κρουστική απόκριση - Συστ. Διακ. Χρόνου

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k] = x[n]*h[n]$$

$$\begin{array}{c} x[n] \\ \delta[n] \end{array} \longrightarrow \boxed{\text{ΓΧΑ (LTID)}} \longrightarrow \begin{array}{c} y[n] \\ h[n] \end{array} \quad (*)$$

Παράδειγμα: $y[k]=x[k-1]+2\cdot x[k-3]$

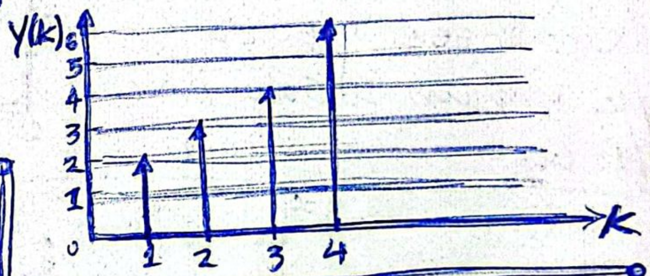
(α) Να βρεθεί η κρουστική απόκριση

(β) Να βρεθεί η απόκριση του ΣΔΧ για είσοδο $x[k]=2\delta[k]+3\delta[k-1]$

$\xrightarrow{(*)}$ $h[k]=\delta[k-1]+2\cdot\delta[k-3]$ (α)

(β)
$$\begin{array}{c} 2\delta(k) \\ 3\delta(k-1) \end{array} \longrightarrow \boxed{\text{ΓΧΑ}} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} 2h(k)=2\delta(k-1)+4\delta(k-3) \\ 3h(k-1)=3\delta(k-2)+6\delta(k-4) \end{array}\right\} +$$

$$x(k)=2\delta(k)+3\delta(k-1) \longrightarrow \boxed{\text{ΓΧΑ}} \longrightarrow y(k)=2\delta(k-1)+4\delta(k-3)+3\delta(k-2)+6\delta(k-4)$$



Παράδειγμα

Η κρουστική απόκριση (IR) ενός ΓΧΑ: $h(k)=0.5^k\cdot u(k)$. Ποιά είναι η έξοδος του συστήματος στην είσοδο: $x(k)=\delta(k-1)+3\delta(k-2)+2\delta(k-6)$;

$$\left.\begin{array}{lcl} \text{input} & & \text{output} \\ \delta(k-1) & \rightarrow & h(k-1) \\ 3\delta(k-2) & \rightarrow & 3h(k-2) \\ 2\delta(k-6) & \rightarrow & 2h(k-6) \end{array}\right\} +$$

$\Rightarrow y(k)=h(k-1)+3h(k-2)+2h(k-6) \Rightarrow$

$\Rightarrow y(k)=0.5^{k-1}\cdot u(k-1)+3\cdot 0.5^{k-2}u(k-2)+2\cdot 0.5^{k-3}\cdot u(k-3) \Rightarrow$

k	h(k)	y(k)
0	$0.5^0\cdot u(0)=1$	$0.5^{-1}\cdot \cancel{u(-1)}+3\cdot 0.5^{-2}\cdot\cancel{u(-2)}+2\cdot 0.5^{-3}\cancel{u(-3)}=0$
1	$0.5^1\cdot u(1)=0.5$	$0.5^0\cdot u(0)+3\cdot 0.5^{-1}\cancel{u(-1)}+2\cdot 0.5^{-2}\cdot\cancel{u(-2)}=1\cdot u(0)=1$
2	$0.5^2\cdot u(2)=0.5^2$	$0.5^1\cdot u(1)+3\cdot 0.5^0\cdot u(0)+2\cdot 0.5^{-1}\cancel{u(-1)}=0.5+3=3.5$
...	....	Για $\forall\ k<0 \rightarrow h(k)$ AND $y(k)=0$

Συνέλιξη στα Σ.Δ.Χ.

