Σεπτεμβριανή εξεταστική στο μάθημα ``Σήματα και Συστήματα'' για το ακαδημαϊκό έτος 2022-2023

1ο Θέμα

Εστω το περιοδικό σήμα $x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cos(200kt)$

(α) Βρείτε την εκθετική σειρά Fourier του σήματος.

(β) Βρείτε την ολική μέση ισχύ, βάσει των όρων της εκθετικής σειράς Fourier. Υπόδειξη: α) $\cos(a) = \frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2}$, β)Ταυτότητα του Parseval: $P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$ όπου $a_k,\ k \in \mathbf{R}$ οι όροι της εκθετικής σειράς Fourier, , γ) $\sum_{k=0}^{\infty} a_0 \lambda^k = \frac{a_0}{1-\lambda},\ \lambda < 1$

Λύση 1ου Θέματος

1ο ερώτημα

Βάσει υποδείξεως (α), προκύπτει ότι $\cos(200kt) = \frac{e^{200kjt} + e^{-200kjt}}{2}$. Αντικαθιστώντας στο άθροισμα το συνημίτονο με την ποσότητα δεξιά της παραπάνω ισότητας προκύπτει ότι $x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{e^{200kjt} + e^{-200kjt}}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} (e^{200kjt} + e^{-200kjt}) = 1 + \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|-1} e^{200kjt}$.

2ο ερώτημα

Βάσει της λύσης του προηγούμενου ερωτήματος, γνωρίζομε ότι οι συντελεστές της εκθετικής σειράς Fourier είναι $a_k = \begin{cases} 1,\ k=0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|-1},\ k \neq 0 \end{cases}$

Άρα η ολική μέση ισχύς του σήματος είναι $P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = |a_0|^2 + \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} |a_k|^2 = 1^2 + \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|-1}\right)^2 \Rightarrow P_x = 1 + \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|-1}\right)^2 \Rightarrow P_x = 1 + \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{|k|-1} \Rightarrow P_x = 1 + \sum_{k=-\infty,\ k\neq 0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{|k|-1} \Rightarrow P_x = 1 + \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{4}\right)^{|k|-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{|k|-1} \Rightarrow P_x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{|k|-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{|k|-1} \Rightarrow P_x = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{|k|-1} \Rightarrow P_x = 1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{|k|} Rightarrow P_x = 1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{|k|}$.

Βάσει τελευταίας υποδείξεως, προκύπτει ότι $P_x = 1 + 2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} = 1 + 2 \cdot \frac{4}{3} = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}$

2ο Θέμα

Έστω η κρουστική απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος ως

$$h(t) = 3e^{-2t}u(t)$$

(α) Υπολογίστε την απόκριση συχνότητος του συστήματος, βάσει του μετασχηματισμού Fourier.

(β) Βρείτε την είσοδο $x(t)$ αν γνωρίζετε ότι η έξοδος είναι $y(t) = 12e^{-t}u(t) - 12e^{-2t}u(t)$.

Υπόδειξη: $\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \dfrac{1}{a+j\omega},\ a > 0$

Λύση 2ου Θέματος

1ο ερώτημα

Βάσει της υποδείξεως, προκύπτει ότι $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} \Rightarrow H(\omega) = \mathcal{F}\{3e^{-2t}u(t)\} \Rightarrow H(\omega) = 3\mathcal{F}\{e^{-2t}u(t)\} \Rightarrow H(\omega) = 3 \cdot \dfrac{1}{2+j\omega} \Rightarrow H(\omega) = \dfrac{3}{2+j\omega}$

2ο ερώτημα

Γνωρίζομε ότι $y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)(1)$. Αφού είναι γνωστοί ο μετασχηματισμός Fourier $H(\omega)$ και το σήμα εξόδου $y(t)$, αρκεί να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier $Y(\omega)$, ώστε να βρεθεί μέσω της σχέσης (1) ο μετασχηματισμός Fourier $X(\omega)$, και εν τέλει, το σήμα εισόδου $x(t)$.
Βάσει της υποδείξεως, προκύπτει ότι $Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} \Rightarrow Y(\omega) = \mathcal{F}\{12e^{-t}u(t) - 12e^{-2t}u(t)\} \Rightarrow Y(\omega) = 12\mathcal{F}\{e^{-t}u(t)\} - 12\mathcal{F}\{e^{-2t}u(t)\} \Rightarrow Y(\omega) = 12 \cdot \dfrac{1}{1+j\omega} - 12 \cdot \dfrac{1}{2+j\omega} \Rightarrow Y(\omega) = 12\left[\dfrac{1}{1+j\omega} - \dfrac{1}{2+j\omega}\right] \Rightarrow Y(\omega) = 12\left[\dfrac{2+j\omega}{(1+j\omega)(2+j\omega)} - \dfrac{1+j\omega}{(1+j\omega)(2+j\omega)}\right] \Rightarrow Y(\omega) = 12\left[\dfrac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}\right] \Rightarrow Y(\omega) = \dfrac{12}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$.
Έχοντας βρει τον μετασχηματισμό Fourier $Y(\omega)$ και από σχέσεως (1) προκύπτει ότι $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \Rightarrow X(\omega) = \dfrac{Y(\omega)}{H(\omega)} \Rightarrow X(\omega) = \dfrac{\frac{12}{(1+j\omega)(2+j\omega)}}{\frac{3}{2+j\omega}} \Rightarrow X(\omega) = \dfrac{12(2+j\omega)}{3(1+j\omega)(2+j\omega)} \Rightarrow X(\omega) = \dfrac{12}{3(1+j\omega)} \Rightarrow X(\omega) = \dfrac{4}{1+j\omega}$.
Έχοντας βρει τον μετασχηματισμό Fourier $X(\omega)$ και βάσει υποδείξεως προκύπτει ότι $x(t) = 4e^{-t}u(t)$.

