Λύσεις Θεμάτων εξεταστικής στο μάθημα "Σήματα και Συστήματα" για το ακαδημαϊκό έτος 2022-2023

1ο Θέμα

Εστω το περιοδικό σήμα $x(t) = 4\cos(400t) + 2\cos(800t)$

(α) Βρείτε την εκθετική σειρά Fourier του σήματος.

(β) Αν το δεδομένο σήμα είναι είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = \frac{600}{\pi} sinc\left(\frac{600}{\pi}t\right)$, να βρεθεί η έξοδός του $y(t)$.

- Υπόδειξη: α) $\cos(a) = \frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2}$, β)$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 0.5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ γ)$\mathcal{F}(\Pi(t)) = sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$, δ) $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}\{X(t)\} = 2\pi x(-\omega)$, ε) $\mathcal{F}\{x(ct)\} = \frac{1}{|c|} X\left(\frac{\omega}{c}\right)$

1ο ερώτημα

Βάσει της πρώτης υπόδειξης, ισχύει $\cos(400t) = \frac{e^{j400t} + e^{-j400t}}{2}$, $\cos(800t) = \frac{e^{j800t} + e^{-j800t}}{2}$(1). Αντικαθιστώντας όπου cos με τα δεξιά μέλη των παραπάνω ισοτήτων προκύπτει $x(t) = 4 \cdot \frac{e^{j400t} + e^{-j400t}}{2} + 2 \cdot \frac{e^{j800t} + e^{-j800t}}{2} \Rightarrow x(t) = 2 \cdot (e^{j400t} + e^{-j400t}) + e^{j800t} + e^{-j800t} \Rightarrow x(t) = e^{-j800t} + 2e^{-j400t} + 2e^{j400t} + e^{j800t}$

2ο ερώτημα

Η κρουστική απόκριση $h(t) = 600\pi sinc\left(\frac{600}{\pi}t\right)$ μοιάζει με τον μετασχηματισμό Fourier του ορθογώνιου παλμού $\Pi(t)$, ο οποίος ισούται με $sinc\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$ (υπόδειξη γ». Άρα, βάσει της ιδιότητας του δυισμού (υπόδειξη δ), θα ισχύει ότι $\mathcal{F}\left\{sinc\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right\} = 2\pi\Pi(-\omega) \xrightarrow{\Pi(-\omega)=\Pi(\omega)} \mathcal{F}\left\{sinc\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right\} = 2\pi\Pi(\omega) \Rightarrow$

$\mathcal{F}\left\{\frac{600}{\pi}sinc\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right\} = \frac{600}{\pi}2\pi\Pi(\omega) \Rightarrow\Rightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{600}{\pi}sinc\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right\} = 1200\Pi(\omega) \xRightarrow{\text{υπόδειξη ε)}} \mathcal{F}\left\{\frac{600}{\pi}sinc\left(1200\cdot\frac{t}{2\pi}\right)\right\} = \frac{1}{|1200|}1200\Pi\left(\frac{\omega}{1200}\right) \Rightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{600}{\pi}sinc\left(\frac{600}{\pi}t\right)\right\} = \Pi\left(\frac{\omega}{1200}\right)$

Άρα $H(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{1200}\right) = \begin{cases} 1, & \left|\frac{\omega}{1200}\right| < 0.5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & |\omega| < 0.5\cdot 1200 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 1, & |\omega| < 600 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Πρόκειται για βαθυπερατό φίλτρο το οποίο αποκόπτει τις συχνότητες που είναι άνω των 600 και κρατάει τις μικρότερες. Το φίλτρο αποτελείται από 2 συχνότητες: 400, 800. Άρα αποκόπτει την μεγαλύτερη και κρατάει την μικρότερη, οπότε θα ισχύει $y(t) = 4\cos(400t)$

2ο Θέμα

Έστω η απόκριση συχνότητος ενός ΓΧΑ συστήματος:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 4y(t) = x(t)$$

(α) Υπολογίστε την απόκριση συχνότητος του συστήματος, βάσει του μετασχηματισμού Fourier.

