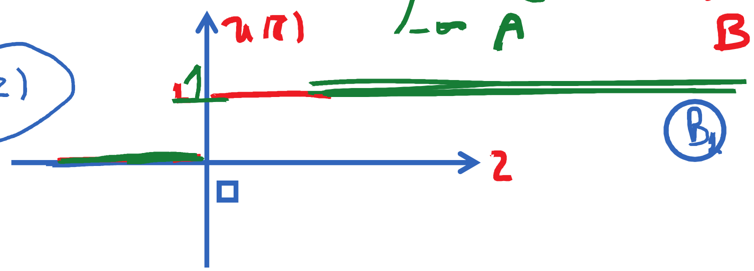
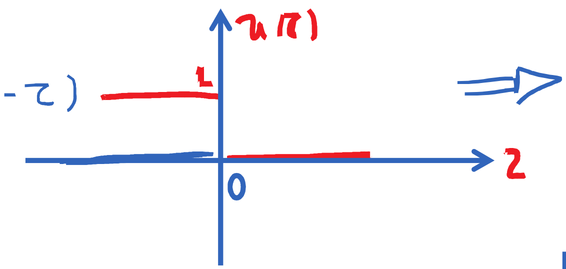
$$\underbrace{y(t)}_{\text{output}} = \underbrace{x(t)}_{\text{input}} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

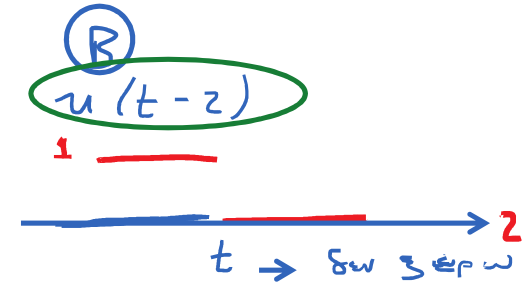
Παραδείγματα συνέλιξης

① $y(t) = u(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underset{A}{u(\tau)}\ \underset{B}{u(t-\tau)}\, d\tau$





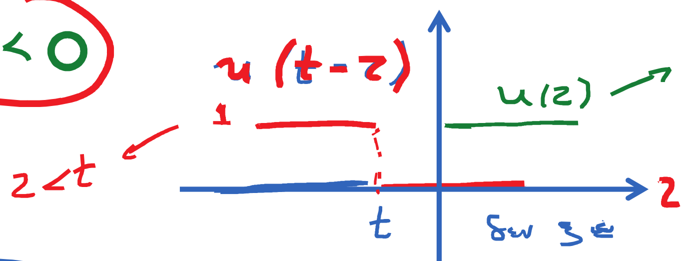
$\Rightarrow$



$\boxed{\begin{array}{l} * \ u(t-\tau)=1 \\ \text{μόνο για } t-\tau>0 \\ \text{ή } \tau<t \end{array}}$

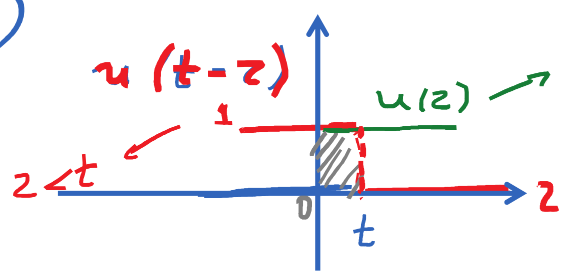
Τώρα θα υπολογίσουμε το $y(t)$ σε διαφορετικές χρονικές στιγμές:

$t<0$



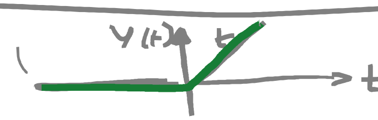
$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = 0 \Rightarrow y(t) = 0 \text{ για } t<0$$

