

Θέματα εξεταστικής στο μάθημα “Σήματα και Συστήματα” για το ακαδημαϊκό έτος 2023-2024

1ο Θέμα

Εστω το περιοδικό σήμα $x(t) = e^{-t}$, $t \in [-1, 1]$

(α) Βρείτε την εκθετική σειρά Fourier του σήματος.

(β) Αν το δεδομένο σήμα είναι είσοδος σε ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t) = \delta(t) - \frac{200}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{200}{\pi}t\right)$, να βρεθεί η έξοδος του $y(t)$.

• Υποδείξη: α) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)f(t)dt = f(t_0)$, β) $\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 0.5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$ γ) $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$,

δ) $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}\{X(t)\} = 2\pi x(-\omega)$, ε) $\mathcal{F}\{x(ct)\} = \frac{1}{|c|}X\left(\frac{\omega}{c}\right)$

Λύση 1ου Θέματος

1ο ερώτημα

Η περίοδος είναι $T = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$, άρα $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 x(t)dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-t}dt = \frac{1}{2} [-e^{-t}]_{-1}^1 = \frac{1}{2} [-e^{-1} - (-e^1)] = \frac{1}{2} \left[e - \frac{1}{e}\right]$ και $a_n = \frac{1}{T} \int_{-1}^1 x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-t}e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-t(1+jn\omega_0)}dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{e^{-t(1+jn\omega_0)}}{1+jn\omega_0} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left[-\frac{e^{-(1+jn\omega_0)}}{1+jn\omega_0} - \left(-\frac{e^{-(1+jn\omega_0)}}{1+jn\omega_0} \right) \right] = \frac{1}{2(1+jn\omega_0)} [-e^{-(1+jn\omega_0)} + e^{(1+jn\omega_0)}] = \frac{1}{2(1+jn\pi)} [-e^{-(1+jn\pi)} + e^{(1+jn\pi)}] = \frac{1}{2(1+jn\pi)} [-e^{-1}e^{-jn\pi} + e^1e^{jn\pi}] = \frac{1}{2(1+jn\pi)} [-e^{-1}e^{-jn\pi} + e^1e^{jn\pi}] \xrightarrow[=\cos(n\pi)]{a} = e^{jn\pi} = \frac{1}{2(1+jn\pi)} [-e^{-1}\cos(-n\pi) + e\cos(n\pi)] = \frac{1}{2(1+jn\pi)} [-e^{-1}\cos(n\pi) + e\cos(n\pi)] = \frac{\cos(n\pi)}{2(1+jn\pi)} [-e^{-1} + e] = \begin{cases} \frac{1}{2(1+jn\pi)} [-e^{-1} + e], & n = 2k \\ -\frac{1}{2(1+jn\pi)} [-e^{-1} + e], & n = 2k + 1 \end{cases}$

2ο ερώτημα

$h(t) = \delta(t) - \frac{200}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{200}{\pi}t\right) \Rightarrow H(\omega) = \mathcal{F}\left\{\delta(t) - \frac{200}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{200}{\pi}t\right)\right\} = \mathcal{F}\{\delta(t)\} - \mathcal{F}\left\{\frac{200}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{200}{\pi}t\right)\right\}$
Από Υποδείξεως α), προκύπτει ότι $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-0)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega \cdot 0} = e^0 = 1$. Επίσης, από υποδείξεως γ) γνωρίζουμε ότι $\mathcal{F}\{\Pi(t)\} = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \xrightarrow{\text{Υποδείξη δ)}} \mathcal{F}\left\{\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\right\} = 2\pi\Pi(-\omega) = 2\pi\Pi(\omega)$, καθότι η $\Pi(t)$ είναι άρτια συνάρτηση. Άρα, βάσει υποδείξεως ε), $\mathcal{F}\left\{\frac{200}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{200\omega}{\pi}\right)\right\} = \frac{200}{\pi} \mathcal{F}\left\{\text{sinc}\left(\frac{200\omega}{\pi}\right)\right\} = \frac{200}{\pi} \mathcal{F}\left\{\text{sinc}\left(400\frac{\omega}{2\pi}\right)\right\} = \frac{200}{\pi} \frac{1}{|400|} 2\pi\Pi\left(\frac{\omega}{400}\right) = \frac{400\pi}{400\pi} \Pi\left(\frac{\omega}{400}\right) = \Pi\left(\frac{\omega}{400}\right) = \begin{cases} 1, & \left|\frac{\omega}{400}\right| < \frac{1}{2} \\ 0, & \left|\frac{\omega}{400}\right| > \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 1, & |\omega| < \frac{400}{2} \\ 0, & |\omega| > \frac{400}{2} \end{cases} = \begin{cases} 1, & |\omega| < 200 \\ 0, & |\omega| > 200 \end{cases}$.

