$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \quad *2$$

$$x_1(t+T) = x_1(t) \; ;$$

$$x_1(t+T) = \cos^2(\underbrace{2\pi(t+T)}_{\theta}) \overset{*2}{=} \frac{1}{2}\left(1+\cos(\underbrace{4\pi(t+T)}_{2\theta})\right)$$

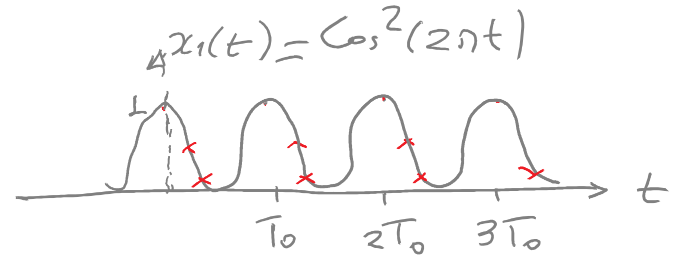
$$x_1(t+T) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(4\pi t + \underbrace{4\pi T}_{2k\pi})\right)$$

$$\left\{ \text{αν } \boxed{4\pi T = 2k\pi} \text{ τότε } x_1(t+T) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(\underbrace{\overset{2\cdot \overset{\theta}{\widetilde{2\pi t}}}{4\pi t}}_{2\theta})\right) \overset{*2}{=} \cos^2(\overset{\theta}{\widetilde{2\pi t}}) = x_1(t) \right\}$$

→ τότε $\cos(4\pi t + 4\pi T) = \cos(4\pi t)$

Ισχύει για $T = \frac{k}{2}$, $k = 1, 2, 3 \ldots$

Θέτοντας $k=1$ ⇒ Θεμελιώδη περίοδο $T_0 = \frac{1}{2}$ sec



$x_2(t) = e^{-2t} \cdot \cos(2\pi t)$ είναι περιοδικό; $\quad \{ e^{a} \cdot e^{b} = e^{a+b} \}$

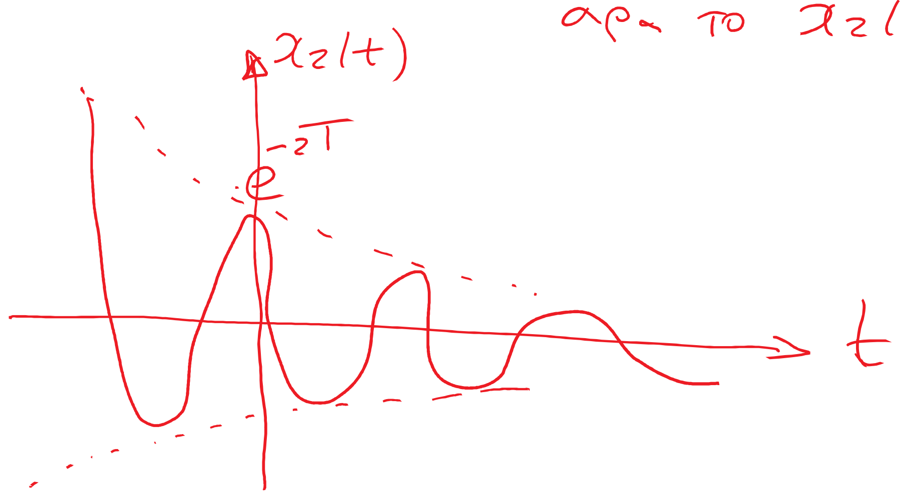
$x_2(t+T) = x_2(t)$;

$x_2(t+T) = e^{-2(t+T)} \cdot \cos(2\pi(t+T)) = e^{-2t} \cdot e^{-2T} \cdot \cos(2\pi t + \underbrace{2\pi T}_{2\kappa\pi})$

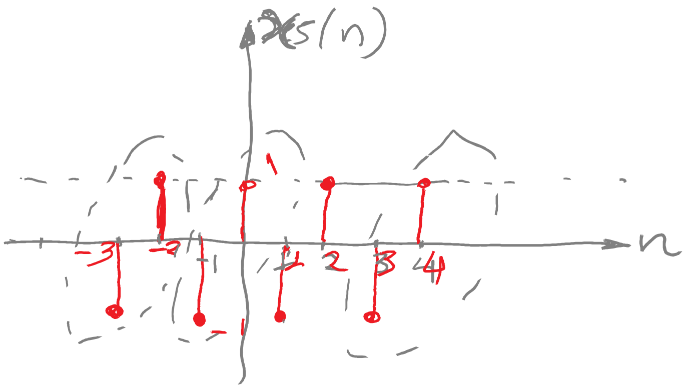
Έστω ότι $2\pi T = 2\kappa\pi \Rightarrow x_2(t+T) = e^{-2t} \cdot e^{-2T} \cdot \cos(2\pi t) = e^{-2T} \cdot \underbrace{e^{-2t} \cdot \cos(2\pi t)}_{x_2(t)}$

$\to x_2(t+T) = e^{-2T} \cdot x_2(t)$ ισχύει μόνο όταν $T = 0$

άρα το $x_2(t)$ είναι μη περιοδικό

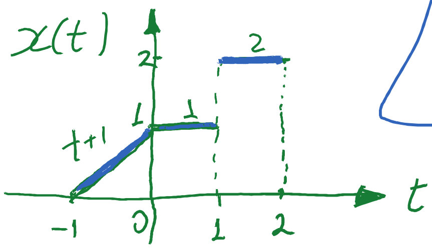


$x_5(n) = (-1)^n$ είναι περιοδικό;



$$x_5(n) = \begin{cases} 1 & \text{για άρτιες τιμές του } n \\ -1 & \text{για περιττές '' '' } n \end{cases}$$