(β) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση.

Υπόδειξη: α)$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$, $a > 0$, β) $\mathcal{F}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n X(\omega)$

1ο ερώτημα

$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 4y(t) = x(t) \Rightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 4y(t)\right\} = \mathcal{F}\{x(t)\} \Rightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + 5\mathcal{F}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 4\mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} \xRightarrow{\text{υπόδειξη β)}} (j\omega)^2Y(\omega) + 5(j\omega)Y(\omega) + Y(\omega) = X(\omega) \Rightarrow Y(\omega)[(j\omega)^2 + 5j\omega + 4] = X(\omega)(1)$

Γνωρίζομε ότι $y(t) = x(t) * y(t) \Rightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)(2)$. Αντικαθιστώντας όπου $Y(\omega)$ στην (1) με $X(\omega)H(\omega)$, προκύπτει ότι $X(\omega)H(\omega)[(j\omega)^2 + 5j\omega + 4] = X(\omega) \Rightarrow H(\omega)[(j\omega)^2 + 5j\omega + 4] = 1 \Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4}$

2ο ερώτημα

$H(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4} \Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+4)}$.

Το σύνθετο κλάσμα μπορεί να γραφεί και ως $\frac{A}{j\omega+1} + \frac{B}{j\omega+4} = \frac{A(j\omega+4)}{(j\omega+1)(j\omega+4)} + \frac{B(j\omega+1)}{(j\omega+1)(j\omega+4)} = \frac{A(j\omega+4) + B(j\omega+1)}{(j\omega+1)(j\omega+4)} = \frac{Aj\omega + 4A + Bj\omega + B}{(j\omega+1)(j\omega+4)} = \frac{j\omega(A+B) + 4A + B}{(j\omega+1)(j\omega+4)}$. Για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει οι μεταβλητές να είναι τέτοιες ώστε να ισχύει:

$\begin{cases} j\omega(A+B)=0 \\ 4A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 4A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ 4A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ 4A-A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ 3A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ A=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{3} \\ A=\frac{1}{3} \end{cases}$. Άρα θα ισχύει $H(\omega) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{j\omega+1} - \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{j\omega+4} \xRightarrow{\text{υπόδειξη α)}} h(t) = \dfrac{1}{3}e^{-t}u(t) - \dfrac{1}{3}e^{-4t}u(t)$

3ο Θέμα

Βρείτε αν τα παρακάτω σήματα είναι ενεργειακά ή όχι:

(α) $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{3t}u(-t)$

(β) $x(n) = (-e)^{-n}u(n)$

- Υπόδειξη: α) $x(t) \Rightarrow E_x = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$, β)$x(n) \Rightarrow E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$, γ) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \lambda^n = \frac{a_0}{1-\lambda}$, $|\lambda| < 1$, δ) $\displaystyle\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C$

1ο ερώτημα

$E_x = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-2t}u(t)+e^{3t}u(-t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left[e^{-2t}u(t)\right]^2 + 2e^{-2t}u(t)e^{3t}u(-t) + \left[e^{3t}u(-t)\right]^2\right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-2t}u(t)\right]^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-2t}u(t)e^{3t}u(-t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{3t}u(-t)\right]^2 dt (1).$

Όμως $u(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \Rightarrow u(-t) = \begin{cases} 0, & t>0 \\ 1, & t<0 \end{cases} \Rightarrow u(t)u(-t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R} (2)$