$$\text{Άρα } H(\omega) = \mathcal{F}\{\delta(t)\} - \mathcal{F}\left\{\frac{200}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{200}{\pi}t\right)\right\} = 1 - \Pi\left(\frac{\omega}{400}\right) = \begin{cases} 1 - 1, & |\omega| < 200 \\ 1 - 0, & |\omega| > 200 \end{cases} = \begin{cases} 0, & |\omega| < 200 \\ 1, & |\omega| > 200 \end{cases},$$

δηλαδή η κρουστική απόκριση περιγράφει ένα ιδανικό υπερεπατό φίλτρο ή αλλιώς ένα φίλτρο το οποίο επιτρέπει σε υψηλότερες συχνότητες να περάσουν, αποκόποντας τις χαμηλές συχνότητες. Άρα μόνο οι συχνότητες του $x(t)$ με απόλυτη τιμή άνω των 200 επιτρέπονται να περάσουν. Κάθε k -οστή συνιστώσα του $x(t)$ έχει συχνότητα $k\omega_0 = k\pi$, οπότε θέλομε όλα τα k για τα οποία ισχύει $|k\omega_0| > 200 \Rightarrow |k|\pi > 200 \Rightarrow |k| > \frac{200}{\pi} \approx 63.662 \Rightarrow |k| \geq 64$. Άρα $y(t) = \sum_{|k| \geq 64} a_k e^{jk\pi t}$

2ο Θέμα

Έστω η απόκριση συχνότητας ενός ΓΧΑ συστήματος:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 4y(t) = x(t)$$

(α) Υπολογίστε την απόκριση συχνότητας του συστήματος, βάσει του μετασχηματισμού Fourier.

(β) Υπολογίστε την κρουστική απόκριση.

$$\text{Υπόδειξη: } \alpha) \mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0, \quad \beta) \mathcal{F}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n X(\omega)$$

Λύση 2ου Θέματος

1ο ερώτημα

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 4y(t) = x(t) &\Rightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 4y(t)\right\} = \mathcal{F}\{x(t)\} \Rightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} + 5\mathcal{F}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + \\ 4\mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} &\xrightarrow{\text{Υπόδειξη } \beta)} (j\omega)^2 Y(\omega) + 5(j\omega)^1 Y(\omega) + 4Y(\omega) = X(\omega) \Rightarrow ((j\omega)^2 + 5(j\omega)^1 + 4) Y(\omega) = \\ X(\omega) &\Rightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2 + 5(j\omega)^1 + 4} \end{aligned}$$

2ο ερώτημα

$$\begin{aligned} H(\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 + 5(j\omega)^1 + 4} &\Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)(j\omega + 4)} \Rightarrow H(\omega) = \frac{A}{j\omega + 1} + \frac{B}{j\omega + 4} \Rightarrow H(\omega) = \\ \frac{A(j\omega + 4) + B(j\omega + 1)}{(j\omega + 1)(j\omega + 4)} &\Rightarrow H(\omega) = \frac{j\omega(A + B) + (4A + B)}{(j\omega + 1)(j\omega + 4)} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 4A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + (A + B) = 1 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} A + B = 0 \\ 3A = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -A = -\frac{1}{3} \\ A = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{3} \frac{1}{j\omega + 1} - \frac{1}{3} \frac{1}{j\omega + 4} \xrightarrow{\text{Υπόδειξη } \alpha)} \\ h(t) = \frac{1}{3} e^{-t} u(t) - \frac{1}{3} e^{-4t} u(t) \end{aligned}$$

3ο Θέμα

Βρείτε αν τα παρακάτω σήματα είναι ισχύος ή όχι:

(α) $x(t) = tu(t) - tu(10 - t)$

(β) $x(n) = e^{-jn}u(n)$

• Υπόδειξη: α) $x(t) \Rightarrow P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$, β) $x(n) \Rightarrow P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$

Λύση 3ου Θέματος

1ο ερώτημα

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |tu(t) - tu(10 - t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (t^2 u^2(t) - 2t^2 u(t)u(10 - t) + t^2 u^2(10 - t)) dt.$$

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow u(10 - t) = \begin{cases} 1, & 10 - t \geq 0 \\ 0, & 10 - t < 0 \end{cases} \Rightarrow u(10 - t) = \begin{cases} 1, & 10 \geq t \\ 0, & 10 < t \end{cases} \Rightarrow P_x =$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (t^2 u^2(t) - 2t^2 u(t)u(10 - t) + t^2 u^2(10 - t)) dt =$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(\int_{-T}^T t^2 u^2(t) dt - 2 \int_{-T}^T t^2 u(t)u(10 - t) dt + \int_{-T}^T t^2 u^2(10 - t) dt \right) =$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(\int_0^T t^2 dt - 2 \int_0^{10} t^2 dt + \int_{-T}^{10} t^2 dt \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(\left[\frac{t^3}{3} \right]_0^T - 2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{10} + \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-T}^{10} \right) =$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(\left[\frac{t^3}{3} \right]_0^T - 2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{10} + \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-T}^{10} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left(\left[\frac{T^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] - 2 \left[\frac{10^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] + \left[\frac{10^3}{3} - \frac{(-T)^3}{3} \right] \right) =$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{2T^3 - 10^3}{3} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2T^3 - 10^3}{6T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2T^3}{6T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T^2}{3} = \infty, \text{ οπότε δεν είναι σήμα ισχύος.}$$

2ο ερώτημα

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N |x(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N |e^{-jn}u(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=0}^N |e^{-jn}|^2 \xrightarrow[\forall \theta \in \mathbb{R}]{|e^{j\theta}|=1}$$

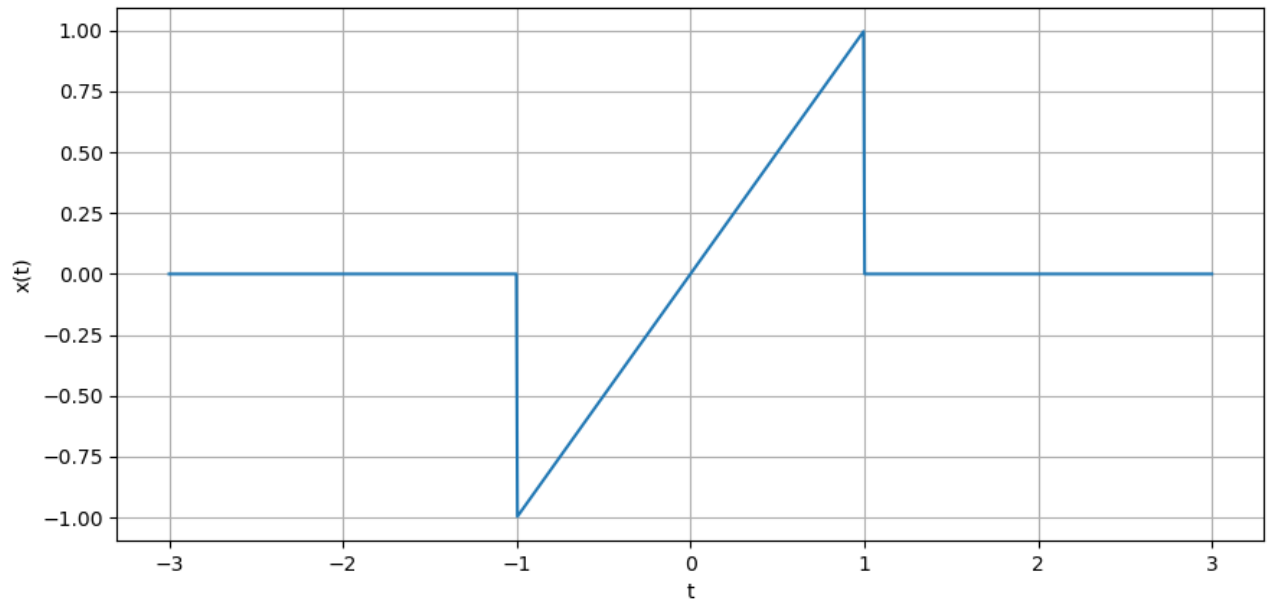
$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=0}^N 1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} (N + 1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N + 1}{2N + 1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2N} = \frac{1}{2} < \infty, \text{ οπότε το σήμα είναι ισχύος}$$