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot h(n-k) \quad (1)$$

Για να υπολογίσουμε τη συνέλιξη $x(k) * h(k)$:

Βήμα 1: Υπολογίζουμε την ακολουθία $h(-k)$

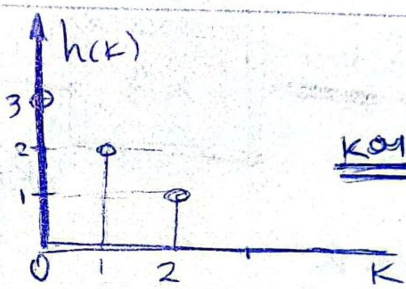
Βήμα 2: Μετατοπίζουμε την $h(-k)$ κατά n δείγματα
Αν $n \geq 0$ η $h(-k)$ μετατοπίζεται δεξιά (η $h(k)$ αριστ.)
Αν $n < 0$ η $h(-k)$ // αριστερά (η $h(k)$ δεξιά)

Βήμα 3: Βρίσκουμε το άθροισμα της συνέλιξης ως το άθροισμα των γινομένων των ακολουθιών $x(k)$ και $h(n-k)$ για να βρούμε το $y(n)$

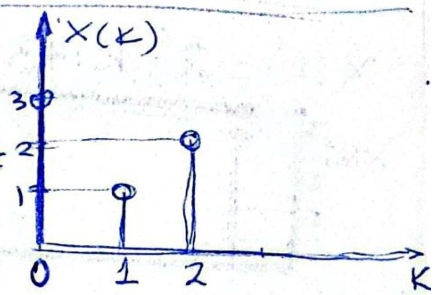
Βήμα 4: Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1-3 $\forall n$

Παράδειγμα:

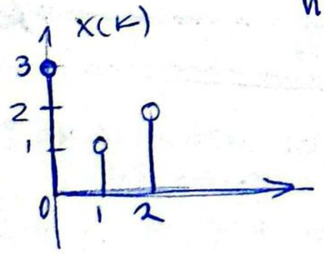
Να βρεθεί η συνέλιξη με γραφική μέθοδο και με βάση την εξίσωση



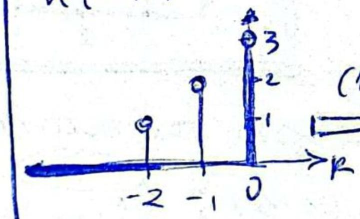
και



$n=0$



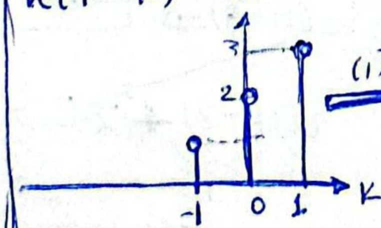
$h(-k)$



$$\xrightarrow{(1)} y(0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot h(-k) = x(0)\cdot h(0) = 3\cdot 3 = 9$$

$n=1$

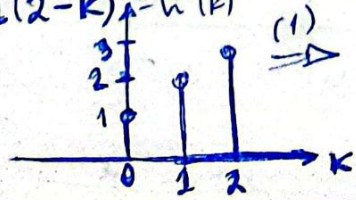
$h(1-k)=h'(k)$



$$\xrightarrow{(1)} y(1)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot h(1-k) = x(0)\cdot h'(0) + x(1)\cdot h'(1) = 3\cdot 2 + 1\cdot 3 = 9$$

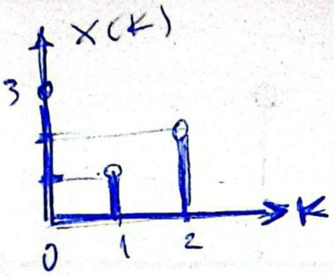
$n=2$

$h(2-k)=h''(k)$

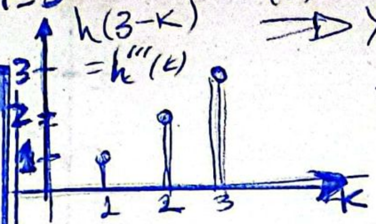


$$\xrightarrow{(1)} y(2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(2-k) = x(0)\cdot h''(0) + x(1)\cdot h''(1) + x(2)\cdot h''(2) = 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 = 11$$

