Μιγαδικοί αριθμοί

Ορισμός

- Φανταστική Μονάδα i: $i^2 = -1$
- Φανταστικός Αριθμός: Κάθε αριθμός της μορφής $\alpha i, \alpha \in \mathbb{R}$
- Μιγαδικός Αριθμός: Κάθε αριθμός της μορφής $\mathrm{z} = \alpha + \beta i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
  - Πραγματικό μέρος :$\mathrm{Re(z)} = \alpha$
  - Φανταστικό μέρος: $\mathrm{Im(z)} = \beta$
- Παράδειγμα: Έστω ο αριθμός $\mathrm{z} = 3 + 2i$.
- Τότε $\mathrm{Re(z)} = 3, \mathrm{Im(z)} = 2$
- Οι μιγαδικοί αριθμοί έχουν το δικό τους σύνολο $\mathbb{C}$.

Ισότητα

- Έστω 2 αριθμοί $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i,\ z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$
- Τότε λέμε ότι είναι ίσοι αν ισχύει $a_1 = a_2\ και\ \beta_1 = \beta_2$
- Παράδειγμα: Έστω $z = \mathrm{\alpha} + \mathrm{\beta} i$ και $w = 2 - 3i$.
- Τότε ισχύει $z = w \Leftrightarrow \mathrm{\alpha} = 2, \mathrm{\beta} = -3$.

Πρόσθεση

- Έστω 2 αριθμοί $\mathrm{z}_1 = \alpha_1 + \beta_1 i,\ \mathrm{z}_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$
- Τότε ορίζεται ως άθροισμά ο μιγαδικός αριθμός $\mathrm{z} = \alpha + \beta i$, όπου
  - $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$
  - $\beta = \beta_1 + \beta_2$
- Παράδειγμα: $\mathrm{z}_1 = 1 + 3i,\ \mathrm{z}_2 = 2 - 5i$.
- Τότε $\mathrm{z} = z_1 + \mathrm{z}_2 = (1+2) + \big(3 + (-5)\big)i = 3 - 2i$.

Ιδιότητες Πρόσθεσης

- Αντιμεταθετική: $\mathrm{z}_1 + \mathrm{z}_2 = \mathrm{z}_2 + z_1\ \forall \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2 \in \mathbb{C}$.
- Προσεταιριστική: $\mathrm{z}_1 + (\mathrm{z}_2 + \mathrm{z}_3) = (\mathrm{z}_1 + \mathrm{z}_2) + \mathrm{z}_3, \forall \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \mathrm{z}_3 \in \mathbb{C}$.
- Νόμος διαγραφής: $\mathrm{z}_1 + \mathrm{z} = \mathrm{z}_2 + \mathrm{z} \Rightarrow \mathrm{z}_1 = \mathrm{z}_2, \forall \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \mathrm{z} \in \mathbb{C}$.
- Ουδέτερο στοιχείο $0 + 0i$: $\mathrm{z} + (0 + 0i) = \mathrm{z}, \forall \mathrm{z} \in \mathbb{C}$.
- Αντίθετος: $\forall \mathrm{z} \in \mathbb{C}, \exists!\, z^*: z + z^* = 0 + 0i$

Πολλαπλασιασμός

- Έστω 2 αριθμοί $\mathrm{z}_1 = \alpha + \beta i,\ \mathrm{z}_2 = \gamma + \delta i$
- Τότε ορίζεται ως γινόμενο ο μιγαδικός αριθμός $\mathrm{z} = \mathrm{z}_1 \mathrm{z}_2 = (\alpha\gamma - \delta\beta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i.$
- Παράδειγμα: $\mathrm{z}_1 = 2 - 3i,\ \mathrm{z}_2 = 4 + i.$
- Τότε $\mathrm{z} = z_1 + \mathrm{z}_2 = (2 \cdot 4 - (-3) \cdot 1) + (2 \cdot 1 + (-3) \cdot 4)i = 11 - 10i.$