Το σήμα έχει θεμελιώδη περίοδο $N_0 = 2$ δείγματα



$x(3t+4)$;

(A) Βρίσκουμε εμείς την αναλυτική έκφραση!

$$x(t) = \begin{cases} t+1 & -1 \le t < 0 \\ 1 & 0 \le t < 1 \\ 2 & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} t=-1 \rightarrow x(t) = 0 \\ t = 0 \rightarrow x(t) = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (-1,0) \\ (0,1) \end{array}$$

(B) $\underline{t \rightarrow 3t+4}$

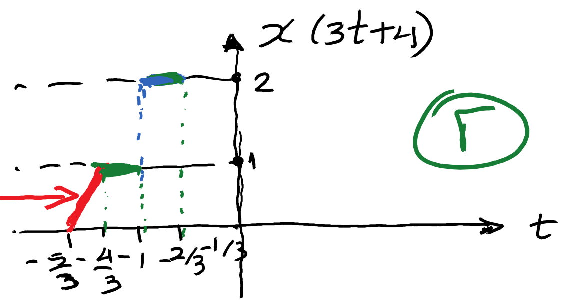
$$x(3t+4) = \begin{cases} 3t+4+1 = 3t+5 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

$-1 \le 3t+4 < 0 \Leftrightarrow -5 \le 3t < -4 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \le t < -\frac{4}{3}$

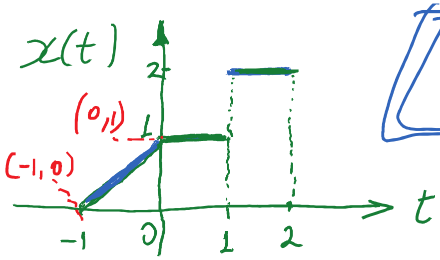
$0 \le 3t+4 < 1 \Leftrightarrow -4 \le 3t < -3 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \le t < -1$

$1 \le 3t+4 < 2 \Leftrightarrow -3 \le 3t < -2 \Leftrightarrow -1 \le t < -\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} t = -\frac{4}{3} \rightarrow x = 1 \\ 3t+5 \\ t = -\frac{5}{3} \rightarrow x = 0 \end{cases}$$



(Γ) Γραφική παράσταση



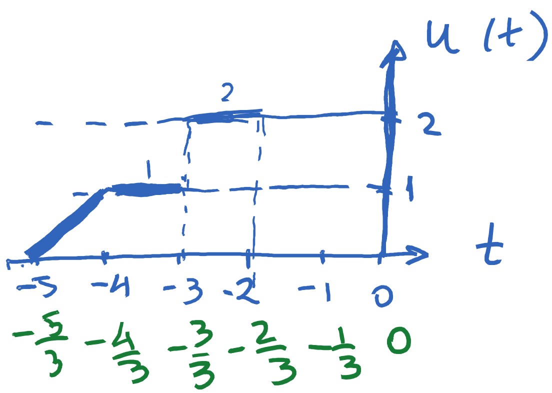
$\boxed{x(3t+4)}$;

Ⓐ μετατοπίζω 4 αριστερά

Αρχικά θέτω $u(t)=x(t+4)$

$\Downarrow$

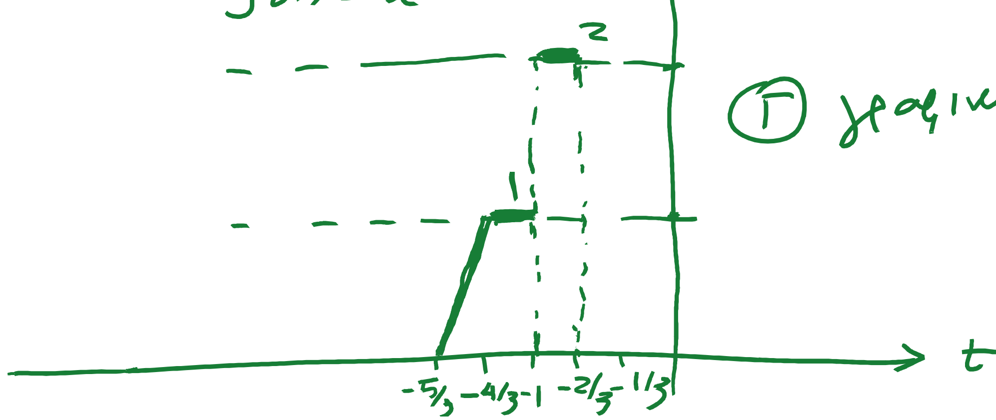
Ⓑ $\boxed{g(t)=u(3t)=x(3t+4)}$



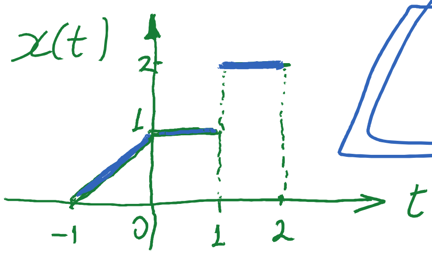
αρκεί αντικατάσταση 3t στο u(t) για να πάρω το ζητούμενο x(3t+4)!