3ο Θέμα

Βρείτε αν τα παρακάτω σήματα είναι ενεργειακά ή ισχύος ή τίποτα:

(α) $x(t) = u(t) - u(20-t),\ t \in \mathbb{R}$

(β) $x(n) = \dfrac{\cos(n)}{n},\ n > 1$

- Υπόδειξη: α) $x(t) \Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$, β)$x(n) \Rightarrow E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$, γ) $x(t) \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$, δ)$x(n) \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T+1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$, ε) Ένα σήμα μπορεί να είναι μόνο ενα εκ των 2 ή τίποτα. Δεν γίνεται να είναι και ισχύος και ενέργειας!!!

Λύση 3ου Θέματος

1ο ερώτημα

Αρχικά υπολογίζομε την ενέργεια του σήματος $x(t)$, βάσει υποδείξεως (α). $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t) - u(20-t)|^2 dt \Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{\infty} (u^2(t) - 2u(t)u(20-t) + u^2(20-t))dt$.

Γνωρίζομε ότι $u(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0,\ t < 0 \end{cases}$ (1). Άρα $u(20-t) = \begin{cases} 1, 20-t \geq 0 \\ 0,\ 20-t < 0 \end{cases} \Rightarrow u(20-t) = \begin{cases} 1, 20 \geq t \\ 0,\ 20 < t \end{cases}$

Βάσει των παραπάνω, προκύπτει ότι $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt - 2\int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(20-t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} u^2(20-t)dt \Rightarrow E_x = \int_{0}^{\infty} 1^2 dt - 2\int_{0}^{20} 1 \cdot 1 dt + \int_{-\infty}^{20} 1^2 dt \Rightarrow E_x = \int_{0}^{\infty} 1dt - 2\int_{0}^{20} 1dt + \int_{-\infty}^{20} 1dt \Rightarrow E_x = \int_{0}^{\infty} 1dt - 2\int_{0}^{20} 1dt + \int_{-\infty}^{0} 1dt + \int_{0}^{20} 1dt \Rightarrow E_x = \int_{-\infty}^{\infty} 1dt - \int_{0}^{20} 1dt \Rightarrow E_x = [t]_{-\infty}^{\infty} - [t]_0^{20} = [\lim_{t\to\infty} t - \lim_{t\to-\infty} t] - [20-0] = \infty - (-\infty) - 20 = \infty - 20 = \infty$. Άρα δεν είναι σήμα ενέργειας.

Ελέγχομε αν είναι σήμα ισχύος, βάσει υποδείξεως (γ). $P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |u(t) - u(20-t)|^2 dt \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (u(t)^2 - 2u(t)u(20-t) + u^2(20-t))dt \Rightarrow$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^{T} u(t)^2 dt - 2\int_{-T}^{T} u(t)u(20-t)dt + \int_{-T}^{T} u^2(20-t)dt \right] \Rightarrow$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{0}^{T} 1^2 dt - 2\int_{0}^{20} 1 \cdot 1dt + \int_{-T}^{20} 1^2(20-t)dt \right] \Rightarrow$$

$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left[[t]_0^T - 2\,[t]_0^{20} + [t]_{-T}^{20} \right] \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [[T-0] - 2\,[20-0] + [20-(-T)]] \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [T - 2\cdot 20 + 20 + T] \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} [2T - 20] \Rightarrow P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{2T-20}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{2T}{2T} = 1$.
Άρα είναι σήμα ισχύος.

2ο ερώτημα

Αρχικά υπολογίζομε την ενέργεια του σήματος $x(t)$, βάσει υποδείξεως (β). $E_x = \sum_{2}^{\infty} |x(n)|^2 \Rightarrow E_x = \sum_{2}^{\infty} \left|\frac{\cos(n)}{n}\right|^2 \Rightarrow E_x = E_x = \sum_{2}^{\infty} \left|\frac{\cos^2(n)}{n^2}\right|^2$.

Γνωρίζομε ότι $\cos(n) \leq 1\ \forall n \in \mathbb{R} \Rightarrow \cos^2(n) \leq 1^2 \Rightarrow \frac{\cos^2(n)}{n^2} \leq \frac{1}{n^2},\ \forall n \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{2}^{\infty} \frac{\cos^2(n)}{n^2} \leq \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^2}(1)$.