(1)



n=3

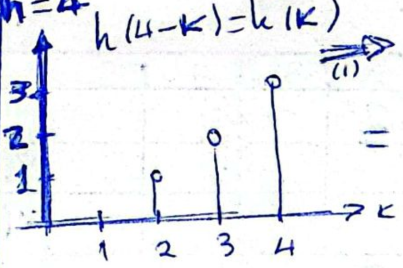


$\overset{(1)}{\Longrightarrow} y(3) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot h(3-k) =$

$= x(1)\cdot h'''(1) + x(2)\cdot h'''(2) =$

$= 1\cdot 1 + 2\cdot 2 = 5$

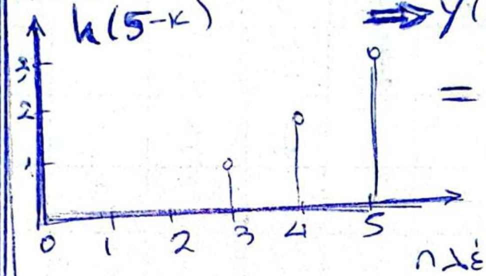
n=4



$\overset{(1)}{\Longrightarrow} y(4) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\cdot h(4-k) =$

$= x(2)\cdot h''''(2) = 2\cdot 1 = 2$

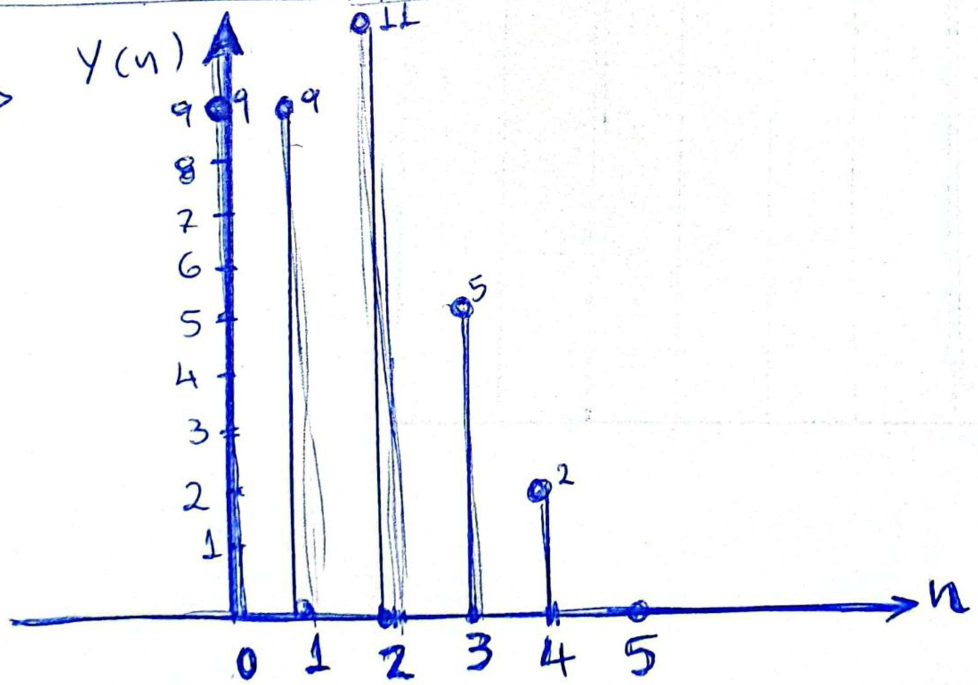
n=5



$\Longrightarrow y(5) = \sum x(k)\cdot h(5-k) =$

$= 0$ όπως και για κάθε $n \geq 5$ αφού τα $x(k)$, $h(n-k)$ δεν έχουν πλέον καμία επικάλυψη!