"Διαιρούμε όλα τα t δια 3" → θα αλλάξει η κλίμακα

$g(t)=x(3t+4)$

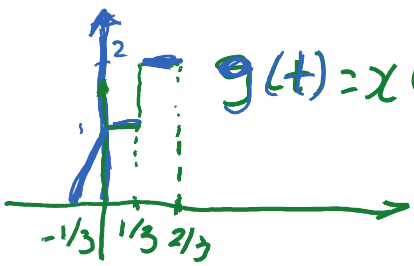


Ⓖ γραφική παράσταση



$$\boxed{x(3t+4)\ ;}$$

(A) $g(t) = x(3t)$ {συμπίεση}



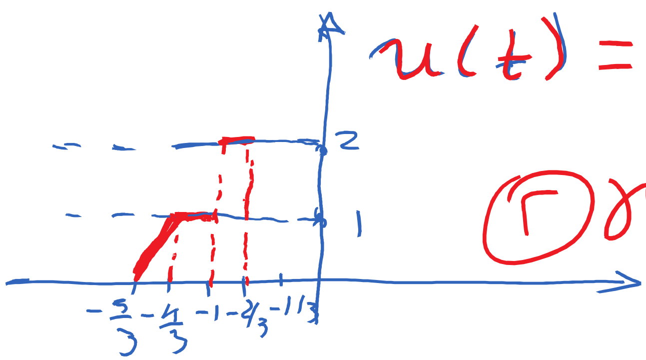
$g(t) = x(3t)$

(B) $u(t) = g\left(t+\frac{4}{3}\right) = x(3t+4)$ {μετατόπιση αριστερά $-\frac{4}{3}$}

$g(t) = x(3t)$

$g\left(t+\frac{4}{3}\right) = x\left(3t+\underset{\overset{\parallel}{4}}{\frac{12}{3}}\right)$ ✓

$u(t) = x(3t+4)$



(Γ) γραφική παράσταση

Έστω το σήμα $y(t)$ το οποίο προέρχεται από το $x(t)$ μέσω του μετασχηματισμού $y(t)=x(-4t-8)$. Ποιές είναι οι παράμετροι του μετ/μου;

Ουσιαστικά πρέπει να εξηγήσουμε πως το $y(t)$ προκύπτει από το $x(t)$;

$$y(t)=x(-4t-8)=x(-4(t+2))$$

μετατόπιση

κλιμάκωση (συμπίεση, διαστολή...)

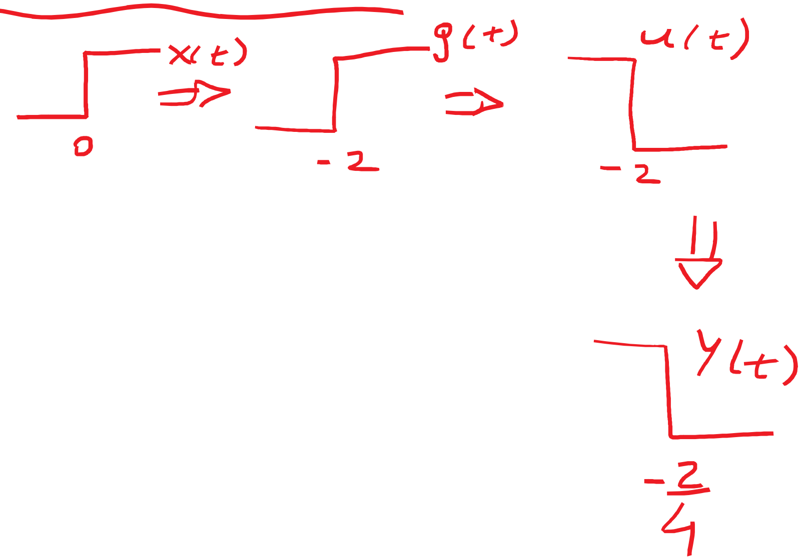
*

$y(t)$:

Α. $g(t)=x(t+2)$

Β. $u(t)=g(-t)=x(-t-2)$

Γ. $y(t)=u(4t)=x(-4t-8)$



Έστω $x(t) = t^3$, $y(t) = 8t^3$

$\boxed{\text{Τα } x(t), y(t) \text{ σχετίζονται με μετασχηματισμό;}}$

$y(t) = x(2t) = (2t)^3 = 8t^3$ ✓

Άρα συμπίεση με συντελεστή 2!

Προσοχή! Ισχύει και $y(t) = 8 \cdot x(t)$ αλλά αυτό δεν αποτελεί μετασχηματισμό.