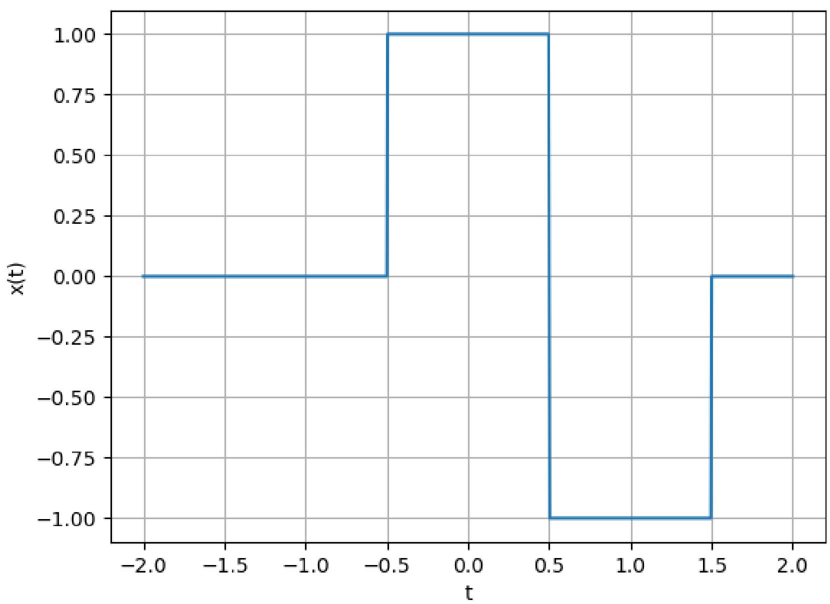
Αρα $E_x = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-2t}u(t)\right]^2 dt + \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{3t}u(-t)\right]^2 dt = \int_{0}^{\infty} \left[e^{-2t}\right]^2 dt + \int_{-\infty}^{0} \left[e^{3t}\right]^2 dt = \int_{0}^{\infty} e^{-2t\cdot 2} dt + \int_{-\infty}^{0} e^{3t\cdot 2} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-4t} dt + \int_{-\infty}^{0} e^{6t} dt = \left[\frac{e^{-4t}}{-4}\right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{6t}}{6}\right]_{-\infty}^{0} = \left[-\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-4t}}{4} - \left(-\frac{e^{-4\cdot 0}}{4}\right)\right] + \left[\frac{e^{6\cdot 0}}{6} - \lim_{t\to-\infty}\frac{e^{6t}}{6}\right] = \left[0 + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{6} = 0\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6}{24} + \frac{4}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12} < \infty$. Άρα είναι σήμα ενέργειας.

2ο ερώτημα

$E_x = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(-e)^{-n}u(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-e)^{-n}\right]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-e)^{-n\cdot 2} = \sum_{n=0}^{\infty} [(-e)^2]^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} [e^2]^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} [e^2]^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^2}\right)^n$. Πρόκειται για άθροισμα όρων γεωμετρικής σειράς (όπως στην υπόδειξη γ) όπου ο αρχικός όρος $a_0 = \left(\frac{1}{e^2}\right)^0 = 1$ και $\lambda = \frac{1}{e^2}$. Άρα $E_x = \frac{a_0}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\frac{1}{e^2}} = \frac{1}{\frac{e^2-1}{e^2}} = \frac{e^2}{e^2-1} < \infty$. Άρα είναι σήμα ενέργειας.

4ο Θέμα

Έστω σήμα $x(t)$ του οποίου η γραφική παράσταση είναι στην επόμενη σελίδα.



(α) Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των σημάτων $x(-t),\ x(2t),\ x(3t-1)$

(β) Βρείτε με γραφικό τρόπο την συνέλιξη $x(t) * u(t)$

- Υπόδειξη $\Pi(t) = \begin{cases} 1, & t < |0.5| \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

1ο ερώτημα

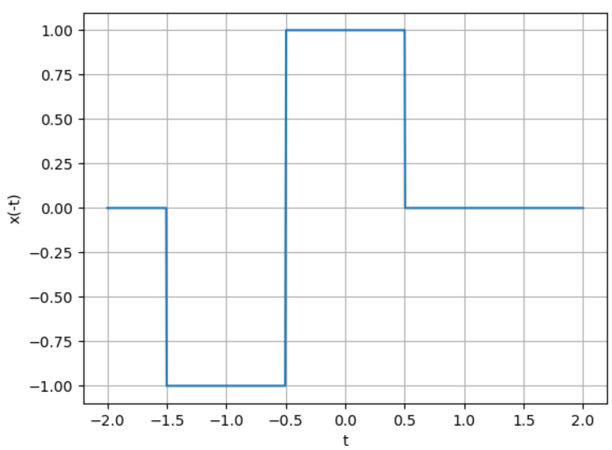
Από το σχήμα προκύπτει ότι Αρα $x(t) = \begin{cases} 0, & t < -0.5 \\ 1, & -0.5 < t < 0.5 \\ -1, & 0.5 < t < 1.5 \\ 0, & 1.5 < t \end{cases}$ Αν αντικατασταθεί το t με $-t,\ 2t,\ 3t-1$, προκύπτουν τα εξής·

