργός.

Λύση 2ου σήματος (Συνέχεια)

- 1ος τρόπος: Σίγουρος αν βασίζεσαι αποκλειστικά στα μαθηματικά αλλά και αργός.
- 2ος τρόπος: Βάσει του σχήματος, βλέπομε ότι είναι υψιπερατό φίλτρο το οποίο αποκλείει οποιαδήποτε συχνότητα είναι κάτω από ένα κατώφλι (στην περίπτωσή μας είναι 300). Αφού το σήμα εισόδου αποτελείται από 2 συχνότητες 200, 400, τότε η 1η που είναι κάτω των 300, αποκλείεται στην έξοδο και επιτρέπεται μόνο η συχνότητα 400. Άρα η έξοδος είναι $y(t) = 2\sin(400t) + 5\cos(400t)$

Άσκηση 2η

- Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$x(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

Άσκηση 2η

- Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος

$$x(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

- Υπόδειξη: α)$\mathcal{F}\left\{e^{-\alpha|t|}\right\} = \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$, $\alpha > 0$, β) $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) \Rightarrow$ $\mathcal{F}\{X(t)\} = 2\pi x(-\omega)$

Λύση

- Το σήμα $x(t) = \dfrac{2}{1+t^2} = \dfrac{2\cdot 1}{1^2+t^2}$ μοιάζει με τον μετασχηματισμό Fourier του σήματος $y(t) = e^{-2|t|}$.

Λύση

- Το σήμα $x(t) = \dfrac{2}{1+t^2} = \dfrac{2 \cdot 1}{1^2 + t^2}$ μοιάζει με τον μετασχηματισμό Fourier του σήματος $y(t) = e^{-2|t|}$.
- Βάσει αυτής της παρατήρησης, σε συνδυασμό με την 2η υπόδειξη που είναι η ιδιότητα του δυϊσμού, μπορούμε να συμπεράνομε ότι ο μετασχηματισμός Fourier του $x(t)$ είναι $X(\omega) = 2\pi y(-\omega) = 2\pi e^{-2|-\omega|} = 2\pi e^{-2|\omega|}$

Άσκηση 3η

- Να βρεθεί η συνέλιξη των παρακάτω σημάτων.

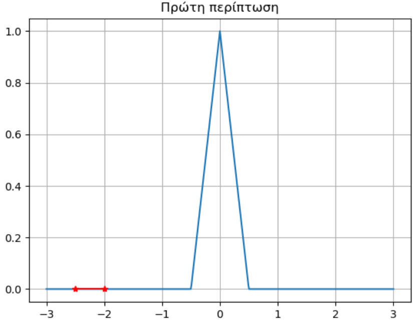
$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad , \; h(t) = \begin{cases} -2|t| + 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad ,$$

Λύση: 1ος τρόπος I

- $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \xrightarrow{x(t)=0,\ t\notin[0,\ 1/2]}$
$y(t) = \int_{0}^{\frac{1}{2}} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \xrightarrow{x(t)=1,\ t\in[0,\ 1/2]} y(t) = \int_{0}^{\frac{1}{2}} h(t-\tau)d\tau$
$\xrightarrow[\text{άρα } 0\to t-0=t,\ 1/2\to t-1/2]{\text{θέτω } z=t-\tau\Rightarrow dz=-d\tau} y(t) = \int_{t}^{t-1/2} h(z)(-dz) \Rightarrow y(t) = \int_{t-1/2}^{t} h(z)dz$

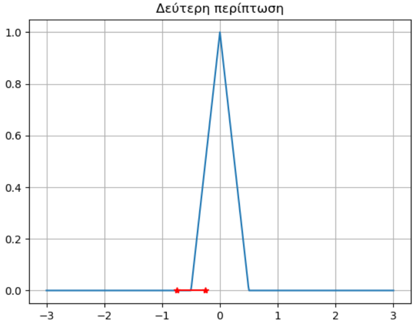
Περίπτωση 1η: $t < -\frac{1}{2}$

- $y(t) = \int_{t-1/2}^{t} h(z)dz \xrightarrow[\forall t \in (-\infty, 1/2)]{h(t)=0} y(t) = \int_{t-1/2}^{t} 0dz = 0$