Δίνεται το σήμα: $x(t) = \begin{cases} 2t, & -1 \le t < 0 \\ 2-t, & 0 \le t < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

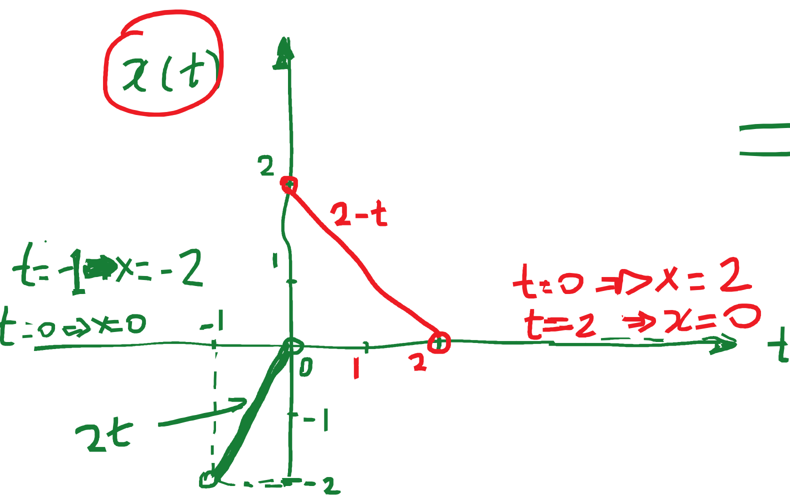
Να βρεθεί ο μαθ. τύπος και να γίνει η γραφική παράσταση του $y(t) = x(1-t)$

$t \to t-1$

$$y(t) = x(1-t) = \begin{cases} 2(1-t), & -1 \le 1-t < 0 \\ 2-(1-t), & 0 \le 1-t < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

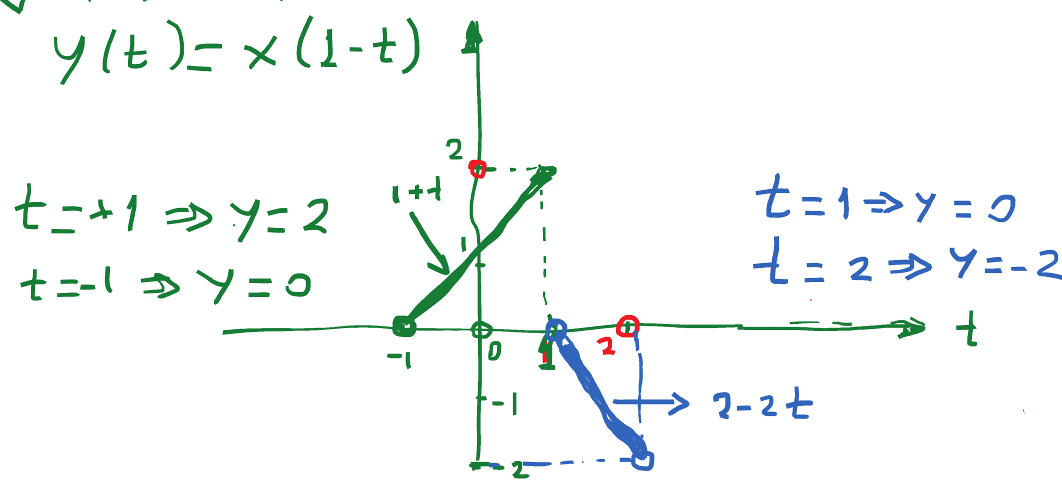
$$\Rightarrow y(t) = x(1-t) = \begin{cases} 2-2t, & -2 \le -t < -1 \text{ ή } 1 < t \le 2 \\ 1+t, & -1 \le -t < 1 \text{ ή } -1 < t \le 1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Μαθ. τύπος



⇓ Γραφική παράσταση

$y(t) = x(1-t)$



Δίνεται το σήμα:

$$x(t) = \begin{cases} 2t, & -1 \leq t < 0 \\ 2-t, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

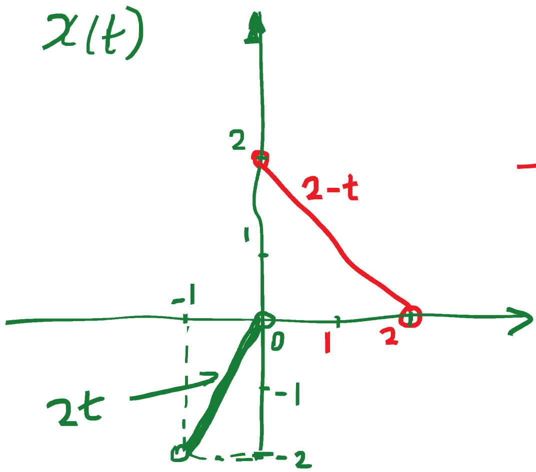
Να βρεθεί ο μαθ. τύπος και να γίνει η γραφική παράσταση του $y(t) = x(1-t)$

