

ΣΗΜΑΤΑ και ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
ΣΕΡΑΦΕΙΜ ΚΑΡΑΜΠΟΓΙΑΣ

▼ **ΑΣΚΗΣΗ 1.1**

Ποια από τα σήματα είναι περιοδικά;

1α) $x_1(t) = \cos^2(2\pi t)$

1β) $x_2(t) = e^{-2t} \cos(2\pi t)$

► *Απάντηση:*

▼ *Λύση:*

1α) Για να είναι περιοδικό το σήμα θα πρέπει να υπάρχει αριθμός T για τον οποίο να είναι $x_1(t + T) = x_1(t)$ για κάθε τιμή του χρόνου t . Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}x_1(t + T) &= \cos^2(2\pi(t + T)) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos(4\pi(t + T)))\end{aligned}$$

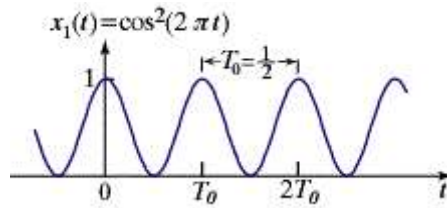
όπου χρησιμοποιήθηκε η γνωστή τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\theta)]$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\cos(4\pi(t + T)) &= \cos(4\pi t + 4\pi T) \\ &= \cos(4\pi t)\end{aligned}$$

για $4\pi T = 2k\pi \Rightarrow T = \frac{k}{2}$ επομένως

$$\begin{aligned}x_1(t + T) &= \frac{1}{2}(1 + \cos(4\pi(t + T))) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos(4\pi t)) \\ &= \cos^2(2\pi t) \\ &= x_1(t)\end{aligned}$$

Έτσι το σήμα $x_1(t) = \cos^2(2\pi t)$ είναι περιοδικό με θεμελιώδη περίοδο $T = \frac{1}{2}$ sec Στο Σχήμα 1.1 έχει γίνει η γραφική παράσταση του σήματος $x_1(t) = \cos^2(2\pi t)$ σε συνάρτηση με το χρόνο στο οποίο φαίνεται ότι το σήμα είναι περιοδικό.

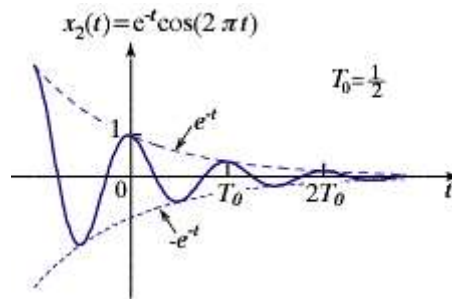


Σχήμα 1.1. Η γραφική παράσταση του σήματος $x_1(t) = \cos^2(2\pi t)$ στην άσκηση 1.1α.

1β) Για να είναι περιοδικό το σήμα $x_2(t)$ πρέπει $x_2(t + T) = x_2(t)$ για κάθε τιμή του χρόνου t . Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
 x_2(t + T) &= e^{-2(t+T)} \cos(2\pi(t + T)) \\
 &= e^{-2t} e^{-2T} \cos(2\pi t + 2\pi T) \\
 \text{για } T \text{ ακέραιο} &= e^{-2t} e^{-2T} \cos(2\pi t) \\
 &= x_2(t) e^{-2T}
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $x_2(t + T) = x_2(t)$ ισχύει μόνο για $T = 0$ επομένως το σήμα $x_2(t)$ είναι μη περιοδικό. Στο Σχήμα 1.2 έχει γίνει η γραφική παράσταση του σήματος $x_2(t) = e^{-t} \cos(2\pi t)$ σε συνάρτηση με το χρόνο στο οποίο φαίνεται ότι το σήμα είναι περιοδικό.



Σχήμα 1.1. Η γραφική παράσταση του σήματος $x_2(t) = e^{-t} \cos(2\pi t)$ στην άσκηση 1.1β.