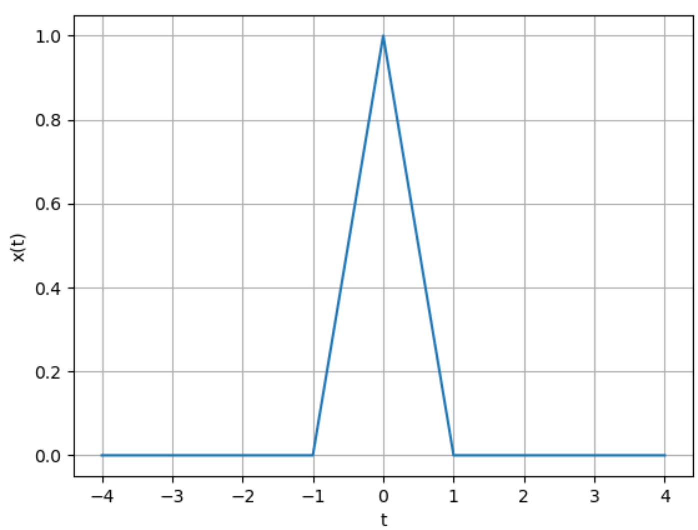
Από θεωρίας είναι γνωστό ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει για κάθε $p > 1$, οπότε συγκλίνει και η σειρά του δεξιού μέλους της ανισότητας (1). Αφού συγκλίνει το δεξιό μέλος της ανισότητας, τότε θα συγκλίνει και το αριστερό της μέλος, οπότε η ενέργεια του σήματος είναι πεπερασμένη ανω του μηδενός, οπότε θα είναι και σημα ενέργειας (άρα όχι ισχύος).

4ο Θέμα

Έστω σήμα $x(t)$ του οποίου η γραφική παράσταση είναι παρακάτω.

(α) Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των σημάτων $x(-t),\ 2x(-2t),\ \frac{1}{3}x(3t-1)$

(β) Βρείτε με γραφικό τρόπο την συνέλιξη $x(t) * u(t)$



Λύση 4ου Θέματος

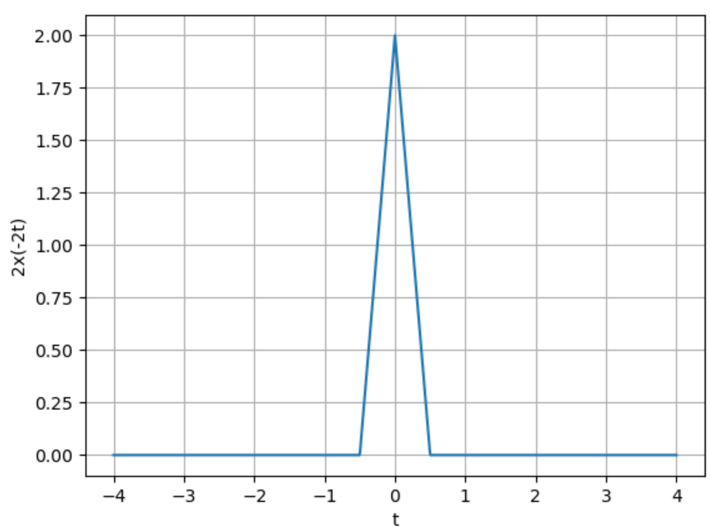
1ο ερώτημα

Όπως βλέπομε στην γραφική παράσταση το σήμα $x(t)$ είναι ο τριγωνικός παλμός, ο οποίος είναι άρτιος, δηλαδή $x(-t) = x(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$, οπότε η γραφική παράσταση του $x(-t)$ είναι ίδια με αυτήν στην εικόνα.

Η συναρτησιακή μορφή του σήματος είναι η εξής: $x(t) = \begin{cases} 0,\ t < -1 \\ 1 - |t|,\ -1 \leq t \leq 1 \\ 0,\ t > 1 \end{cases} \xrightarrow{t \leftarrow -2t} x(-2t) = \begin{cases} 0,\ -2t < -1 \\ 1 - |2t|,\ -1 \leq -2t \leq 1 \\ 0,\ -2t > 1 \end{cases} \Rightarrow x(-2t) = \begin{cases} 0,\ t > 1/2 \\ 1 - 2|t|,\ -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 0,\ t < -1/2 \end{cases} \Rightarrow$

$2x(-2t) = \begin{cases} 0,\ t > 1/2 \\ 2(1 - 2|t|),\ -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 0,\ t < -1/2 \end{cases}$

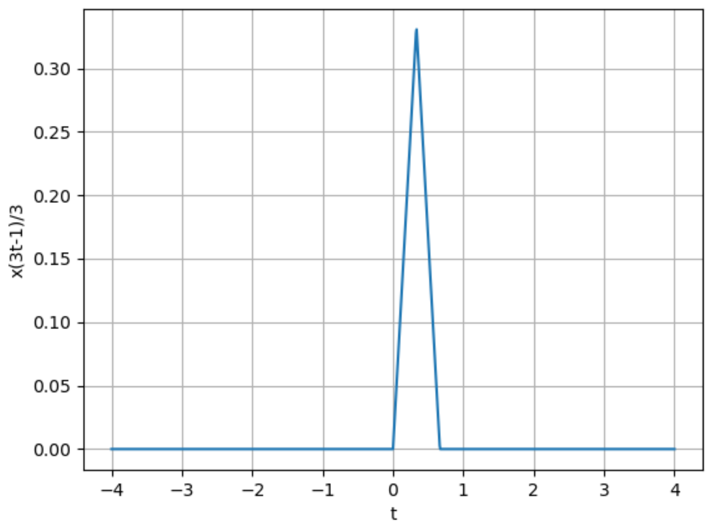
Παρακάτω είναι η γραφική παράσταση του σήματος. Ομοίως πράττομε και για το σήμα $\dfrac{1}{3}x(3t - 1)$.