- $x(t)=\begin{cases}0,\ t<-0.5\\1,\ -0.5<t<0.5\\-1,\ 0.5<t<1.5\\0,\ 1.5<t\end{cases} \Rightarrow x(-t)=\begin{cases}0,\ -t<-0.5\\1,\ -0.5<-t<0.5\\-1,\ 0.5<-t<1.5\\0,\ 1.5<-t\end{cases} \Rightarrow x(-t)=\begin{cases}0,\ t>0.5\\1,\ 0.5>t>-0.5\\-1,\ -0.5>t>-1.5\\0,\ -1.5>t\end{cases} \Rightarrow$
$x(-t)=\begin{cases}0,\ 0.5<t\\1,\ -0.5<t<0.5\\-1,\ -1.5<t<-0.5\\0,\ t<-1.5\end{cases}$

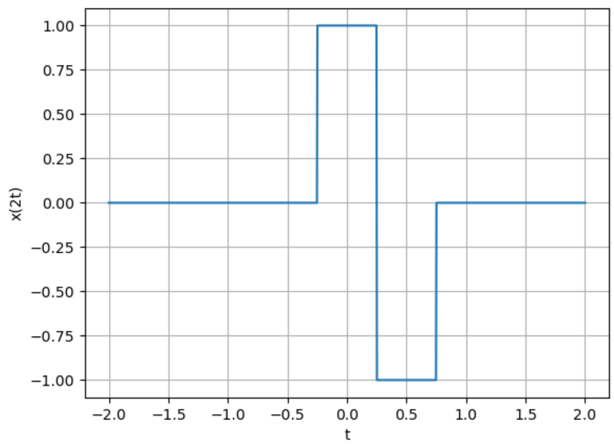
- $x(t)=\begin{cases}0,\ t<-0.5\\1,\ -0.5<t<0.5\\-1,\ 0.5<t<1.5\\0,\ 1.5<t\end{cases} \Rightarrow x(2t)=\begin{cases}0,\ 2t<-0.5\\1,\ -0.5<2t<0.5\\-1,\ 0.5<2t<1.5\\0,\ 1.5<2t\end{cases} \Rightarrow x(2t)=\begin{cases}0,\ t<-0.25\\1,\ -0.25<2t<0.25\\-1,\ 0.25<t<0.75\\0,\ 0.75<t\end{cases}$

- $x(t)=\begin{cases}0,\ t<-0.5\\1,\ -0.5<t<0.5\\-1,\ 0.5<t<1.5\\0,\ 1.5<t\end{cases} \Rightarrow x(3t-1)=\begin{cases}0,\ 3t-1<-0.5\\1,\ -0.5<3t-1<0.5\\-1,\ 0.5<3t-1<1.5\\0,\ 1.5<3t-1\end{cases} \Rightarrow x(3t-1)=$
$\begin{cases}0,\ 3t<0.5\\1,\ 0.5<3t<1.5\\-1,\ 1.5<3t<2.5\\0,\ 2.5<3t\end{cases} \Rightarrow x(3t-1)=\begin{cases}0,\ t<\frac{0.5}{3}\\1,\ \frac{0.5}{3}<t<\frac{1.5}{3}\\-1,\ \frac{1.5}{3}<3t<\frac{2.5}{3}\\0,\ \frac{2.5}{3}<3t\end{cases} \Rightarrow x(3t-1)=\begin{cases}0,\ t<\frac{1}{6}\\1,\ \frac{1}{6}<t<0.5\\-1,\ 0.5<3t<\frac{5}{6}\\0,\ \frac{5}{6}<3t\end{cases}$