$\Longrightarrow$



Β' τρόπος: $\overset{(1)}{\Longrightarrow} y(n) = \dots + x(0)\cdot h(n-0) + x(1)\cdot h(n-1) + x(2)\cdot h(n-2) + \dots$

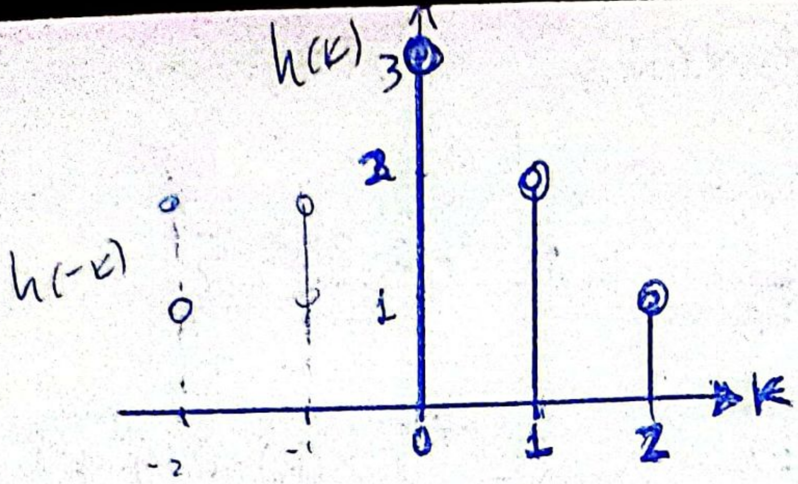
Τα $x(0), x(1), x(2)$ είναι τα μόνα μη μηδενικά!

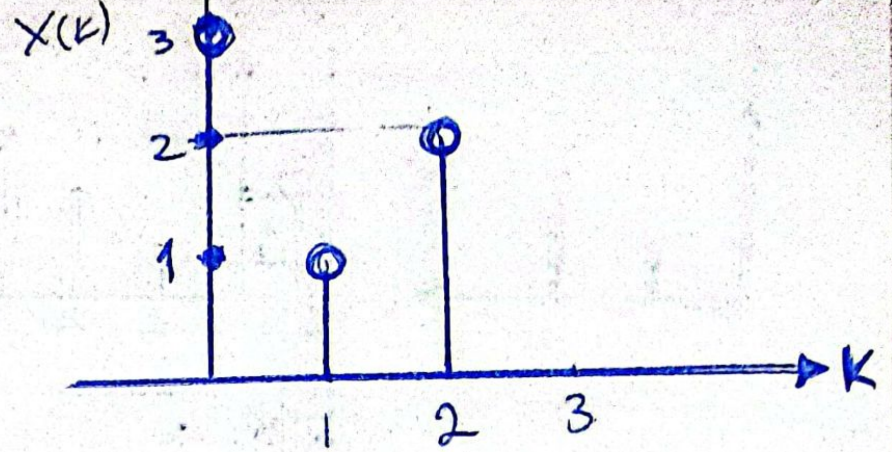
$\overset{n=0}{\Longrightarrow} y(0) = x(0)\cdot h(0) + x(1)\cdot h(-1) + x(2)\cdot h(-2) = 3\cdot 3 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 = 9$

$\overset{n=1}{\Longrightarrow} y(1) = x(0)\cdot h(1) + x(1)\cdot h(0) + x(2)\cdot h(-1) = 3\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 0 = 9$

$\overset{n=2}{\Longrightarrow} y(2) = x(0)\cdot h(2) + x(1)\cdot h(1) + x(2)\cdot h(0) = 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 2\cdot 3 = 11$

$\dots$





K	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
x(K)			3	1	2				
h(-K)	1	2	3						Y(0)=3·3=9
h(1-K)		1	2	3					Y(1)=3·2+3·1=9
h(2-K)			1	2	3				Y(2)=3·1+1·2+2·3=11
h(3-K)				1	2	3			Y(3)=1·1+2·2=5
h(4-K)					1	2	3		Y(4)=2·1=2
h(5-K)						1	2	3	Y(5)=0
h(6-K)							1	2	Y(6)=0
h(7-K)								1	Y(7)=0