$t>0$

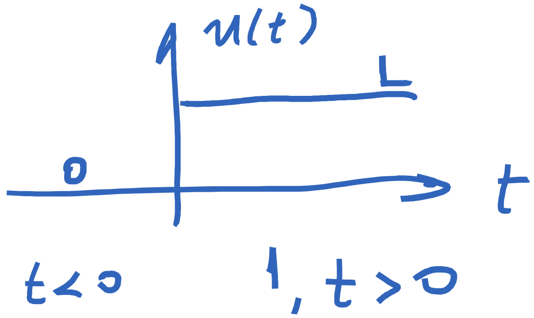


$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t 1 \cdot 1\, d\tau = \int_0^t d\tau = \tau \Big|_0^t = t-0 = t$$

$$y(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$



$$y(t) = t\, u(t) = u(t) * u(t)$$

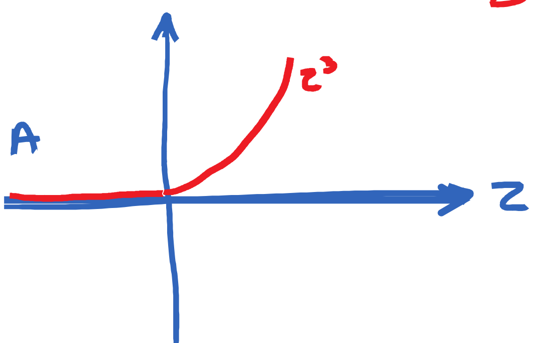


$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

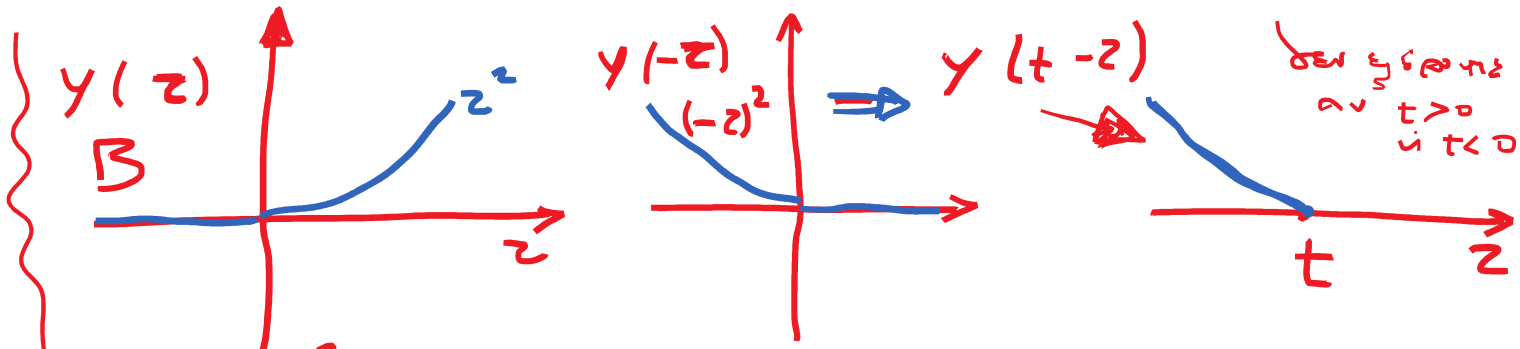
$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t-\tau \geq 0 \iff \tau \leq t \\ 0, & \tau > t \end{cases}$$

$x(t) = t^3 \cdot u(t)$ και $y(t) = t^2 \cdot u(t)$ } Να υπολογιστεί το $\underline{z(t) = x(t) * y(t)}$

$\Rightarrow z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\quad A \quad}\ \underline{\quad B \quad}$

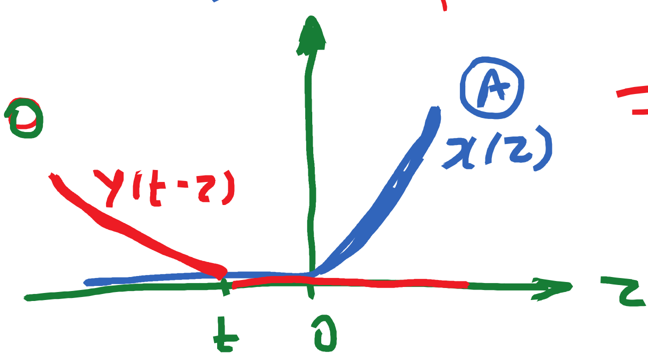


$x(z) = z^3 \cdot u(z)$



$y(z) = z^2 \cdot u(z)$

$t \leq 0$



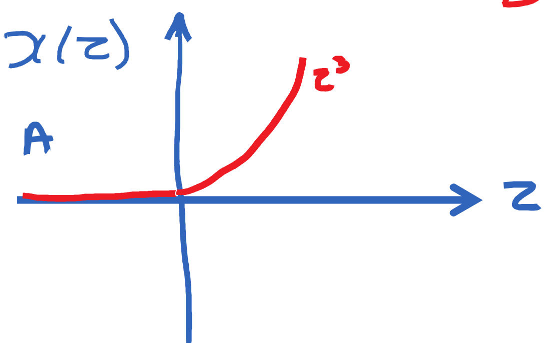
$\Rightarrow z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{0}{x(z)} \cdot \overset{0}{y(t-z)}\, dz = 0$