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού

- Αντιμεταθετική: $\mathrm{z}_1 \cdot \mathrm{z}_2 = \mathrm{z}_2 \cdot z_1 \; \forall \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2 \in \mathbb{C}$.
- Προσεταιριστική: $\mathrm{z}_1 \cdot (\mathrm{z}_2 \cdot \mathrm{z}_3) = (\mathrm{z}_1 \cdot \mathrm{z}_2) \cdot \mathrm{z}_3, \forall \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \mathrm{z}_3 \in \mathbb{C}$.
- Επιμεριστική: $\mathrm{z}_1 \cdot (\mathrm{z}_2 + \mathrm{z}_3) = \mathrm{z}_1 \cdot \mathrm{z}_2 + \mathrm{z}_1 \cdot \mathrm{z}_3, \forall \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \mathrm{z}_3 \in \mathbb{C}$.
- Νόμος διαγραφής: $\mathrm{z}_1 + \mathrm{z} = \mathrm{z}_2 + \mathrm{z} \Rightarrow \mathrm{z}_1 = \mathrm{z}_2, \forall \mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2, \mathrm{z} \in \mathbb{C}$.
- Ουδέτερο στοιχείο $\mathrm{z}^* = 1 + 0i$: $\mathrm{z} \cdot \mathrm{z}^* = \mathrm{z}, \forall \mathrm{z} \in \mathbb{C}$.
- Για κάθε $\mathrm{z} \in \mathbb{C}$, υπάρχει μοναδικός αριθμός z^*: $\mathrm{z} \cdot \mathrm{z}^* = 1$, ο οποίος ονομάζεται αντίστροφος ή συμμετρικός του z.

Δύναμη μιγαδικών αριθμών

- Έστω $\mathrm{z} \in \mathbb{C}$. Τότε ισχύει
  - $\mathrm{z}^1 = \mathrm{z}$
  - $\mathrm{z}^\nu = \mathrm{z}^{\nu-1} \cdot \mathrm{z}$
  - Αν $\mathrm{z} \neq 0$, τότε $\mathrm{z}^{-\nu} = \frac{1}{\mathrm{z}^\nu}$ και $\mathrm{z}^0 = 1$
- Επίσης, ισχύει: $i^{4\kappa} = 1, i^{4\kappa+1} = i, i^{4\kappa+2} = -1\ \kappa\alpha\iota\ i^{4\kappa+3} = -i, \forall\kappa \in \mathbb{Z}$
- Παράδειγμα: Έστω $\mathrm{z} = 2 + 3i$. Τότε $\mathrm{z}^2 = (2 + 3i) \cdot (2 + 3i) =$

  $= (2 + 3i) \cdot 2 + (2 + 3i) \cdot 3i = 4 + 6i + 6i + (3i)^2 =$

  $= 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i + 9 \cdot (-1) = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$

Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί

- Έστω αριθμός $\mathrm{z} = \alpha + \beta i$. Τότε ο μιγαδικός αριθμός $\alpha - \beta i$ ονομάζεται **συζυγής** του z και συμβολίζεται με $\overline{\mathrm{z}}$.
- Ισχύει $\mathrm{z} \cdot \overline{\mathrm{z}} = (\alpha + \beta i) \cdot (\alpha - \beta i) = \alpha^2 - \alpha\beta i + \alpha\beta i - (\beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 \cdot (-1) = \alpha^2 + \beta^2$
- Επίσης, $\mathrm{z} + \overline{\mathrm{z}} = 2\alpha$

Σημείωση

- Μια χρήση των συζυγών είναι ο υπολογισμός του αντιστρόφου και του πηλίκου των μιγαδικών αριθμών όταν απαιτείται να γράφεται στην μορφή $\alpha + \beta i$.
- Συγκεκριμένα, αν ο παρωνομαστής είναι ο $\alpha + \beta i$, πολλαπλασιάζο-νται τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρωνομαστής με τον $\alpha - \beta i$, ο οποίος είναι ο συζυγής του παραπάνω μιγαδικού.