$x(t) = \begin{cases} 0,\ t < -1 \\ 1 - |t|,\ -1 \leq t \leq 1 \\ 0,\ t > 1 \end{cases} \xrightarrow{t \leftarrow 3t-1} x(3t - 1) = \begin{cases} 0,\ 3t - 1 < -1 \\ 1 - |3t - 1|,\ -1 \leq 3t - 1 \leq 1 \\ 0,\ 3t - 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow x(3t - 1) = \begin{cases} 0,\ 3t < 0 \\ 1 - |3t - 1|,\ 0 \leq 3t \leq 2 \\ 0,\ 3t > 2 \end{cases} \Rightarrow$

$$x(3t-1) = \begin{cases} 0,\ t<0 \\ 1-|3t-1|,\ 0 \leq t \leq 2/3 \\ 0,\ t>2/2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}x(3t-1) = \begin{cases} 0,\ t<0 \\ \frac{1}{3}2(1-2|t|),\ 0 \leq t \leq 2/3 \\ 0,\ t>2/2 \end{cases}$$

Παρακάτω είναι η γραφική παράσταση του σήματος.



2ο ερώτημα

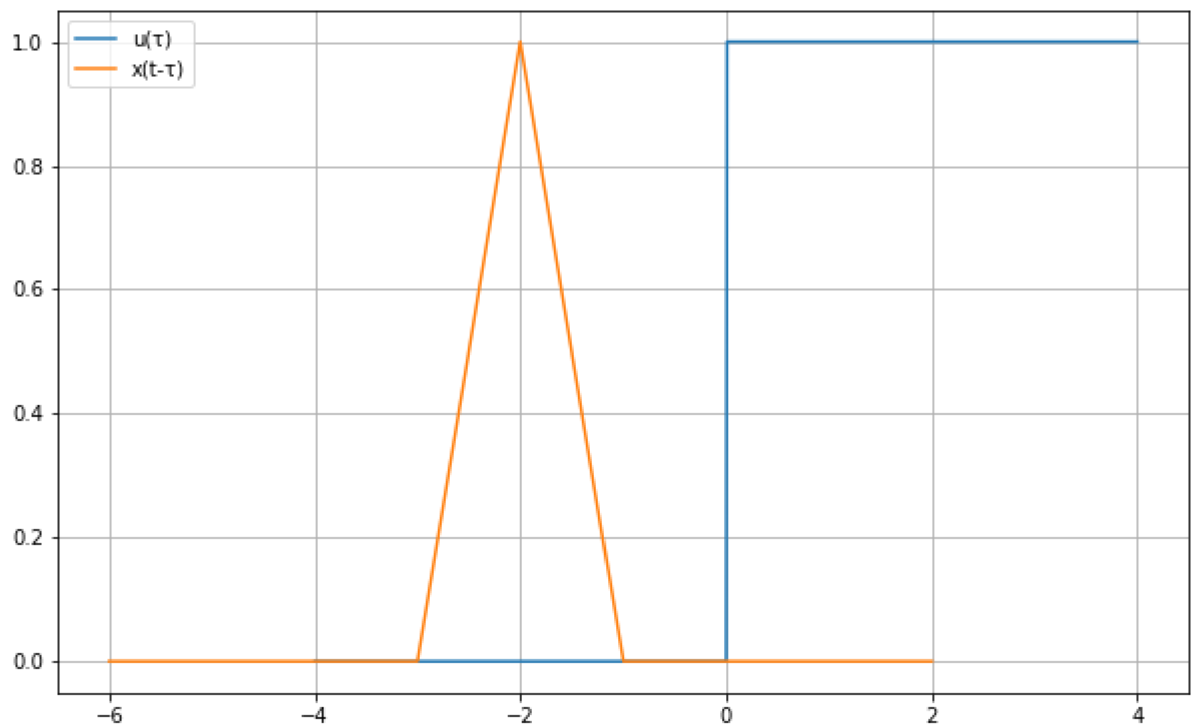
$$x(t)*u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)x(t-\tau)d\tau \Rightarrow x(t)*u(t) = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot x(t-\tau)d\tau + \int_{0}^{\infty} 1\cdot x(t-\tau)d\tau \Rightarrow x(t)*u(t) = \int_{0}^{\infty} x(t-\tau)d\tau$$

Αναπτύσσοντας την $x(t)$, γράφεται ως εξής:

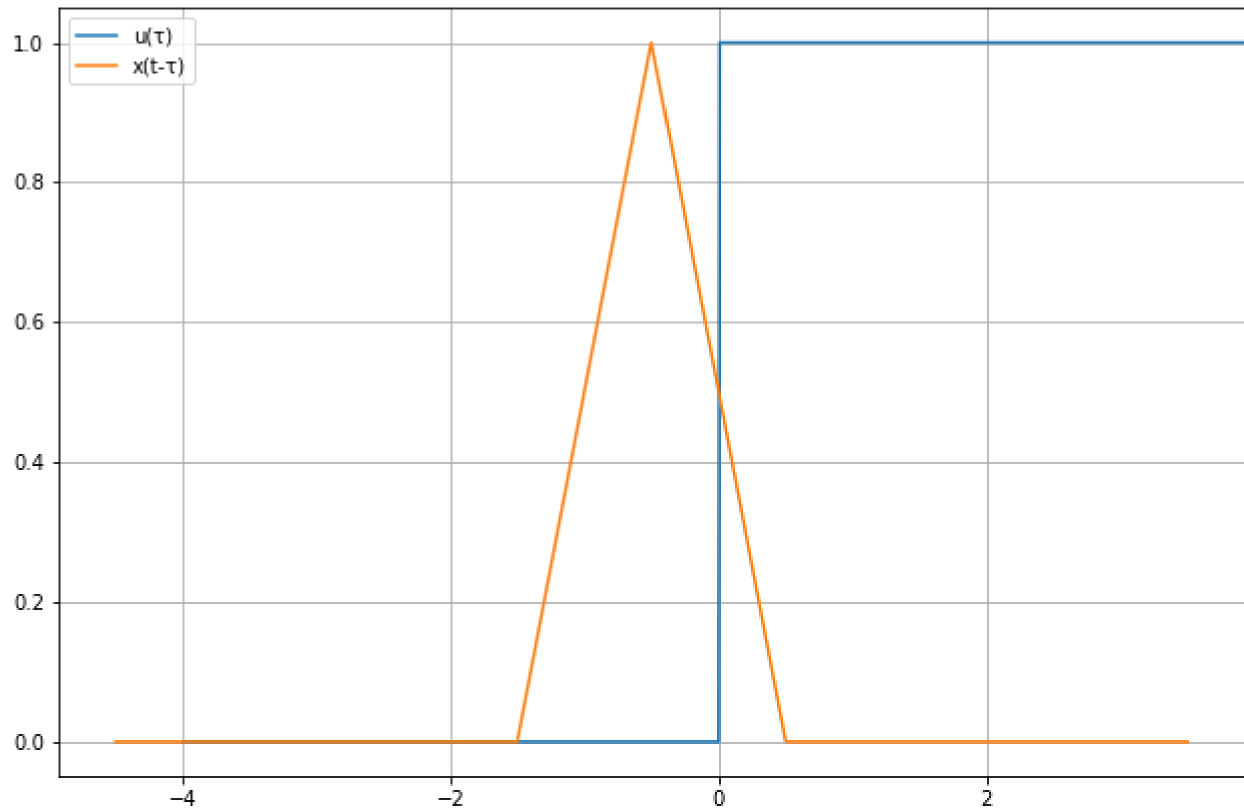
$$x(t) = \begin{cases} 0,\ t<-1 \\ 1+t,\ -1 \leq t < 0 \\ 1-t,\ 0 \leq t \leq 1 \\ 0,\ t>1 \end{cases}$$

Υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις

(1) $t<-1$. Σε αυτήν την περίπτωση θα ισχύει $t-\tau<0,\ \forall \tau>0 \Rightarrow x(t-\tau)=0$, οπότε θα ισχύει $x(t)*u(t) = \int_{0}^{\infty} x(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} 0 d\tau = 0$