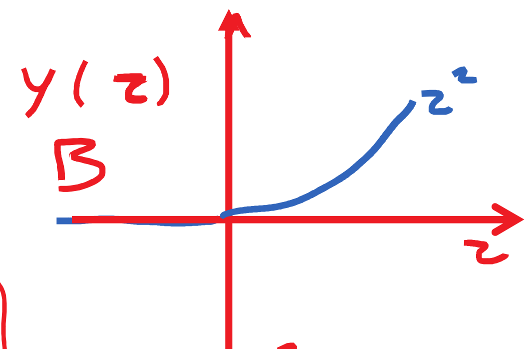
$t<0$

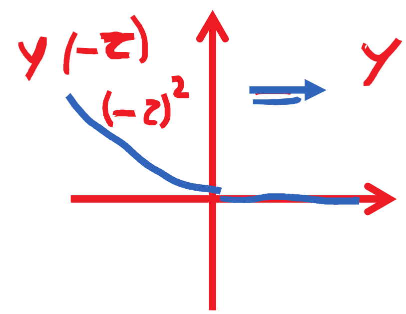
$\Rightarrow \boxed{z(t) = 0 \text{ για } t<0}$

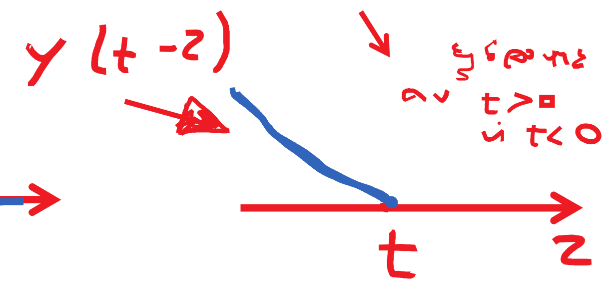
$x(t) = t^3 \cdot u(t)$ και $y(t) = t^2 \cdot u(t)$ } Να υπολογισθεί το $\underline{z(t) = x(t) * y(t)}$

$$\Rightarrow z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x(z)}_{A} \cdot \underbrace{y(t-z)}_{B} \, dz$$





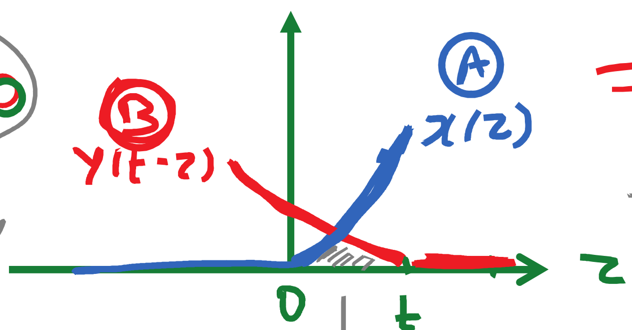




$x(z) = z^3 \cdot u(z)$

$y(z) = z^2 \cdot u(z) \Rightarrow y(t-z) = (t-z)^2 \cdot u(t-z)$

$t > 0$



$$\Rightarrow z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(z) \cdot y(t-z) \, dz =$$

$$\Rightarrow z(t) = \int_0^t z^3 \underset{1}{\underset{\parallel}{u(z)}} \cdot (t-z)^2 \, \underset{1}{\underset{\parallel}{u(t-z)}} \, dz \Rightarrow$$

$z > 0 \Rightarrow u(z) = 1$

$z < t \Rightarrow t - z > 0$

$\Rightarrow u(t-z) = 1$

$$\Rightarrow z(t) = \int_0^t z^3 (t^2 - 2t \cdot z + z^2) \, dz \Rightarrow$$

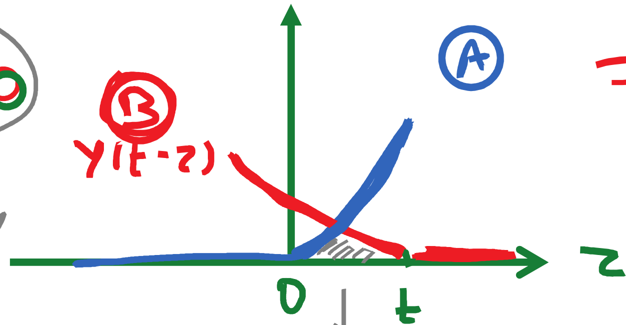
$$\Rightarrow z(t) = \int_0^t (z^3 t^2 - 2 z^4 t + z^5) \, dz$$