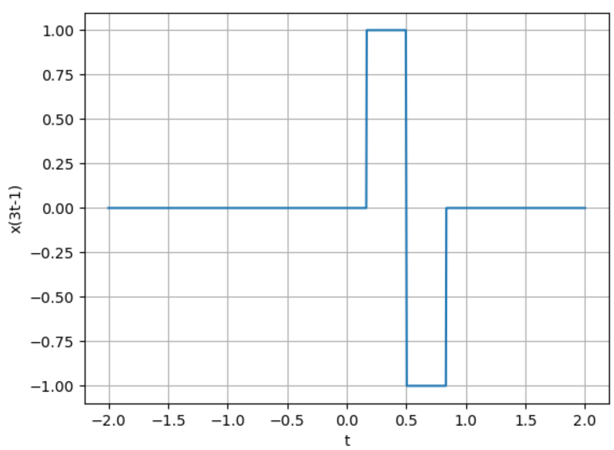
Παρακάτω, παρατίθενται οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις



Σχήμα 1: $x(-t)$



Σχήμα 2: $x(2t)$



Σχήμα 3: $x(3t-1)$

2ο ερώτημα

Εδώ προσπαθούμε να βρούμε την συνέλιξη $x(t) * u(t)$ όπου $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$.

Από θεωρίας είναι γνωστό ότι $f(t)*g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \xrightarrow[g(t)=x(t)]{f(t)=u(t)} u(t)*x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)x(t-\tau)d\tau \xrightarrow[u(t)=0,\ \forall t<0]{u(t)=1,\ \forall t>0} x(t)*u(t) = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot x(t-\tau)d\tau + \int_{0}^{\infty} 1\cdot x(t-\tau)d\tau \Rightarrow x(t)*u(t) = \int_{0}^{\infty} x(t-\tau)d\tau$.
Εδώ υπάρχουν 4 περιπτώσεις.

(α) $t \leq -0.5$: Στην Εικ 4 (α′), βλέπουμε ότι για $\tau > 0$ ισχύει $t - \tau < -0.5 \Rightarrow x(t-\tau) = 0 \Rightarrow x(t) * u(t) = \int_{0}^{\infty} 0 d\tau = 0$

(β) $-0.5 < t \leq 0.5$: Στην Εικ 4 (β′), βλέπουμε ότι για $0 < \tau < t + 0.5$ ισχύει $-0.5 < t - \tau \leq 0.5 \Rightarrow x(t-\tau) = 1 \Rightarrow x(t) * u(t) = \int_{0}^{\infty} x(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t+0.5} x(t-\tau)d\tau + \int_{t+0.5}^{\infty} x(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t+0.5} 1 d\tau + \int_{t+0.5}^{\infty} 0 d\tau = [\tau]_{0}^{t+0.5} + 0 = [t + 0.5 - 0] = t + 0.5$

(γ) $0.5 < t \leq 1.5$: Στην Εικ 4 (γ′), βλέπουμε ότι:

- για $0 < \tau < t + 0.5$ ισχύει $0.5 < t - \tau \leq 1.5 \Rightarrow x(t-\tau) = -1$
- για $t + 0.5 < \tau < t + 1.5$ ισχύει $-0.5 < t - \tau \leq 0.5 \Rightarrow x(t-\tau) = 1$
- για $\tau > t + 1.5$ ισχύει $t - \tau < -0.5 \Rightarrow x(t-\tau) = 0$