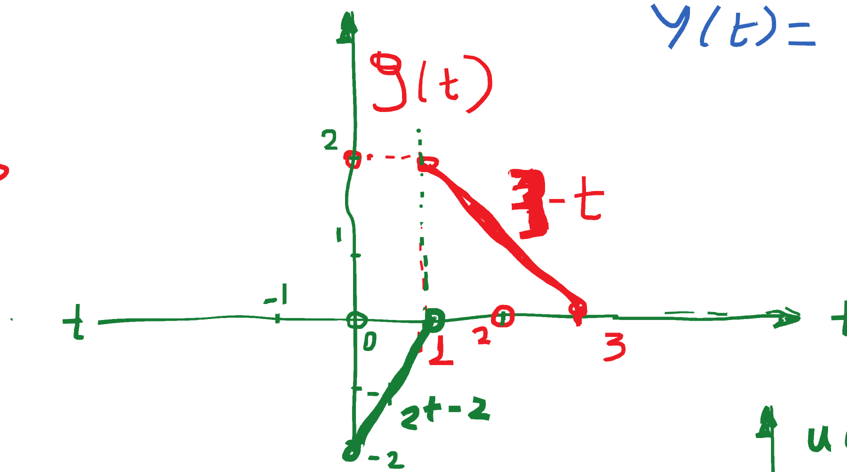
$y(t) = x(-1(t-1))$

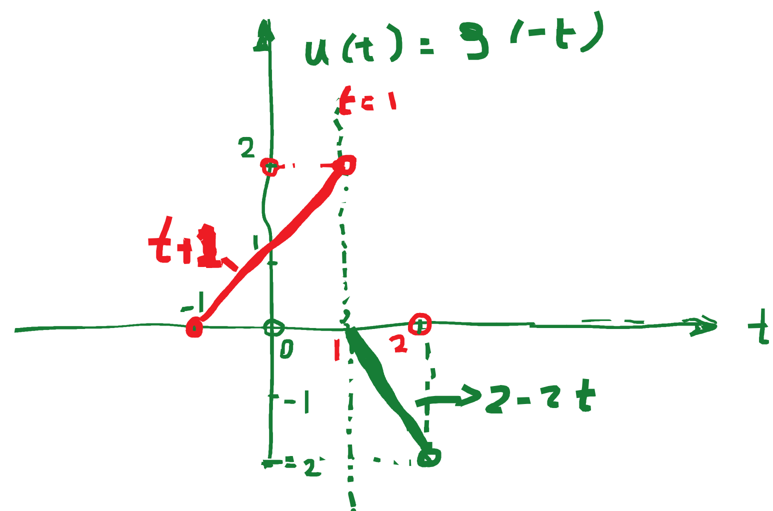
$\hookrightarrow g(t) = x(t-1)$

$\hookrightarrow u(t) = g(-t)$

$= x(-t+1)$







Δίνεται το σήμα: $x(t) = \begin{cases} 2t, & -1 \le t < 0 \\ 2-t, & 0 \le t < 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

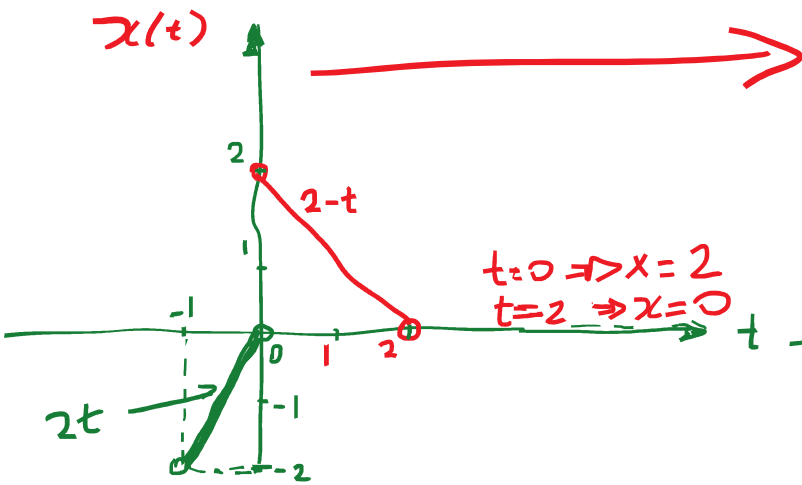
Να βρεθεί ο μαθ. τύπος του $y(t) = x(1-t) = x(-t+1)$