Συνέχεια στην επόμενη διαφάνεια

$x(z) = z^3 \cdot u(z)$

$y(z) =$

$t > 0$



$$\Rightarrow z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \quad y(t-z$$

$$\Rightarrow z(t) = \int_0^t \underbrace{z^3 u(z)}_{\overset{\shortparallel}{1}} \cdot (t-z)^2 \underbrace{u(t-z)}_{\overset{\shortparallel}{1}} dz \Rightarrow$$

$z > 0 \Rightarrow u(z) = 1$

$z < t \Rightarrow t - z > 0$

$\Rightarrow u(t-z) = 1$

$$\Rightarrow z(t) = \int_0^t z^3 (t^2 - 2t\cdot$$

$$\Rightarrow z(t) = \int_0^t z^3 t$$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{z^4 \cdot t^2}{4} - \frac{2z^5 t}{5} + \frac{z^6}{6}\Big|_0^t = \frac{t^6}{4} - \frac{2t^6}{5} + \frac{t^6}{6} - \frac{30t^6 - 48t^6 + 20t^6}{120}$$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{2t^6}{120} = \frac{1}{60} t^6 .$$

Συνολικά $z(t) = \begin{cases} \frac{1}{60} t^6, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow z(t) = \frac{1}{60} t^6 \cdot u(t)$$

Έχει το σύστημα: $y(t) = x^2(t)$ την ιδιότητα της κλιμάκωσης (scaling property)?

Η ιδιότητα της κλιμάκωσης: αν $x(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow y(t)$

τότε $c \cdot x(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow c \cdot y(t)^{*}$, $\forall$ σταθερά c

Αν δώσουμε ως είσοδο το

$[c \cdot x(t)]$, τότε η έξοδος $[c \cdot x(t)]^2 = c^2 \cdot \underbrace{x^2(t)}_{y(t)} = c^2 \cdot y(t)$

Άρα αφού $c \cdot y(t)^{*} \neq c^2 \cdot y(t)$ για $c \neq 0$ $\Rightarrow$ δεν έχει την ιδιότητα της κλιμάκωσης.

Ποιά από τα παρακάτω συστήματα είναι γραμμικά;

Ⓐ $y_1(t) = |\sin(3t)| \cdot x(t)$

① Έστω η είσοδος $[c \cdot x(t)]$, τότε η έξοδος είναι $|\sin(3t)| \cdot c \cdot x(t) = c \cdot \overbrace{|\sin(3t)|\, x(t)}^{y_1(t)}$

σταθερά

$= c \cdot y_1(t)$

⇒ Ισχύει η ιδιότητα της κλιμάκωσης

② $x_1(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow y_1(t) = |\sin(3t)| \cdot x_1(t)$

$x_2(t) \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow y_2(t) = |\sin(3t)| \cdot x_2(t)$

$[x_1(t) + x_2(t)] \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow |\sin(3t)| \cdot [x_1(t) + x_2(t)]$

Η έξοδος στο $[x_1(t) + x_2(t)]$ είναι $|\sin(3t)| \cdot [x_1(t) + x_2(t)] = \overbrace{|\sin(3t)|\, x_1(t)}^{y_1(t)} + \underbrace{|\sin(3t)|\, x_2(t)}_{y_2(t)}$

⇒ Το σύστημα είναι γραμμικό!

(B) $y_2(t) = a \dfrac{dx}{dt}$

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{} \longrightarrow y(t) = a \cdot \frac{dx}{dt}$$

(1) Κλιμάκωση: $[c \cdot x(t)]$ (input) τότε παίρνω στην έξοδο $a \cdot \dfrac{d(c \cdot x(t))}{dt} = c \cdot a \dfrac{dx(t)}{dt} = c\, y(t)$

OK!

(2) $[x_1(t) + x_2(t)]$ (input) τότε παίρνω $a \dfrac{d[x_1(t) + x_2(t)]}{dt} = \underbrace{a \dfrac{dx_1(t)}{dt}}_{y_1(t)} + \underbrace{a \dfrac{dx_2(t)}{dt}}_{y_2(t)}$

$$S(x_1 + x_2) \longrightarrow y_1(t) + y_2(t)$$

⇒ Το σύστημα είναι γραμμικό!