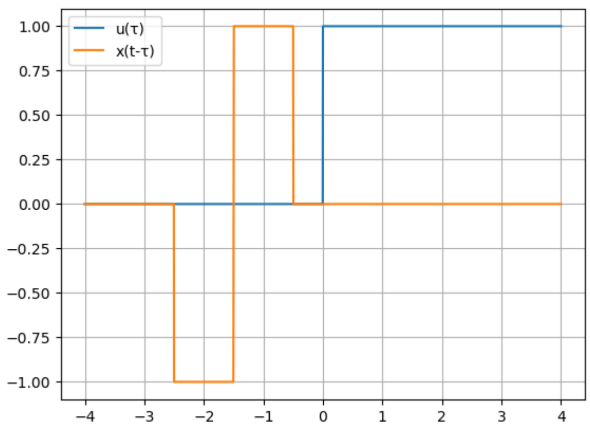
Βάσει των παραπάνω θα ισχύει: $x(t)*u(t) = \int_{0}^{\infty} x(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t+0.5} x(t-\tau)d\tau + \int_{t+0.5}^{t+1.5} x(t-\tau)d\tau + \int_{t+1.5}^{\infty} x(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t+0.5} -1 d\tau + \int_{t+0.5}^{t+1.5} 1 d\tau + \int_{t+1.5}^{\infty} 0 d\tau = [-\tau]_{0}^{t+0.5} + [\tau]_{t+0.5}^{t+1.5} + 0 = [-(t+0.5) - 0] + [t + 1.5 - (t+0.5)] = -t + 0.5$

(δ) $t \geq 1.5$: Στην Εικ 4 (δ′), βλέπουμε ότι:

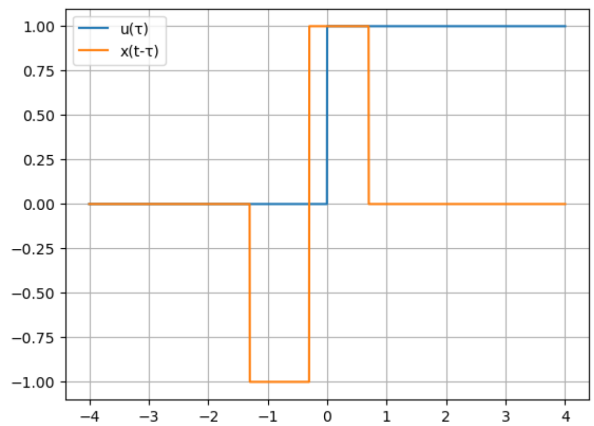
- για $0 < \tau < t - 1.5$ ισχύει $t - \tau > 1.5 \Rightarrow x(t-\tau) = 0$
- για $t - 1.5 < \tau < t - 0.5$ ισχύει $0.5 < t - \tau \leq 1.5 \Rightarrow x(t-\tau) = -1$
- για $t - 0.5 < \tau < t + 0.5$ ισχύει $-0.5 < t - \tau \leq 0.5 \Rightarrow x(t-\tau) = 1$
- για $\tau > t + 0.5$ ισχύει $t - \tau < -0.5 \Rightarrow x(t-\tau) = 0$

Βάσει των παραπάνω θα ισχύει: $x(t)*u(t) = \int_{0}^{\infty} x(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t-1.5} x(t-\tau)d\tau + \int_{t-1.5}^{t-0.5} x(t-\tau)d\tau + \int_{t-0.5}^{t+0.5} x(t-\tau)d\tau + \int_{t+0.5}^{\infty} x(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t-1.5} 0 d\tau + \int_{t-1.5}^{t-0.5} -1 d\tau + \int_{t-0.5}^{t+0.5} 1 d\tau + \int_{t+0.5}^{\infty} 0 d\tau = 0 + [\tau]_{t-1.5}^{t-0.5} + [-\tau]_{t-0.5}^{t+0.5} + 0 = [t - 0.5 - (t-1.5)] + [-(t-0.5) + (t-1.5)] = 0$

Άρα $y(t) = x(t) * h(t) = \begin{cases} 0, \ t < -0.5 \\ t+1, \ -0.5 < t < 0.5 \\ t-1, \ 0.5 < t < 1.5 \\ 0, \ t > 1.5 \end{cases}$