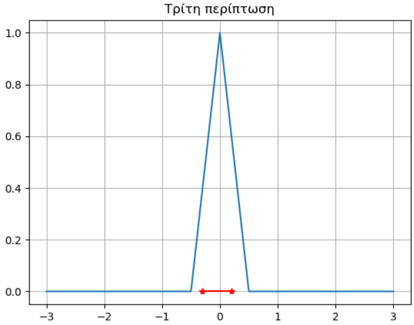
Περίπτωση 2η: $-1/2 \leq t \leq 0$ I

- $y(t) = \int_{t-1/2}^{t} h(z)dz \Rightarrow y(t) = \int_{t-1/2}^{-1/2} 0dz + \int_{-1/2}^{t} (2z+1)dz = 0 + [z^2+z]_{-1/2}^{t} = t^2 + t - \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right] = t^2 + t + \frac{1}{4}$



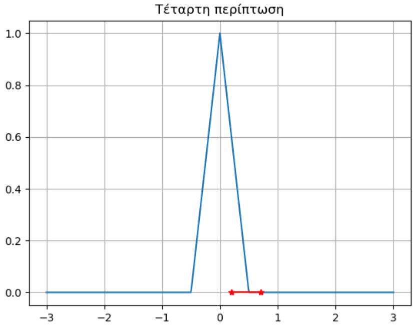
Περίπτωση 3η: $0 < t < \frac{1}{2}$

- $y(t) = \int_{t-1/2}^{t} h(z)dz \Rightarrow y(t) = \int_{t-1/2}^{0}(2z+1)dz + \int_{0}^{t}(-2z+1)dz =$
  $[z^2+z]_{t-1/2}^{0} + [-z^2+z]_0^t = \left[0^2+0-(t-1/2)^2-(t-1/2)\right] + \left[-t^2+t\right] =$
  $[-(t^2-t+1/4)-t+1/2] - t^2 + t = -2t^2 + t + 1/4$



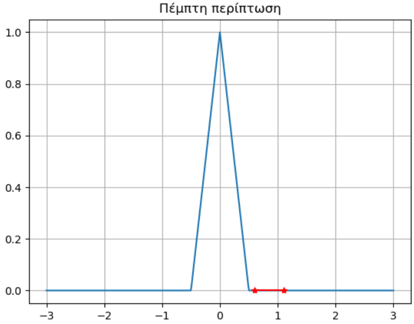
Περίπτωση 4η: $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$

- $y(t) = \int_{t-1/2}^{t} h(z)dz \Rightarrow y(t) = \int_{t-1/2}^{1/2} (-2z+1)dz + \int_{1/2}^{t} 0dz = [-z^2+z]_{t-1/2}^{1/2} + 0 =$
$[-(1/2)^2+1/2]-[-(t-1/2)^2+(t-1/2)] = 1/4+(t^2-t+1/4)-t+1/2 = t^2-2t+1$



Περίπτωση 5η: $t > 1$ I

- $y(t) = \int_{t-1/2}^{t} h(z)dz \xRightarrow[\forall t \in (-\infty, 1/2)]{h(t)=0} y(t) = \int_{t-1/2}^{t} 0dz = 0$



Αποτέλεσμα 1ου τρόπου

- Άρα $y(t) = \begin{cases} 0, \ \ t < -1/2 \\ t^2 + t + 1/4, \ \ -1/2 \leq t \leq 0 \\ -2t^2 + t + 1/4, \ \ 0 \leq t \leq 1/2 \\ t^2 - 2t + 1, \ \ 1/2 \leq t \leq 1 \\ 0, \ \ t > 1 \end{cases}$