Παράδειγμα

- Να γραφούν στην μορφή $\alpha + \beta i$, οι αριθμοί $z_1 = \frac{1}{3-i}, z_2 = \frac{1+2i}{3-i}$
- $z_1 = \frac{1}{3-i} = \frac{1\cdot(3+i)}{(3-i)\cdot(3+i)} = \frac{3+i}{3^2+1^2} = \frac{3+i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$
- $z_2 = \frac{1+2i}{3-i} = \frac{(1+2i)\cdot(3+i)}{(3-i)\cdot(3+i)} = \frac{(1+2i)\cdot 3+(1+2i)\cdot i}{3^2+1^2} = \frac{3+6i+i+12i^2}{3^2+1^2} =$

  $= \frac{3+7i+12\cdot(-1)}{10} = \frac{3+7i-12}{10} = \frac{-9+7i}{10} = -\frac{9}{10} + \frac{7}{10}i$

2η Σημείωση

- Έστω αριθμός $\mathrm{z} = x + yi$.
- Λόγω της ανάγκης σε αρκετές εφαρμογές να εκφραστούν τα x, y συναρτήσει του z, του οποίου ο συζυγής είναι ο $\overline{z} = x - yi$, προκύπτει ότι:

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

- Οι συντεταγμένες $(z, \overline{z})$ που αντιστοιχούν στις (x, y), ονομάζονται (μιγαδικές) συζυγείς συντεταγμένες.

Ιδιότητες

- $\overline{(-z)} = -\overline{z}$
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
- $\overline{(z)^\nu} = (\overline{z})^\nu, \nu = 1,2,\ldots$
- $\overline{(z^{-1})} = (\overline{z})^{-1}, z \neq 0$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right), z_2 \neq 0$
- $\overline{az} = a\overline{z}, a \in \mathbb{R}$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Μέτρο Μιγαδικών Αριθμών

- Έστω αριθμός $\mathrm{z} = \alpha + \beta i$. Τότε ως μέτρο του ορίζεται ο μη αρνητικός αριθμός $|\mathrm{z}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
- Ισχύει $|\mathrm{z}|^2 = \mathrm{z}\bar{\mathrm{z}}$

Ιδιότητες Μέτρου

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
- $|z^\nu| = |z|^\nu, \nu = 1,2, \ldots$
- $|z^{-1}| = |z|^{-1}, \forall z \neq 0$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \forall z_2 \neq 0$

Πρόβλημα 1ο

- Να προσδιοριστούν οι x, y όταν:
  1. $\mathrm{x} + \mathrm{y}i = |\mathrm{x} - \mathrm{y}i|$
  2. $\mathrm{x} + \mathrm{y}i = (\mathrm{x} - \mathrm{y}i)^2$
  3. $\mathrm{x} + 2\mathrm{y}i + 5\mathrm{y} = 7 + 5i$

Λύσεις

$$\mathrm{x} + \mathrm{y}i = |\mathrm{x} - \mathrm{y}i| \Rightarrow (\mathrm{x} + \mathrm{y}i)^2 = |\mathrm{x} - \mathrm{y}i|^2 \Rightarrow$$
$$x^2 + 2xyi + (yi)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow$$
$$x^2 + 2xyi - y^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow$$
$$-2y^2 + 2xyi = 0 \Rightarrow 2y(-y + xi) = 0 \Rightarrow$$
$$y = 0 \ \grave{\eta} \ -y + xi = 0 \Rightarrow y = 0, x \in \mathbb{R} \ \acute{\eta} \ y = x = 0$$

Λύσεις (2)

$\mathrm{x} + yi = (\mathrm{x} - yi)^2 \Rightarrow x + yi = x^2 - 2xyi + (yi)^2$
$\Rightarrow x + yi = x^2 - 2xyi - y^2 \Rightarrow x - x^2 + y^2 + yi + 2xyi = 0 \Rightarrow$
$(x - x^2 + y^2) + (y + 2xy)i = 0 \Rightarrow (x - x^2 + y^2) + y(1 + 2x)i = 0$
$\Rightarrow x - x^2 + y^2 = 0 \;\; \kappa\alpha\iota \; y(1 + 2x) = 0 \Rightarrow x - x^2 + y^2$
$= 0 \; \kappa\alpha\iota \; (y = 0 \; \acute{\eta} \; 1 + 2x = 0)$