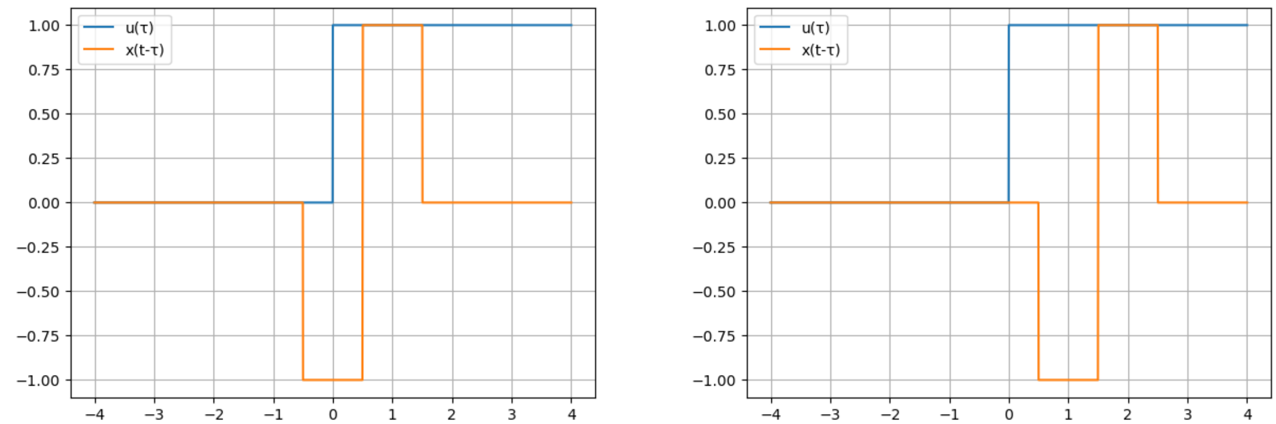


(α΄): Περίπτωση 1η: $t \leq -0.5$



(β΄): Περίπτωση 2η: $-0.5 < t \leq 0.5$

Σχήμα 4: Περιπτώσεις της συνέλιξης $x(t) * u(t)$



(α΄): Περίπτωση 3η: $0.5 < t \leq 1.5$

(β΄): Περίπτωση 4η: $t \geq 1.5$

Σχήμα 5: Περιπτώσεις της συνέλιξης $x(t) * u(t)$

5ο Θέμα

Έστω ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου το οποίο έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{1}{s+2}$$

με πεδίο σύγκλισης $R = \{s: \ Re[s] > -2\}$και σήμα εισόδου $x(t)$ με μετασχηματισμό Laplace:

$$X(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)}$$

Να βρεθεί η έξοδος $y(t)$ βάσει των διάφορων πιθανών πεδίων σύγκλισης του $X(s)$. Υπόδειξη: α) $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}$, $\mathcal{R}e > -a$, β) $\mathcal{L}\{e^{-a|t|}u(t)\} = -\frac{2a}{s^2-a^2}$, $-a < \mathcal{R}e < a$

Ο μετασχηματισμός Laplace $X(s)$ έχει 2 πόλους (ήτοι, 2 σημεία στα οποία δεν ορίζεται): $s = \pm 1$, οπότε υπάρχουν 3 πιθανά πεδία συγκλίσεως για το $X(s)$:

- $R_X = \{s : \mathcal{R}e[s] > 1\}$
- $R_X = \{s : -1 < \mathcal{R}e[s] < 1\}$
- $R_X = \{s : \mathcal{R}e[s] < -1\}$

Άρα $Y(s) = X(s)H(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-1)} \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s-1)}$ με πεδίο σύγκλισης $R = R_X \cap R_H$.