Άσκηση 4η

- Εκφράστε την $w(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1 \\ -2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ βάσει του μοναδιαίου βήματος

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Άσκηση 4η

- Εκφράστε την $w(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 1 \\ -2, & 1 \le t < 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ βάσει του μοναδιαίου βήματος

  $$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

- Λύστε την διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = w(t), \;\; y(0) = 1$$

Άσκηση 4η

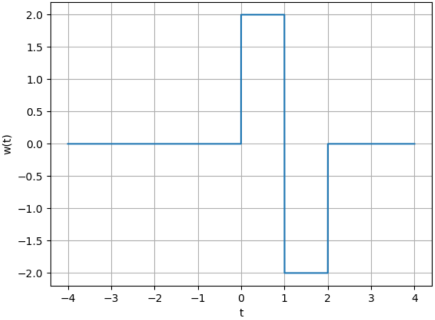
- Εκφράστε την $w(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 1 \\ -2, & 1 \le t < 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ βάσει του μοναδιαίου βήματος
  $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$
- Λύστε την διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = w(t), \; y(0) = 1$$

- Υπόδειξη: α) $\Pi(t) = u(t + 1/2) - u(t - 1/2)$ β)$\mathcal{ML}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \mathcal{R}e(s) > 0$,
  γ)$\mathcal{ML}\{x(t - t_0)\} = e^{-st_0} X(s)$, δ)$\mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)$,
  ε)$\mathcal{ML}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}, \mathcal{R}e(s) > -\mathcal{R}e(a)$, στ) $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$

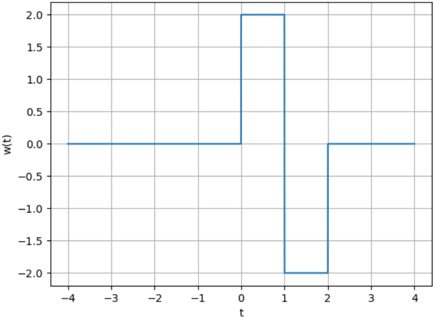
Λύση 1ου ερωτήματος

- Στην παρακάτω εικόνα είναι γραφική παράσταση της $w(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1 \\ -2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$



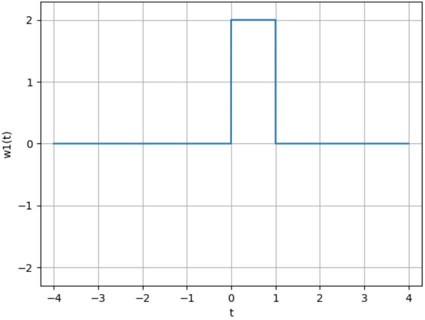
Λύση 1ου ερωτήματος

- Στην παρακάτω εικόνα είναι γραφική παράσταση της $w(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1 \\ -2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$
- Το σήμα $w(t)$ ισούται με $w_1(t) + w_2(t)$



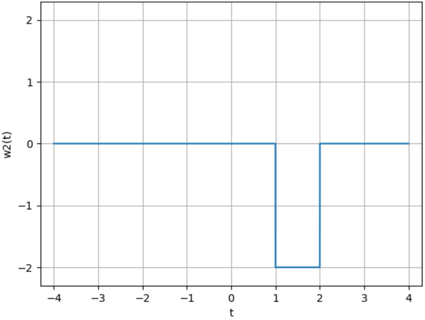
Λύση 1ου ερωτήματος

- $w_1(t) = 2\Pi(t-0.5) = 2\left[u(t+0.5-0.5) - u(t-0.5-0.5)\right] = 2\left[u(t) - u(t-1)\right]$



Λύση 1ου ερωτήματος

- $w_2(t) = -2\Pi(t - 1.5) = -2\,[u(t + 0.5 - 1.5) - u(t - 0.5 - 1.5)] = -2\,[u(t - 1) - u(t - 2)]$