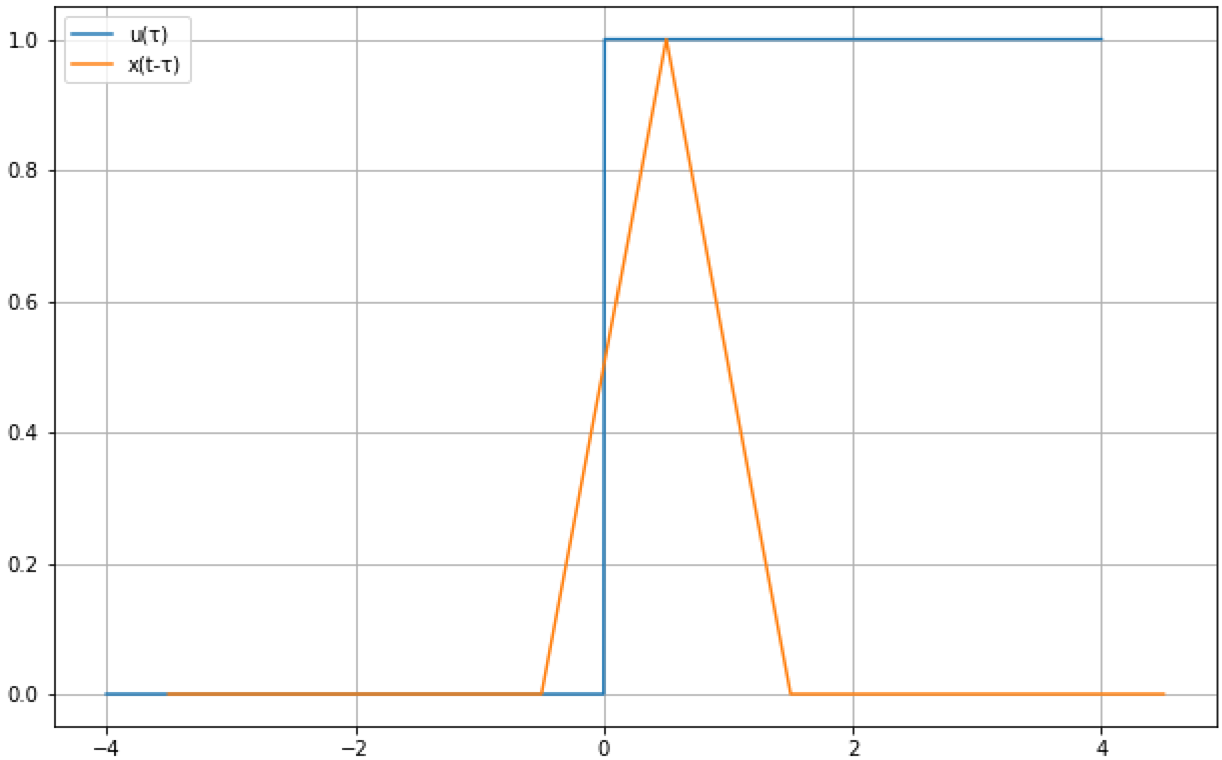

u(τ)
x(t-τ)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−6
−4
−2
0
2
4

(2) $-1 \leq t < 0$. Αν $-1 \leq t < 0$, τότε $x(t) * u(t) = \int_0^{\infty} x(t-\tau)d\tau \Rightarrow x(t) * u(t) = \int_0^{t+1} x(t-\tau)d\tau + \int_{t+1}^{\infty} x(t-\tau)d\tau \xRightarrow[t-1<-1]{t<0\Rightarrow} x(t) * u(t) = \int_0^{t+1} 1 + (t-\tau)d\tau + \int_{t+1}^{\infty} 0 d\tau \Rightarrow x(t) * u(t) = \left[(1+t)\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_0^{t+1} = \frac{(t+1)^2}{2}$

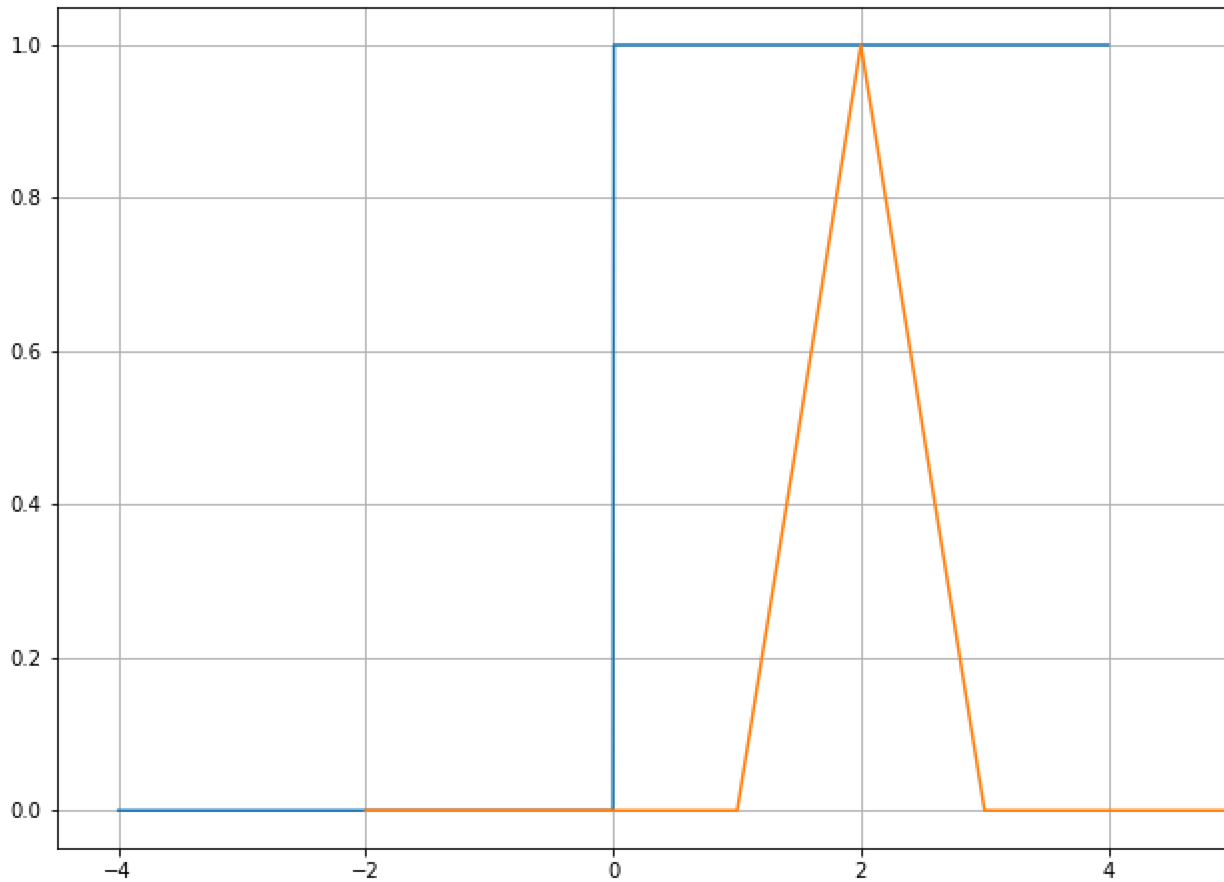


(3) $0 \leq t \leq 1$. Αν $0 \leq t < 1$, τότε $x(t)*u(t) = \int_0^{\infty} x(t-\tau)d\tau \xRightarrow[t-1<0]{t<1\Rightarrow} x(t)*u(t) = \int_0^{t} x(t-\tau)d\tau + \int_t^{\infty} x(t-\tau)d\tau \xRightarrow[t-2<-1]{t<1\Rightarrow} x(t) * u(t) = \int_0^{t} x(t-\tau)d\tau + \int_t^{t+1} x(t-\tau)d\tau + \int_{t+1}^{\infty} x(t-\tau)d\tau \Rightarrow$