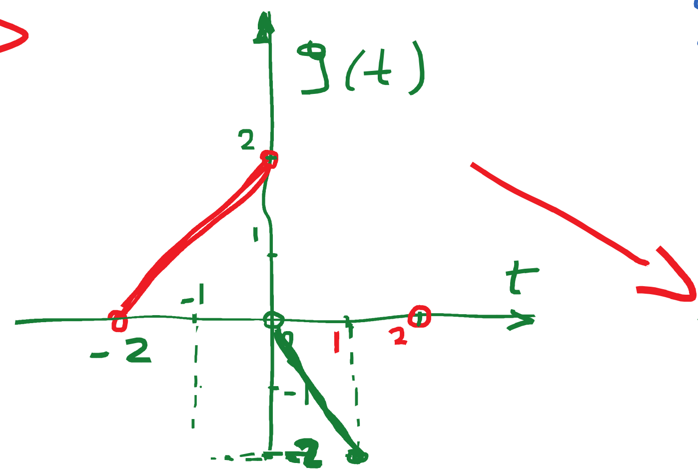
$x(t)$

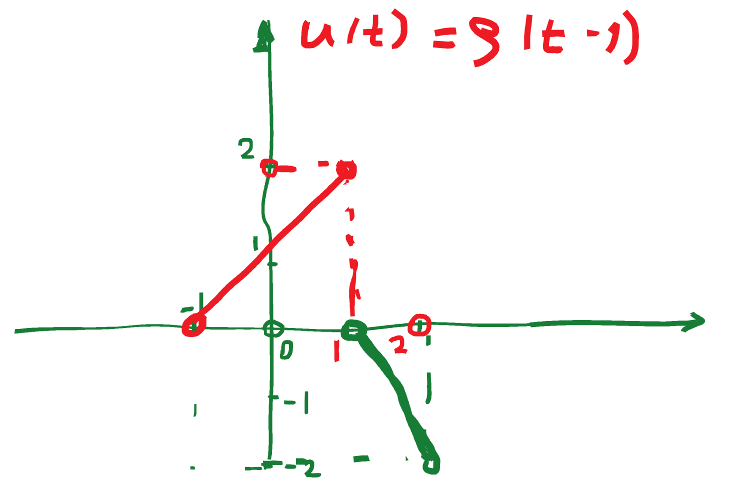
$g(t) = x(-t)$ ✓ ανάκλαση

$u(t) = g(t-1) = x(-t+1)$ μετατόπιση

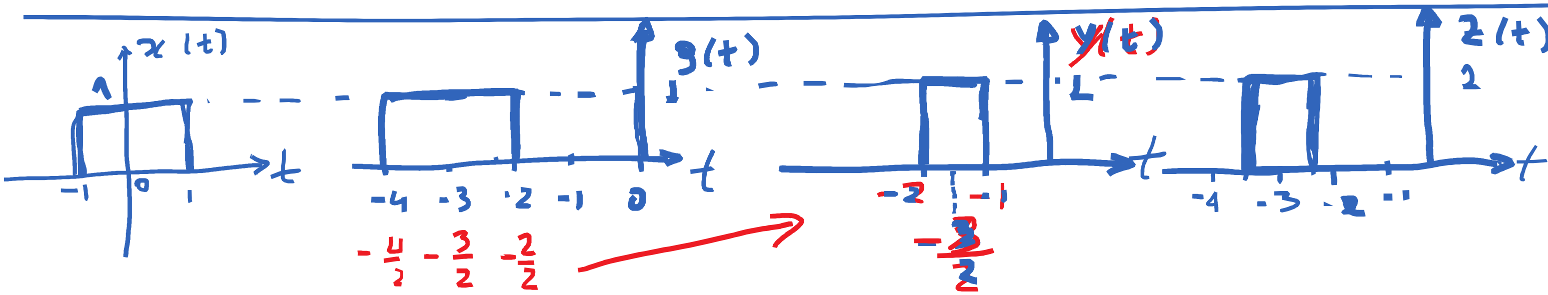
$\cancel{g(t+1) = x(-(t+1)) = x(-t-1)}$







Δίνεται το $x(t)$, να εκφράσετε τα $g(t)$, $y(t)$, $z(t)$ με τη βοήθεια του $x(t)$



1) $g(t) = x(t+3)$ ✓

2) $y(t) = \underset{t \to 2t}{g(2t)} = x(2t+3) = x\left(2\left(t+\frac{3}{2}\right)\right)$

T_0

3) $z(t)$ είναι το ίδιο με το $y(t)$ αλλά μετατοπισμένο : π.χ. $-\frac{3}{2} + ? = -3 \;\Big\}\; ? = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ $\frac{3}{2}$ μετατόπιση αριστερά $\Rightarrow$

$$z(t) = y\left(t+\frac{3}{2}\right) = \underset{t \to 2t}{g}\left(2\left(t+\frac{3}{2}\right)\right) = \underset{t \to t+3}{g(2t+3)} = x\big((2t+3)+3\big)$$

$$\Rightarrow z(t) = x(2t+6)$$

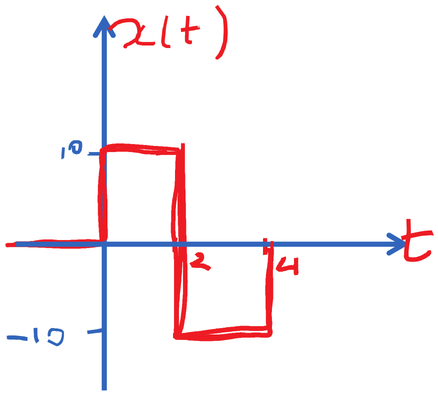
Άρτια ή περιττή συμμετρία; $x_1(t) = 3t^3$

$x_1(-t) = 3(-t)^3 = -3t^3 = -x_1(t) \Rightarrow$ περιττή

$x_2(t) = 3t^2 \Rightarrow x_2(-t) = 3(-t)^2 = 3t^2 = x_2(t) \Rightarrow$ άρτια συμμετρία

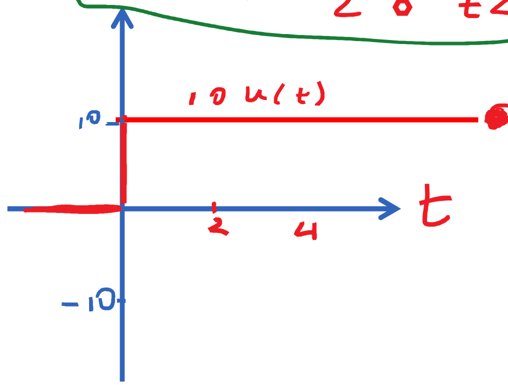
$x_3(t) = \sin(2t) \Rightarrow x_3(-t) = \sin(-2t) = -\sin(2t) = -x_3(t) \Rightarrow$ περιττή

$x_4(t) = 4 \cdot e^{-t} \Rightarrow x_4(-t) = 4e^{-(-t)} = 4e^{t} \neq \pm x_4(t) \Rightarrow$ δεν είναι συμμετρικό