Λύση 1ου ερωτήματος

- Άρα $w(t) = w_1(t) + w_2(t) = 2\left[u(t) - u(t-1)\right] - 2\left[u(t-1) - u(t-2)\right] = 2u(t) - 4u(t-1) + 2u(t-2)$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = w(t), \;\; y(0) = 1 \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = w(t), \; y(0) = 1 \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = w(t),\ \ y(0) = 1 \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t)\right\} =$
  $\mathcal{ML}\left\{2u(t) - 4u(t-1) + 2u(t-2)\right\} \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = w(t),\ \ y(0) = 1 \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t)\right\} =$
  $\mathcal{ML}\left\{2u(t) - 4u(t-1) + 2u(t-2)\right\} \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 2\mathcal{ML}\left\{y(t)\right\} =$
  $2\mathcal{ML}\left\{u(t)\right\} - 4\mathcal{ML}\left\{4u(t-1)\right\} + 2\mathcal{ML}\left\{2u(t-2)\right\}$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = w(t),\ \ y(0) = 1 \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t)\right\} =$
  $\mathcal{ML}\left\{2u(t) - 4u(t-1) + 2u(t-2)\right\} \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 2\mathcal{ML}\left\{y(t)\right\} =$
  $2\mathcal{ML}\left\{u(t)\right\} - 4\mathcal{ML}\left\{4u(t-1)\right\} + 2\mathcal{ML}\left\{2u(t-2)\right\} \xRightarrow[\text{Υπόδειξη δ στα αριστερά}]{\text{Υπόδειξη β,γ στα δεξιά}}$
  $sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{2}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + 1 \Rightarrow Y(s)(s+2) =$
  $\frac{2}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + 1$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = w(t),\ \ y(0) = 1 \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t)\right\} =$
$\mathcal{ML}\left\{2u(t) - 4u(t-1) + 2u(t-2)\right\} \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\dfrac{dy(t)}{dt}\right\} + 2\mathcal{ML}\left\{y(t)\right\} =$
$2\mathcal{ML}\left\{u(t)\right\} - 4\mathcal{ML}\left\{4u(t-1)\right\} + 2\mathcal{ML}\left\{2u(t-2)\right\} \xRightarrow[\text{Υπόδειξη δ στα αριστερά}]{\text{Υπόδειξη β,γ στα δεξιά}}$
$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \dfrac{2}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + 1 \Rightarrow Y(s)(s+2) =$
$\dfrac{2}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + 1 \Rightarrow Y(s) = \dfrac{2}{s(s+2)}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \dfrac{1}{s+2}(1)$
- Το κλάσμα $\dfrac{2}{s(s+2)}$ ισούται με
$\dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+2} = \dfrac{A(s+2) + Bs}{s(s+2)} = \dfrac{A(s+2) + Bs}{s(s+2)} = \dfrac{As + 2A + Bs}{s(s+2)} =$
$\dfrac{s(A+B) + 2A}{s(s+2)} \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = w(t),\ y(0) = 1 \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t)\right\} =$
$\mathcal{ML}\{2u(t) - 4u(t-1) + 2u(t-2)\} \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 2\mathcal{ML}\{y(t)\} =$
$2\mathcal{ML}\{u(t)\} - 4\mathcal{ML}\{4u(t-1)\} + 2\mathcal{ML}\{2u(t-2)\} \xRightarrow[\text{Υπόδειξη δ στα αριστερά}]{\text{Υπόδειξη β,γ στα δεξιά}}$
$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{2}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + 1 \Rightarrow Y(s)(s+2) =$
$\frac{2}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s(s+2)}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \frac{1}{s+2}(1)$
- Το κλάσμα $\frac{2}{s(s+2)}$ ισούται με