Γ) $y(t) = |x(t)|$

1) Ομοιογένεια;

$$(-1)\cdot x(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow (-1)\cdot y(t)$$

ισχύει;

Δεν ισχύει γιατί αν δώσουμε είσοδο $-x(t)$ τότε η έξοδος είναι

$$|-x(t)| = |x(t)| \neq (-1)\cdot y(t) \Rightarrow$$ Δεν είναι γραμμικό

Δ) $y(t) = \sin[x(t)]$

Ομοιογένεια;

$$2\cdot x(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow 2\cdot y(t)$$

ισχύει;

Για είσοδο $2x(t) \rightarrow \sin[2(x(t))] \neq 2\cdot \sin[x(t)]$ άρα δεν είναι γραμμικό σύστημα

Είναι τα παρακάτω συστήματα χρονικά αμετάβλητα (ΧΑ) $\rightarrow$ $x(t) \rightarrow \boxed{\ } \rightarrow y(t)$

$x(t-T) \rightarrow \boxed{\ } \rightarrow y(t-T)$

(A) $$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + \sin(x(t-1)) \quad (1)$$

Θα πρέπει να εξετάσουμε την έξοδο για είσοδο $x(t-T)$ {Στην (1) θέτω $t \rightarrow t-T$}

$$\frac{d(x(t-T))}{dt} + \sin(x(t-T-1)) =$$

$$= y(t-T) \;; \text{ Ισχύει} \Rightarrow \text{Σύστημα είναι ΧΑ}$$

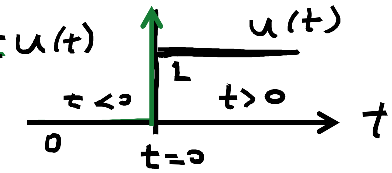
(B) $$\frac{dy(t)}{dt} = 2\sin[x(t-1)] + 3\cos[x(t-1)]$$

$x(t-T)$ αντί για $x(t)$ $\xrightarrow{t \rightarrow t-T}$ $2\sin[x(t-T-1)] + 3\cos[x(t-T-1)] = \dfrac{dy(t-T)}{dt}$ ✓

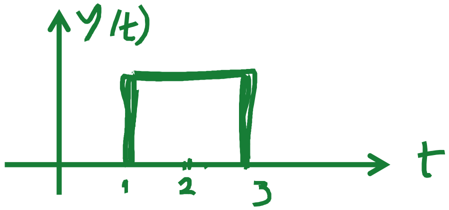
$\Rightarrow$ Σύστημα είναι ΧΑ

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα της συνέλιξης $z(t) = x(t) * y(t)$

$x(t) = u(t)$



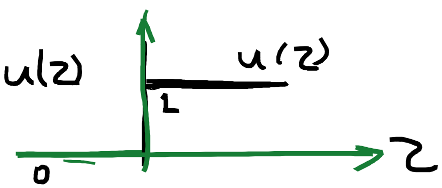
$y(t) =$



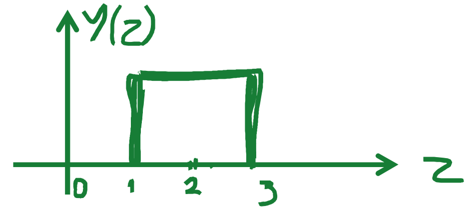
$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau)\, d\tau$$