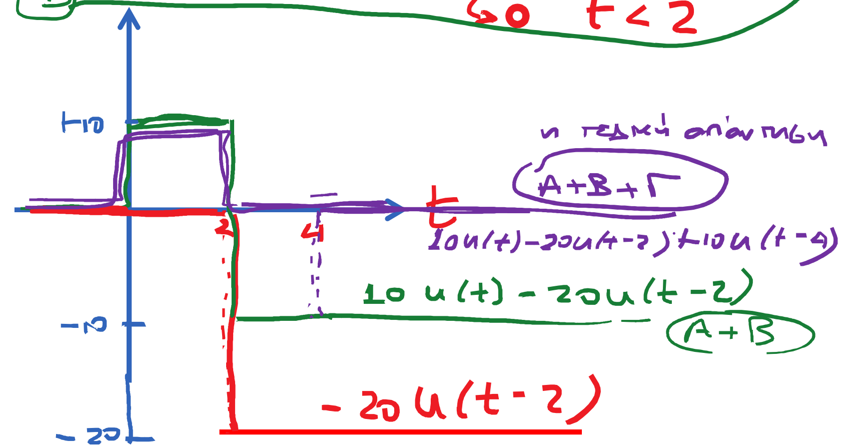


Να εκφρασθεί με βάση τις συναρτήσεις σημάτων που δείχνεται.

Α $\quad 10\,u(t) = \begin{cases} 10 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

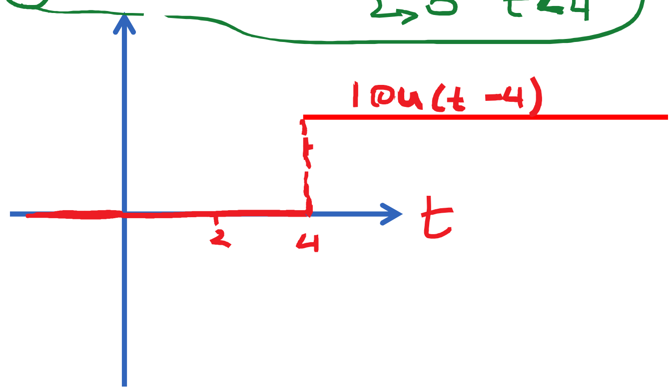


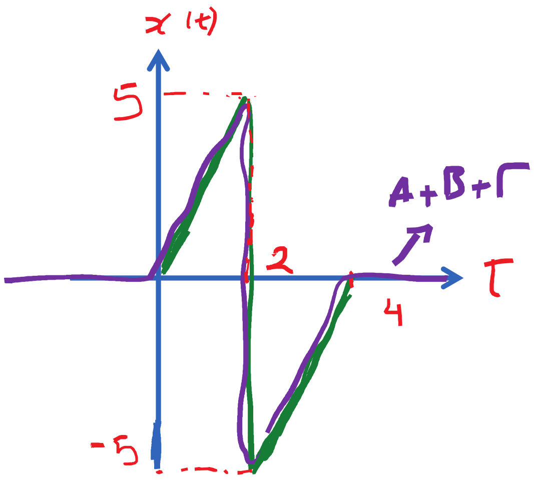
Β $\quad -20\,u(t-2) = \begin{cases} -20 & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$