$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} = \frac{A(s+2) + Bs}{s(s+2)} = \frac{A(s+2) + Bs}{s(s+2)} = \frac{As + 2A + Bs}{s(s+2)} =$
$\frac{s(A+B) + 2A}{s(s+2)} \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = w(t),\ \ y(0) = 1 \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\dfrac{dy(t)}{dt} + 2y(t)\right\} =$
  $\mathcal{ML}\left\{2u(t) - 4u(t-1) + 2u(t-2)\right\} \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\dfrac{dy(t)}{dt}\right\} + 2\mathcal{ML}\left\{y(t)\right\} =$
  $2\mathcal{ML}\left\{u(t)\right\} - 4\mathcal{ML}\left\{4u(t-1)\right\} + 2\mathcal{ML}\left\{2u(t-2)\right\} \xRightarrow[\text{Υπόδειξη δ στα αριστερά}]{\text{Υπόδειξη β,γ στα δεξιά}}$
  $sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \dfrac{2}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + 1 \Rightarrow Y(s)(s+2) =$
  $\dfrac{2}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + 1 \Rightarrow Y(s) = \dfrac{2}{s(s+2)}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \dfrac{1}{s+2}(1)$
- Το κλάσμα $\dfrac{2}{s(s+2)}$ ισούται με
  $\dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+2} = \dfrac{A(s+2) + Bs}{s(s+2)} = \dfrac{A(s+2) + Bs}{s(s+2)} = \dfrac{As + 2A + Bs}{s(s+2)} =$
  $\dfrac{s(A+B) + 2A}{s(s+2)} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = w(t),\ \ y(0) = 1 \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t)\right\} =$
  $\mathcal{ML}\{2u(t) - 4u(t-1) + 2u(t-2)\} \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 2\mathcal{ML}\{y(t)\} =$
  $2\mathcal{ML}\{u(t)\} - 4\mathcal{ML}\{4u(t-1)\} + 2\mathcal{ML}\{2u(t-2)\} \xRightarrow[\text{Υπόδειξη δ στα αριστερά}]{\text{Υπόδειξη β,γ στα δεξιά}}$
  $sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{2}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + 1 \Rightarrow Y(s)(s+2) =$
  $\frac{2}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s(s+2)}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \frac{1}{s+2}(1)$
- Το κλάσμα $\frac{2}{s(s+2)}$ ισούται με
  $\frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} = \frac{A(s+2)+Bs}{s(s+2)} = \frac{A(s+2)+Bs}{s(s+2)} = \frac{As+2A+Bs}{s(s+2)} =$
  $\frac{s(A+B)+2A}{s(s+2)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A=-1 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = w(t),\ y(0) = 1 \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t)\right\} =$
  $\mathcal{ML}\{2u(t) - 4u(t-1) + 2u(t-2)\} \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 2\mathcal{ML}\{y(t)\} =$
  $2\mathcal{ML}\{u(t)\} - 4\mathcal{ML}\{4u(t-1)\} + 2\mathcal{ML}\{2u(t-2)\} \xrightarrow[\text{Υπόδειξη δ στα αριστερά}]{\text{Υπόδειξη β,γ στα δεξιά}}$
  $sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{2}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + 1 \Rightarrow Y(s)(s+2) =$
  $\frac{2}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s(s+2)}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \frac{1}{s+2}(1)$
- Το κλάσμα $\frac{2}{s(s+2)}$ ισούται με
  $\frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} = \frac{A(s+2) + Bs}{s(s+2)} = \frac{A(s+2) + Bs}{s(s+2)} = \frac{As + 2A + Bs}{s(s+2)} =$
  $\frac{s(A+B) + 2A}{s(s+2)} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -A = -1 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{s(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$