$\Gamma\iota\alpha \; y = 0 \Rightarrow x - x^2 + 0^2 = 0 \Rightarrow x(1 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \; \acute{\eta} \; x = 1$

$\Gamma\iota\alpha \; 1 + 2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x - x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = x^2 - x \Rightarrow y =$
$\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \pm\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Άρα οι αποδεκτές λύσεις είναι $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (0{,}0), (1{,}0), \left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Λύσεις

$$\mathrm{x} + 2\mathrm{y}i + 5\mathrm{y} = 7 + 5i \Rightarrow (x + 5y) + 2yi = 7 + 5i$$
$$\Rightarrow x + 5y = 7 \; \kappa\alpha\iota \; 2y = 5 \Rightarrow x = 7 - 5y \; \kappa\alpha\iota \; y = \frac{5}{2} = 2.5$$
$$\Rightarrow x = 7 - 5 \cdot 2.5 \; \kappa\alpha\iota \; y = 2.5 \Rightarrow x = -5.5, y = 2.5$$

Μορφές Μιγαδικών Αριθμών

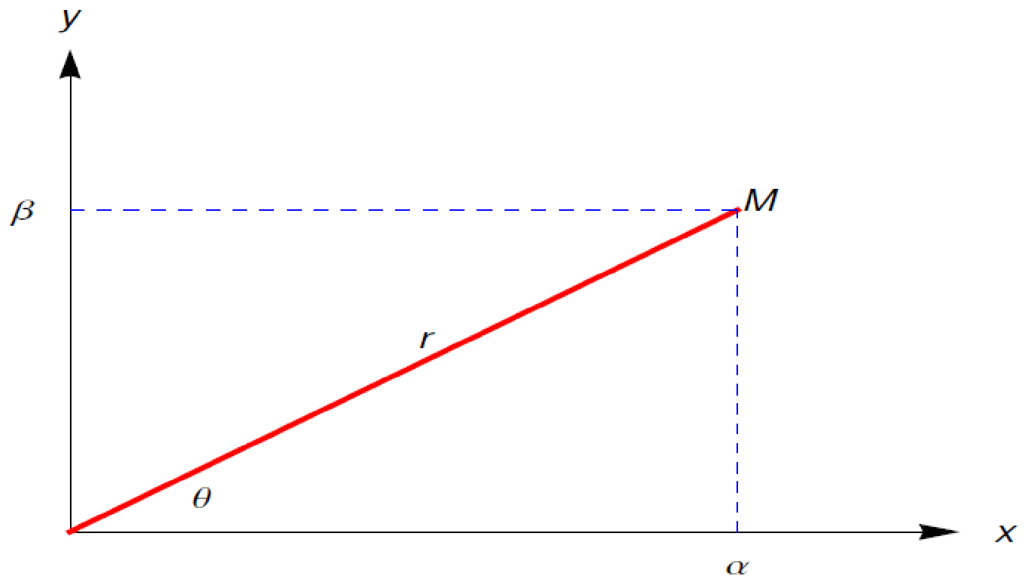
- Οι μιγαδικοί αριθμοί αναπαρίστανται σε 3 διαφορετικές μορφές:
  - Τριγωνομετρική Μορφή
  - Πολική Μορφή
  - Εκθετική Μορφή

Τριγωνομετρική Μορφή

- Έστω αριθμός $\mathrm{z} = \alpha + \beta i$ (1) και ένα διάνυσμα με αρχή την αρχή των αξόνων και συντεταγμένες (α, β).
- Τότε, ισχύει ότι το μέτρο του θα είναι $\mathrm{r} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |z|$.
- Επίσης, ισχύει $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{|z|}$,

  $\sin\theta = \frac{\beta}{r} = \frac{\beta}{|z|}$.
- Άρα λύνοντας ως α,β

  $\mathrm{z} = |\mathrm{z}|(\cos\theta + i \cdot \sin\theta) =$



Σημειώσεις

- Κάθε μιγαδικός αριθμός προσδιορίζεται, όχι μόνο από το ζεύγος (z, θ), αλλά και από το $(z, \theta + 2\kappa\pi), \kappa \in \mathbb{Z}$.
- Υπενθυμίζεται ότι:
  - $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = \begin{cases} a + 2\kappa\pi \\ \pi - a + 2\kappa\pi \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$
  - $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = \begin{cases} a + 2\kappa\pi \\ -a + 2\kappa\pi \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$