$y(\tau)$ ① $\rightarrow$ $y(-\tau)$ ② $\rightarrow$ ③ $y(t-\tau)$

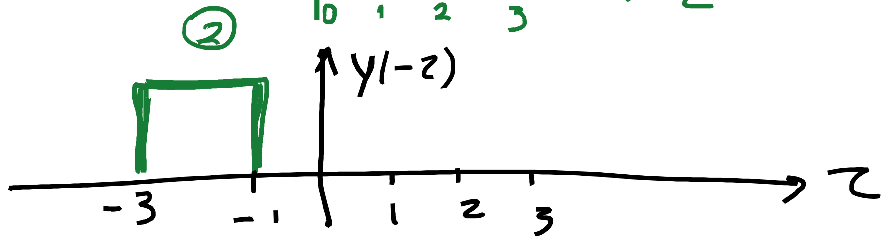
$x(\tau) = u(\tau)$



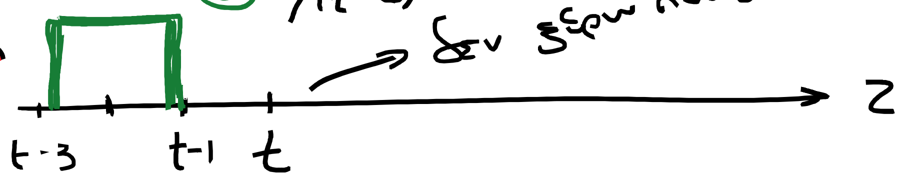
① $y(\tau) =$



② $y(-\tau)$

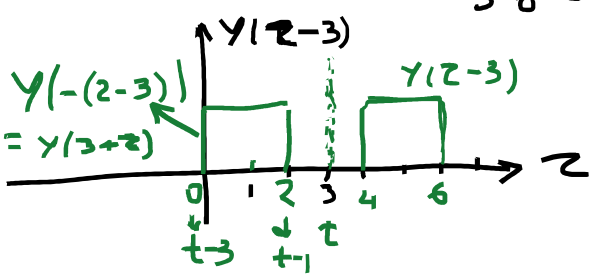


③ $y(t-\tau)$

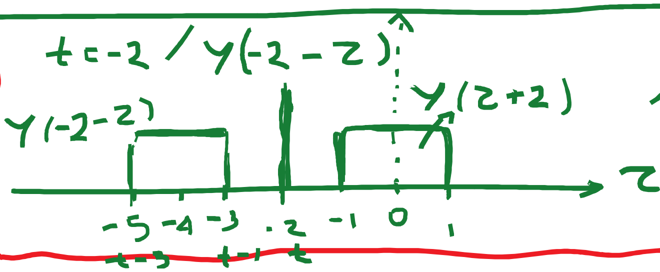


δεν ξέρω που είναι το t

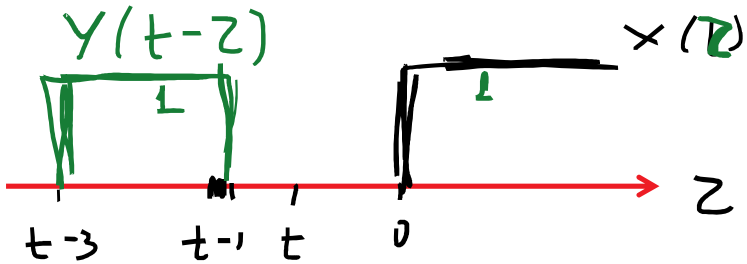
π.χ. $t=3$ / $y(3-\tau)$ Εξήγηση



$t=-2$ / $y(-2-\tau)$



① $t \le 0$



$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau = 0$$

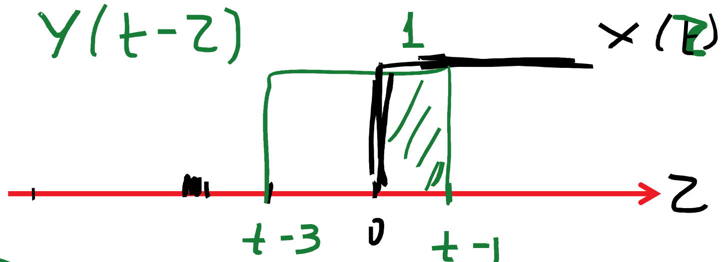
no overlap $\equiv$

② $t-1 > 0$ επικάλυψη

$t > 1$

$t-3 \le 0$

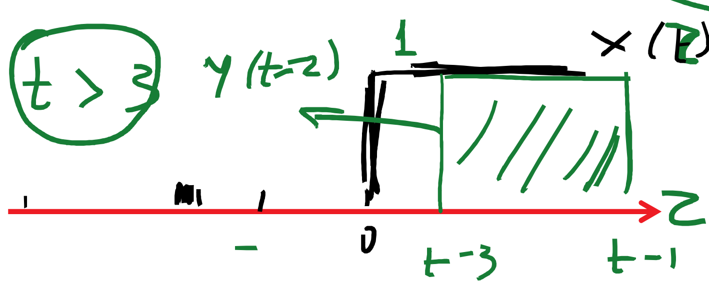
$1 < t \le 3$



$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{0}^{t-1} 1 \cdot d\tau = \tau \Big|_{0}^{t-1} = t-1$$