Λύση 2ου ερωτήματος

- Άρα $Y(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \frac{1}{s+2} \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- Άρα $Y(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \frac{1}{s+2} \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- Άρα $Y(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) - \frac{1}{s+2}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \frac{1}{s+2} \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- Άρα $Y(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) - \frac{1}{s+2}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s} - 2e^{-s}\frac{1}{s} + e^{-2s}\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + 2e^{-s}\frac{1}{s+2} - e^{-2s}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+2} \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- Άρα $Y(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y(s) =$
$\frac{1}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) - \frac{1}{s+2}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y(s) =$
$\frac{1}{s} - 2e^{-s}\frac{1}{s} + e^{-2s}\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + 2e^{-s}\frac{1}{s+2} - e^{-2s}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y(s) =$
$\frac{1}{s} - 2e^{-s}\frac{1}{s} + e^{-2s}\frac{1}{s} + 2e^{-s}\frac{1}{s+2} - e^{-2s}\frac{1}{s+2} \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- Άρα $Y(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y(s) =$
$\frac{1}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) - \frac{1}{s+2}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y(s) =$
$\frac{1}{s} - 2e^{-s}\frac{1}{s} + e^{-2s}\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + 2e^{-s}\frac{1}{s+2} - e^{-2s}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y(s) =$
$\frac{1}{s} - 2e^{-s}\frac{1}{s} + e^{-2s}\frac{1}{s} + 2e^{-s}\frac{1}{s+2} - e^{-2s}\frac{1}{s+2} \Rightarrow y(t) =$
$\mathcal{ML}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - 2e^{-s}\frac{1}{s} + e^{-2s}\frac{1}{s} + 2e^{-s}\frac{1}{s+2} - e^{-2s}\frac{1}{s+2}\right\} \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- Άρα $Y(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y(s) =$
  $\frac{1}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) - \frac{1}{s+2}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y(s) =$
  $\frac{1}{s} - 2e^{-s}\frac{1}{s} + e^{-2s}\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + 2e^{-s}\frac{1}{s+2} - e^{-2s}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y(s) =$
  $\frac{1}{s} - 2e^{-s}\frac{1}{s} + e^{-2s}\frac{1}{s} + 2e^{-s}\frac{1}{s+2} - e^{-2s}\frac{1}{s+2} \Rightarrow y(t) =$
  $\mathcal{ML}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - 2e^{-s}\frac{1}{s} + e^{-2s}\frac{1}{s} + 2e^{-s}\frac{1}{s+2} - e^{-2s}\frac{1}{s+2}\right\} \Rightarrow y(t) =$
  $\mathcal{ML}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2\mathcal{ML}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{ML}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{1}{s}\right\} + 2\mathcal{ML}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s+2}\right\} -$
  $\mathcal{ML}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{1}{s+2}\right\} \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- Άρα $Y(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y(s) =$
  $\frac{1}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) - \frac{1}{s+2}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y(s) =$
  $\frac{1}{s} - 2e^{-s}\frac{1}{s} + e^{-2s}\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + 2e^{-s}\frac{1}{s+2} - e^{-2s}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+2} \Rightarrow Y(s) =$
  $\frac{1}{s} - 2e^{-s}\frac{1}{s} + e^{-2s}\frac{1}{s} + 2e^{-s}\frac{1}{s+2} - e^{-2s}\frac{1}{s+2} \Rightarrow y(t) =$
  $\mathcal{ML}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - 2e^{-s}\frac{1}{s} + e^{-2s}\frac{1}{s} + 2e^{-s}\frac{1}{s+2} - e^{-2s}\frac{1}{s+2}\right\} \Rightarrow y(t) =$
  $\mathcal{ML}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2\mathcal{ML}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s}\right\} + \mathcal{ML}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{1}{s}\right\} + 2\mathcal{ML}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{s+2}\right\} -$
  $\mathcal{ML}^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{1}{s+2}\right\} \Rightarrow y(t) =$
  $u(t) - 2u(t-1) + u(t-2) + e^{-2(t-1)}u(t-1) - e^{-2(t-2)}u(t-2)$