$x(t)*u(t) = \int_0^t 1-(t-\tau)d\tau + \int_t^{t+1} 1+(t-\tau)d\tau + \int_{t+1}^{\infty} 0d\tau \Rightarrow x(t)*u(t) = \left[(1-t)\tau + \frac{\tau^2}{2}\right]_0^t +$
$\left[(1+t)\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_t^{t+1} = \frac{-t^2+2t+1}{2}$



(4) $t > 1$. Αν $t > 1$, τότε $x(t)*u(t) = \int_0^{\infty} x(t-\tau)d\tau \Rightarrow x(t)*u(t) = \int_0^{t-1} x(t-\tau)d\tau + \int_{t-1}^{t} x(t-\tau)d\tau + \int_t^{t+1} x(t-\tau)d\tau + \int_{t+1}^{\infty} x(t-\tau)d\tau \Rightarrow x(t)*u(t) = \int_0^{t-1} 0d\tau + \int_{t-1}^{t} 1-(t-\tau)d\tau + \int_t^{t+1} 1+(t-\tau)d\tau + \int_{t+1}^{\infty} 0d\tau \Rightarrow x(t)*u(t) = \left[(1-t)\tau + \frac{\tau^2}{2})\right]_{t-1}^{t} + \left[(1+t)\tau - \frac{\tau^2}{2})\right]_t^{t+1} = 1$


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−4
−2
0
2
4

Άρα θα ισχύει $x(t) * u(t) = \begin{cases} 0,\ t < -1 \\ \frac{(t+1)^2}{2},\ -1 \leq t < 0 \\ -\frac{(t+1)^2}{2},\ 0 \leq t \leq 1 \\ 1,\ t > 1 \end{cases}$

5ο Θέμα

Δίνεται το σύστημα μηδενικών αρχικών συνθηκών που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t)$$

(α) Βρείτε την συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ του συστήματος.

(β) Αν το σύστημα είναι αιτιατό, τότε βρειτε την έξοδο του συστήματος για είσοδο:

$$x(t) = e^{2t}u(t)$$

Υπόδειξη: α) $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \dfrac{1}{s+a},\ \mathcal{R}e[s] > -a$ β) $\mathcal{L}\{-e^{-at}u(-t)\} = \dfrac{1}{s+a},\ \mathcal{R}e[s] < -a$, γ) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s),\ R_{new} = R_{init}$

Λύση 5ου Θέματος

1ο ερώτημα

Γνωρίζομε ότι $y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(s) = X(s)H(s) \Rightarrow H(s) = \dfrac{H(s)}{X(s)}$. Αρκεί να βρούμε το κλάσμα στην τελική σχέση. $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + \dfrac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t) \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + \dfrac{dy(t)}{dt} - 2y(t)\right\} = \mathcal{L}\{x(t)\} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + \mathcal{L}\left\{\dfrac{dy(t)}{dt}\right\} - 2\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{x(t)\} \Rightarrow s^2Y(s) + sY(s) - 2Y(s) = X(s) \Rightarrow Y(s)(s^2 + s - 2) = X(s) \Rightarrow H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{1}{s^2+s-2}$.

2ο ερώτημα

Θα κάνομε παραγοντοποίηση του κλάσματος της συναρτήσεως μεταφοράς $H(s)$. $s^2 + s - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$. Άρα η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης έχει 2 λύσεις $s = \dfrac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow s = 1,\ s = -2$. Άρα $s^2 + s - 2 = (s-1)(s+2) \Rightarrow H(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$. Βάσει της υπόδειξης (α), προκύπτει ότι $X(s) = \dfrac{1}{s-2}$ με περιοχή σύγκλισης $\mathcal{R}_X = \{s : \mathcal{R}e[s] > 2\}$. Το σήμα εξόδου $y(t)$ θα πρέπει να έχει μετασχηματισμό Laplace $Y(s) = X(s)H(s) = \dfrac{1}{s-2}\dfrac{1}{(s-1)(s+2)} = \dfrac{1}{(s-1)(s+2)(s-2)}$. Στόχος είναν να παραγοντοποιηθεί το σύνθετο κλάσμα σε άθροισμα απλούστερων

κλασμάτων.
$\dfrac{1}{(s-1)(s+2)(s-2)} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s+2} + \dfrac{C}{(s-2)} \Rightarrow \dfrac{A(s-2)(s+2)}{(s-1)(s+2)(s-2)} + \dfrac{B(s-2)(s-1)}{(s-1)(s+2)(s-2)} +$
$\dfrac{C(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+2)(s-2)} = \dfrac{1}{(s-1)(s+2)(s-2)} \Rightarrow \dfrac{A(s^2-4)}{(s-1)(s+2)(s-2)} + \dfrac{B(s^2-3s+2)}{(s-1)(s+2)(s-2)} +$
$\dfrac{C(s^2+s-2)}{(s-1)(s+2)(s-2)} = \dfrac{1}{(s-1)(s+2)(s-2)} \Rightarrow \dfrac{s^2(A+B+C)}{(s-1)(s+2)(s-2)} + \dfrac{s(-3B+C)}{(s-1)(s+2)(s-2)} +$
$\dfrac{-4A+2B-2C}{(s-1)(s+2)(s-2)} = \dfrac{1}{(s-1)(s+2)(s-2)}$