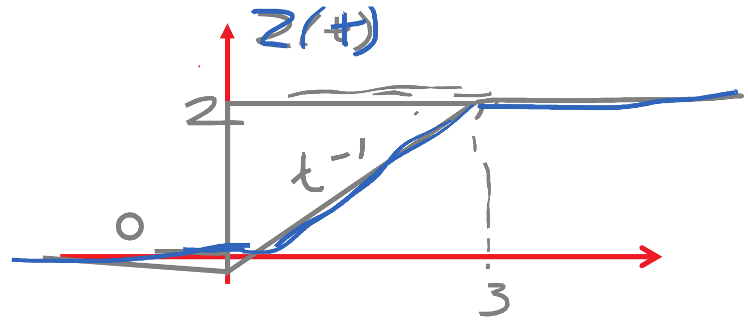
③ $t-3 > 0$ ή $t > 3$



$$z(t) = \int_{t-3}^{t-1} 1 \cdot 1\, d\tau = \tau \Big|_{t-3}^{t-1} \Rightarrow$$

$$z(t) = t-1-(t-3) = 2$$

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ t-1 & 1 < t \leq 3 \\ 2 & t > 3 \end{cases}$$



1) Να υπολογίσετε: $\underbrace{u(t)*\delta(t-3)}_{A} - \underbrace{u(t-4)*\delta(t+1)}_{B}$

Ιδιότητα $x(t)*\delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

A: $u(t)*\delta(t-3) = u(t-3)$

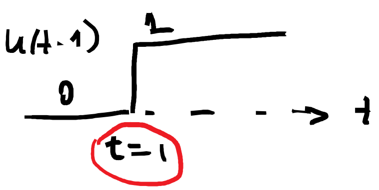
B: $u(t-4)*\delta(t+1)$. Θέτω $g(t) = u(t-4)$, τότε $g(t)*\delta(t+1) = g(t+1) = u(t+1-4)$ $g(t)=u(t-4)$

Άρα $u(t-4)*\delta(t+1) = u(t-3) \Rightarrow u(t)*\delta(t-3) - u(t-4)*\delta(t+1) = u(t-3) - u(t-3) = 0$

2) Η κρουστική απόκριση ενός συστήματος είναι $\underline{h(t) = u(t-1)/t^2}$. Είναι το σύστημα ΦΕΦΕ;

Για να είναι ένα σύστημα ΦΕΦΕ: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$

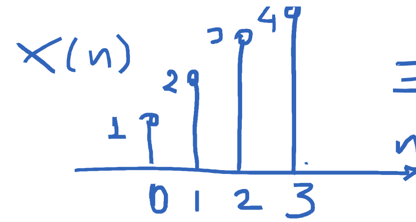
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{u(t-1)}{t^2}\right|dt = \int_{1}^{\infty}\left|\frac{1}{t^2}\right|dt = \int_{1}^{\infty}\frac{1}{t^2}\,dt = \left.\frac{-1}{t}\right|_{1}^{\infty} = -\cancel{\frac{1}{t}}^{\,0}_{t\to\infty} - \left(-\frac{1}{1}\right) = +1 < \infty$$



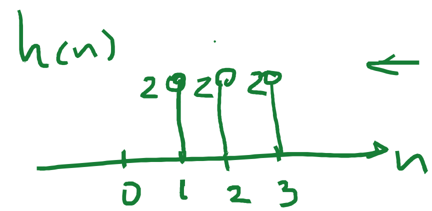
$\Rightarrow$ Σύστημα ΦΕΦΕ

Συνέλιξη διακριτού χρόνου (tabular method)

$y(n) = x(n) * h(n)$



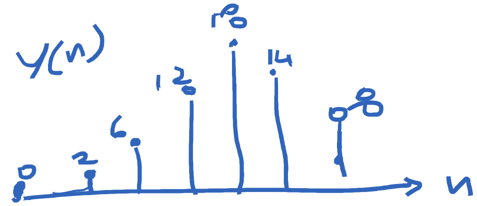
$\equiv x(n) = [\underline{1}\ 2\ 3\ 4]$



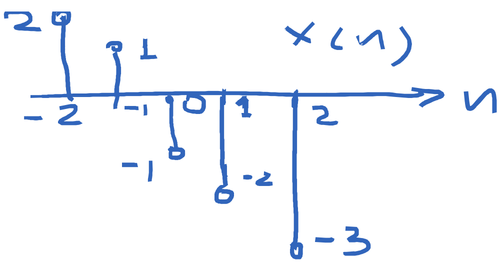
$\leftarrow h(n) = [\underline{0}\ 2\ 2\ 2]$