$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} = \frac{A(s-1)+B(s+1)}{(s+1)(s-1)} = \frac{s(A+B)-A+B}{(s+1)(s-1)}$. Για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει τα A, B να ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ -A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ B+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ 2B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

Άρα $Y(s) = -\frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-1}$. Όσον αφορά τα κλάσματα $\frac{1}{s+1}, \frac{1}{s-1}$ είναι μετασχηματισμοί των παρακάτω σημάτων

$\frac{1}{s+1}$: α) $e^{-t}u(t)$ με περιοχή σύγκλισης $\mathcal{R}e[s] > -1$ ή β)$-e^{t}u(-t)$ με περιοχή σύγκλισης $\mathcal{R}e[s] < -1$

$\frac{1}{s-1}$: γ) $e^{t}u(t)$ με περιοχή σύγκλισης $\mathcal{R}e[s] > 1$ ή δ)$-e^{-t}u(-t)$ με περιοχή σύγκλισης $\mathcal{R}e[s] < 1$

1η περίπτωση: $R_X = \{s : \mathcal{R}e[s] > 1\}$

$R = R_X \cap R_H = \{s : \mathcal{R}e[s] > 1\} \cap \{s : \mathcal{R}e[s] > -2\} = \{s : \mathcal{R}e[s] > 1\}$. Τα σήματα των οποίων οι περιοχές συγκλίσεως έχουν αλληλεπικάλυψη με την R είναι τα σήματα α) και γ). Άρα $y(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{t}u(t)$

2η περίπτωση: $R_X = \{s : -1 < \mathcal{R}e[s] < 1\}$

$R = R_X \cap R_H = \{s : -1 < \mathcal{R}e[s] < 1\} \cap \{s : \mathcal{R}e[s] > -2\} = \{s : -1 < \mathcal{R}e[s] < 1\}$. Τα σήματα των οποίων οι περιοχές συγκλίσεως έχουν αλληλεπικάλυψη με την R είναι τα σήματα α) και δ). Άρα $y(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-t}u(-t)$

3η περίπτωση: $R_X = \{s : \mathcal{R}e[s] < -1\}$

$R = R_X \cap R_H = \{s : \mathcal{R}e[s] < -11\} \cap \{s : \mathcal{R}e[s] > -2\} = \{s : -2 < \mathcal{R}e[s] < -1\}$. Τα σήματα των οποίων οι περιοχές συγκλίσεως έχουν αλληλεπικάλυψη με την R είναι τα σήματα β) και δ). Άρα $y(t) = \frac{1}{2}e^{t}u(-t) - \frac{1}{2}e^{-t}u(-t)$

6ο Θέμα

Δεδομένης της παρακάτω διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = e^{-t}u(t),\ x(0) = 2 \tag{1}$$

χωρίς να βρείτε το αρχικό σήμα $x(t)$ υπολογίστε τις παρακάτω ποσότητες:

(α) μονόπλευρο Laplace του σήματος $g(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

(β) τελική τιμή του σήματος $x(t)$

- Υπόδειξη: α) $\mathcal{ML}\{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{s+a}$, $\mathcal{R}e[s] > -a$, β) $\mathcal{ML}\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s} + \int_{-\infty}^{0} x(\tau)d\tau$, γ) $\mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)$, δ) $\lim_{t\to\inf} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$, γ) $\int_{-\infty}^{0} x(t)dt = 0$

1ο ερώτημα

$\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = e^{-t}u(t),\ x(0) = 2 \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)\right\} = \mathcal{ML}\left\{e^{-t}u(t)\right\} \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + 2\mathcal{ML}\left\{x(t)\right\} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow sX(s) - x(0) + 2X(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow X(s)(s+2) = \frac{1}{s+1} + 2 \Rightarrow X(s)(s+2) = \frac{2s+3}{s+1} \Rightarrow X(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}.$

Βάσει της ιδιότητας της ολοκλήρωσης (υπόδειξη β), προκύπτει ότι $G(s) = \mathcal{ML}\{\int \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\} = \frac{X(s)}{s} + \int_{-\infty}^{0} x(\tau)d\tau = \frac{1}{s} \cdot \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} + 0 = \frac{2s+3}{s(s+1)(s+2)}$

2ο ερώτημα

Βάσει της ιδιότητας τελικής τιμής (υπόδειξη δ), προκύπτει ότι $\lim_{t\to \mathrm{inf}} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} = 0 \cdot \frac{2\cdot 0+3}{(0+1)(0+2)} = 0 \cdot \frac{3}{2} = 0$