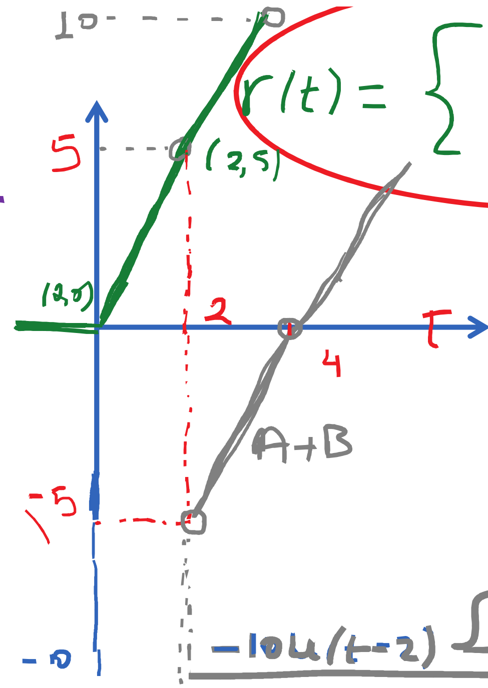


$10\,u(t) - 20\,u(t-2) + 10\,u(t-4)$

Γ $\quad 10\,u(t-4) \begin{cases} 10 & t > 4 \\ 0 & t < 4 \end{cases}$

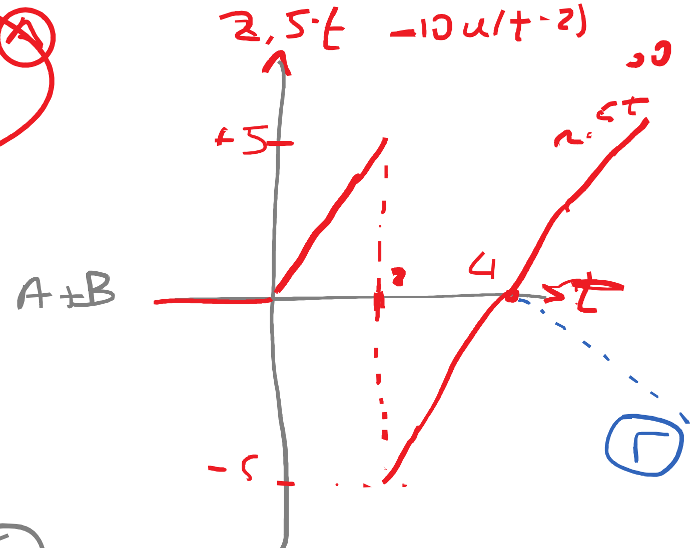


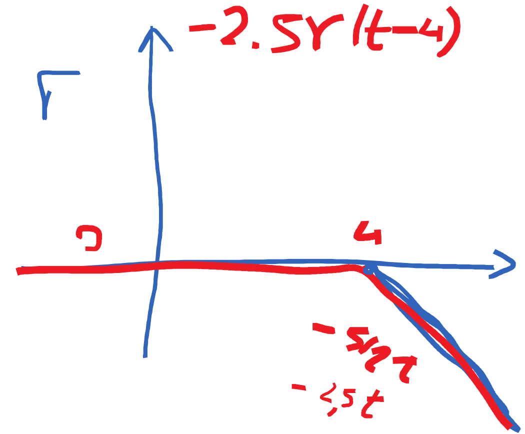




$$r(t) = \begin{cases} t, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \quad A$$

$$-10u(t-2) \begin{cases} \to -10 & t>2 \\ \to 0 & t<2 \end{cases} \quad B$$





$$x(t) = 2.5\,r(t) - 10\cdot u(t-2) - 2.5\,r(t-4)$$

A B Γ

$-\infty$: 2

$5 \to -5 \ (t=2)$

$10 \to 0 \ (t=4)$

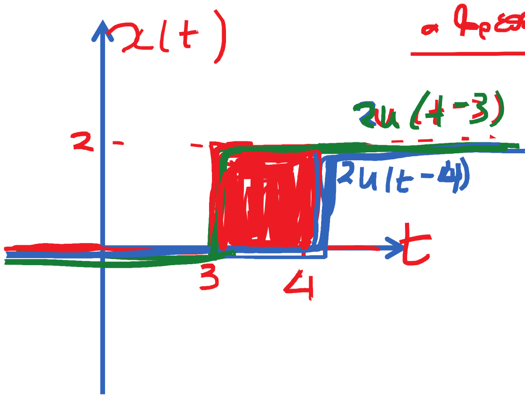
Examination: $t<0$: $A=0, B=0, \Gamma=0$ ✓

$t=2$: $x(2) = 2.5r(2) - 10 - 2.5\,r(-2) = 5 - 10 = -5$ ✓

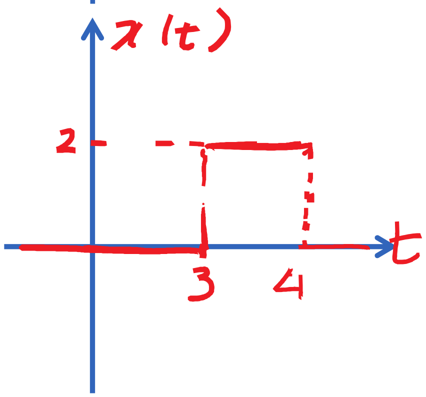
$t=4$: $x(t) = 2.5r(4) - 10 - 2.5\cdot r(t-4) = 0$ ✓

$t=5$: $x(t) = 2.5r(5) - 10 - 2.5r(1) = 0$ ✓

[illegible] η παράγωγος $x'(t)$

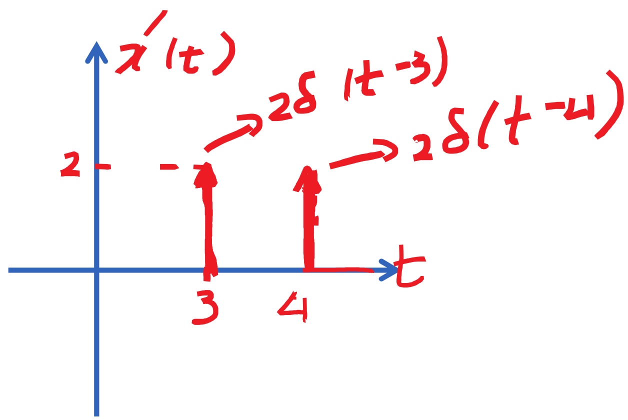


$$x(t) = 2u(t-3) - 2u(t-4)$$

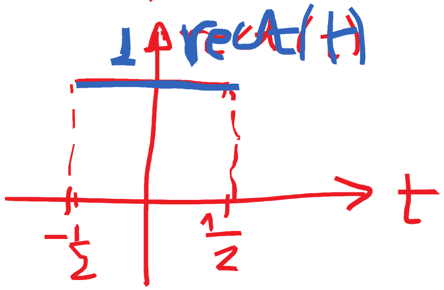


$$\frac{d}{dt}\big(u(t-T)\big) = \delta(t-T)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = 2\delta(t-3) - 2\delta(t-4)$$



Να βρεθεί η ενέργεια E του σήματος: $x(t) = 5\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-3}{4}\right)$ → $\mathrm{rect}(t)$



$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt$$

$$\mathrm{rect}(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Πρώτα θα βρω την αναλυτική έκφραση του $x(t)$:

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t-3}{4}\right) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < \frac{t-3}{4} < \frac{1}{2} \overset{\cdot 4}{\Longrightarrow} -2 < t-3 < 2 \Rightarrow 1 < t < 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

άσκηση να παραστήσετε το γραφικά

$$x(t) = 5\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-3}{4}\right) = \begin{cases} 5, & 1 < t < 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow E = \int_1^5 5^2 \cdot dt = 75 \text{ ή } 100 \quad (1 \le t < 5)$$