	1	2	3	4
0	0	0	0	0
2	2	4	6	8
2	2	4	6	8
2	2	4	6	8

$y(n) = [\underline{0}\ 2\ 6\ 12\ 18\ 14\ 8]$



Σήμα εισόδου $x(n) = [2, 1, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{-1}, -2, -3]$



Κρ. απόκριση $h(n) = [1, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{2}, 0, -3]$

	2	1	-1	-2	-3
1	2	1	-1	-2	-3
2	4	2	-2*	-4	-6
0	0	0	0	0	0
-3	-6	-3	3	6	9

+

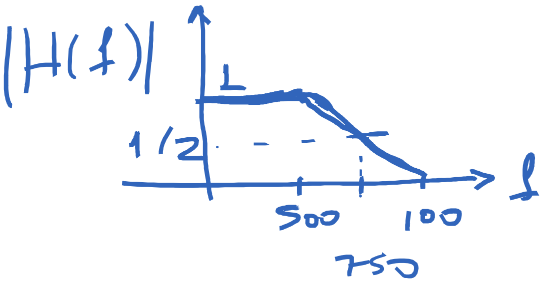
$y(n) = x(n) * h(n) \Rightarrow$

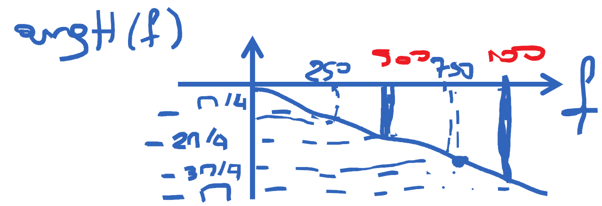
$y(n) = [\underset{n=-3}{2}, \overset{n=-2}{5}, \underset{n=-1}{1}, \underset{\substack{\uparrow \\ n=0}}{-10}, \underset{n=1}{-10}, \underset{n=2}{-3}, \underset{n=3}{6}, \underset{n=4}{9}]$

Το 2 τοποθετείται στο χρόνο ; (n = -3)

Το n=0 για το y(n) είναι εκεί που υποδόσει τη συνέλιξη αρχικά να ξεκινάει από το (2,-1)* στον πίνακα που έγραψα

Απόκριση σε εκθετικά σήματα : $x(t) = a\cos(1500\pi t) = a\cos(2\pi \cdot 750 \cdot t)$





$f_0 = 750$ (1)

$$y(t) = |H(f)| \cdot A \cdot \cos\left(2\pi f t + \overset{0}{\varphi} + \arg(H(f))\right)$$

για $f = 750 \Rightarrow |H(750)| = \frac{1}{2}$, $\arg H(f=750)) = -3\pi/4$ $\rightarrow$

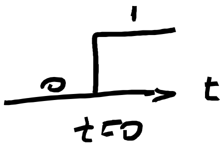
η απόκριση

$$\rightarrow y(t) = \frac{1}{2} a \cdot \cos\left(2\pi \cdot 750 \cdot t - 3\pi/4\right)$$

Να βρεθεί η απόκριση για $\omega = 1$ rad/s $\quad \xrightarrow{\cos(t)} \boxed{h(t)=e^{-t}u(t)} \rightarrow \; ?$

Από τις σημειώσεις: $H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}\, d\tau \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \Rightarrow$

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}u(t)\cdot e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t}\, 1\, e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-t(1+j\omega)}dt = \frac{1}{-(1+j\omega)}\cdot e^{-t(1+j\omega)}\Big|_{0}^{\infty}$$



$$\int e^{cx}dx = \frac{1}{c}\cdot e^{cx}$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{-(1+j\omega)}\cdot(0-\underbrace{e^{0}}_{1}) = \frac{1}{1+j\omega}$$

$\xrightarrow[\text{αντικατάσταση}]{\omega=1}$

πολλαπλασιάζω αριθμητή + παρονομαστή με $(1-j)$

$$H(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1-j}{1^2-j^2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}j$$

$(j^2=-1)$

$$\Rightarrow |H(1)| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \arg H(1) = \tan^{-1}\left(\frac{-1/2}{1/2}\right) = \tan^{-1}(-1) = -45$$

διότι $\tan(-45) = -\tan(45) = -1$

$\Rightarrow$ Η απόκριση για ($\omega=1$): $y(t) = |H(1)|\cos(\underbrace{\omega}_{1} t + \arg H(1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos(t-45°)$