Για να ισχύει η εν λόγω ισότητα, ϑα πρέπει να ισχύει:
$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -3B+C=0 \\ -4A+2B-2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ C=3B \\ -4A+2B-2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+3B=0 \\ C=3B \\ -4A+2B-2\cdot 3B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+4B=0 \\ C=3B \\ -4A+2B-2\cdot 3B=1 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} A=-4B \\ C=3B \\ -4A-4B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-4B \\ C=3B \\ -4(-4B)-4B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-4B \\ C=3B \\ 16B-4B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-4B \\ C=3B \\ 12B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-4B \\ C=3B \\ B=\frac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} A=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{1}{4} \\ B=\frac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow$$

Δεδομένου του παραπάνω αποτελέσματος, τότε ισχύει $= Y(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s+2)(s-2)} = -\dfrac{1}{3}\cdot \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{1}{s+2} + \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{s-2}$ Δεδομένου ότι το σύστημα είναι αιτιατό, τότε ϑα πρέπει να περιλαμβάνει και τον μετασχηματισμό Fourier ο οποίος ορίζεται όταν $s=0$, οπότε τα στοιχειώδη σήματα εκ των οποίων προέρχονται οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί Laplace του $Y(s)$, ϑα πρέπει να περιλαμβάνουν την τιμή $s=0$ στην περιοχή σύγκλισής των. Άρα οι μετασχηματισμοί $\dfrac{1}{s-2}$, $\dfrac{1}{s-1}$, $\dfrac{1}{s+2}$, βάσει των υποδείξεων (α), (β), προέρχονται από τα σήματα $-e^{2t}u(-t)$, $-e^{t}u(-t)$, $-e^{-2t}u(t)$, οπότε το σήμα εξόδου είναι $y(t) = \dfrac{1}{3}e^{t}u(-t) + \dfrac{1}{12}e^{-2t}u(t) - \dfrac{1}{4}e^{2t}u(-t)$

6ο Θέμα

Δεδομένης της παρακάτω διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = e^{-t}u(t),\ x(0)=2 \tag{1}$$

(α) Βρείτε τον μετασχηματισμό Laplace $X(s)$

(β) Χωρίς να βρείτε το αρχικό σήμα $x(t)$ υπολογίστε τις παρακάτω ποσότητες:

(i) μονόπλευρο Laplace του σήματος $g(t) = tx(t)$

(ii) αρχική τιμή του σήματος $x(t)$

Υπόδειξη: α) $\mathcal{ML}\{e^{-at}u(t)\} = \dfrac{1}{s+a}$, $\mathcal{R}e[s] > -a$, β) $\mathcal{ML}\left\{\dfrac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)$, γ) $\mathcal{ML}\left\{t^n x(t)\right\} = (-1)^n X^{(n)}(s)$, δ) $\mathcal{ML}\left\{\dfrac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)$, στ) $\lim\limits_{t\to 0} x(t) = \lim\limits_{s\to\infty} sX(s)$,

Λύση 6ου Θέματος

1ο ερώτημα

$\dfrac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = e^{-t}u(t),\ x(0) = 2 \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\dfrac{dx(t)}{dt} + 2x(t)\right\} = \mathcal{ML}\left\{e^{-t}u(t)\right\} \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\dfrac{dx(t)}{dt}\right\} + 2\mathcal{ML}\left\{x(t)\right\} = \mathcal{ML}\left\{e^{-t}u(t)\right\} \Rightarrow sX(s) - x(0) + 2X(s) = \dfrac{1}{s+1} \Rightarrow X(s)(s+2) = \dfrac{1}{s+1} + x(0) \Rightarrow X(s)(s+2) = \dfrac{1}{s+1} + 2 \Rightarrow X(s)(s+2) = \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{2(s+1)}{s+1} \Rightarrow X(s)(s+2) = \dfrac{2s+3}{s+1} \Rightarrow X(s) = \dfrac{2s+3}{(s+1)(s+2)}$

2ο ερώτημα

Εδώ λύνεται μόνο το 1ο ερώτημα. Βάσει της υποδείξεως (γ), τότε $G(s) = \mathcal{ML}\left\{g(t)\right\} = \mathcal{ML}\left\{tx(t)\right\} = (-1)^1 X'(s) \Rightarrow G(s) = -X'(s) \Rightarrow G(s) = -\left(\dfrac{2s+3}{s^2+3s+2}\right)' \Rightarrow G(s) = -\dfrac{(2s+3)'(s^2+3s+2) - (2s+3)(s^2+3s+2)'}{(s^2+3s+2)^2} \Rightarrow G(s) = -\dfrac{2(s^2+3s+2) - (2s+3)(2s+3)}{(s^2+3s+2)^2} \Rightarrow G(s) = -\dfrac{2s^2+6s+4-(4s^2+12s+9)}{(s^2+3s+2)^2} \Rightarrow G(s) = -\dfrac{-2s^2-6s-5}{(s^2+3s+2)^2} \Rightarrow G(s) = \dfrac{2s^2+6s+5}{(s^2+3s+2)^2}$