Παράδειγμα

- Έστω αριθμός $\mathrm{z} = -1 + i$. Άρα α=-1 και β=1
- Τότε $|\mathrm{z}| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
- Άρα :
  - $\cos\theta = \frac{\alpha}{|\mathrm{z}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \theta = \begin{cases} \frac{3\pi}{4} + 2\kappa\pi \\ -\frac{3\pi}{4} + 2\kappa\pi \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$
  - $\sin\theta = \frac{1}{|\mathrm{z}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2\kappa\pi \\ \pi - \frac{\pi}{4} + 2\kappa\pi \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2\kappa\pi \\ \frac{3\pi}{4} + 2\kappa\pi \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$
- Οι κοινές λύσεις είναι της μορφής $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$.
- Άρα $\mathrm{z} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

Θεωρήμα

- Έστω 2 αριθμοί $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1), z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i \cdot$

Θεώρημα de Moivre

- Αν $\mathrm{z_k} = |\mathrm{z}_k|(\cos\theta_k + i \cdot \sin\theta_k), k = 1,2,\ldots,\nu$, τότε ισχύει:

$$\mathrm{z}_1 \cdot \mathrm{z}_2 \cdot \ldots \cdot \mathrm{z}_\nu = |\mathrm{z}_1| \cdot |\mathrm{z}_2| \cdot \ldots \cdot |\mathrm{z}_\nu| \left(\cos\left(\sum_{i=1}^{\nu} \theta_i\right) + i \cdot \sin\left(\sum_{i=1}^{\nu} \theta_i\right)\right)$$

- Πόρισμα: Αν $\mathrm{z} = |\mathrm{z}|(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$, τότε ισχύει $\mathrm{z}^{\nu} = |\mathrm{z}|^{\nu}\big(\cos(\nu\theta) + i \cdot \sin(\nu\theta)\big)$

Θεώρημα

- Αν $\mathrm{z} = |\mathrm{z}|(\cos\theta + i \cdot \sin\theta), z \neq 0$, τότε $\mathrm{z}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{z}|}\big(\cos(-\theta) + i \cdot$

Παράδειγμα για σπίτι

- Έστω 2 αριθμοί $z_1 = \sqrt{2}(-1+i), z_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(-\sqrt{3}-i\right)$.
- Να υπολογιστούν τα $z_1 z_2, z_1^4, \frac{1}{z_2^2}$

Πολική μορφή

- Έστω αριθμός $\mathrm{z} = \alpha + \beta i$ που γράφεται στην τριγωνομετρική μορφή $\mathrm{z} = |\mathrm{z}|(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$.
- Τότε, η πολική μορφή του ορίζεται από την σχέση
$$\mathrm{z} = |\mathrm{z}|^{\llcorner\theta}$$
όπου θ η γωνία σε μοίρες.

Εκθετική μορφή

- Έστω αριθμός $z = x + yi$. Τότε η δύναμη e^{z} ορίζεται ως ο μιγαδικός αριθμός:
$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{x+yi} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}(\cos y + i \cdot \sin y)$$
όπου y η γωνία σε rad.
- Για $x = 0$, προκύπτει η ταυτότητα του Euler:
$$\mathrm{e}^{\theta i} = \cos\theta + i \cdot \sin\theta$$
- Άρα η εκθετική μορφή του z είναι $z = |z|\mathrm{e}^{\theta i}$

Ιδιότητες της εκθετικής μορφής

- $\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}$
- $\mathrm{e}^{z} \neq 0$
- $|\mathrm{e}^{ix}| = 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{e}^{z} = 1 \Leftrightarrow z = 2\kappa\pi i, \kappa \in \mathbb{Z}$
- $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2} \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2\kappa\pi i, \kappa \in \mathbb{Z}$