4ο Θέμα

Έστω σήμα $x(t)$ του οποίου η γραφική παράσταση είναι στην επόμενη σελίδα.

(α) Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των σημάτων $x(-t/2)$, $2x(2 - t)$, $\frac{1}{4}x(3t - 1)$

(β) Βρείτε με γραφικό τρόπο την συνέλιξη $x(t) * u(t)$



Λύση 4ου Θέματος

1ο ερώτημα

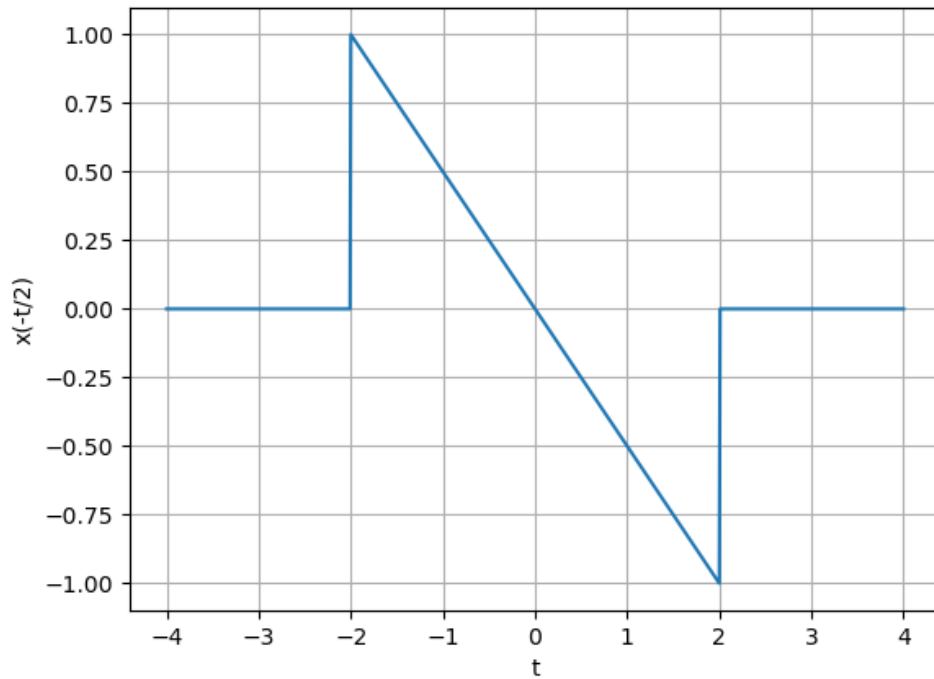
Από το σχήμα προκύπτει ότι $x(t) = \begin{cases} t, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$, βάσει του οποίου ελέγχουμε και τα υπόλοιπα σήματα.

$$\begin{aligned} \bullet \quad x(t) &= \begin{cases} t, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow x\left(-\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} -\frac{t}{2}, & -1 \leq -\frac{t}{2} \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow x\left(-\frac{t}{2}\right) = \begin{cases} -\frac{t}{2}, & -2 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \\ \bullet \quad x(t) &= \begin{cases} t, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow x(2-t) = \begin{cases} 2-t, & -1 \leq 2-t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow x(2-t) = \begin{cases} 2-t, & -1 \leq t-2 \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow \\ x(2-t) &= \begin{cases} 2-t, & 1 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \Rightarrow 2x(2-t) = \begin{cases} 2(2-t), & 1 \leq t \leq 3 \\ 2 \cdot 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \begin{cases} 4-2t, & 1 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \end{aligned}$$

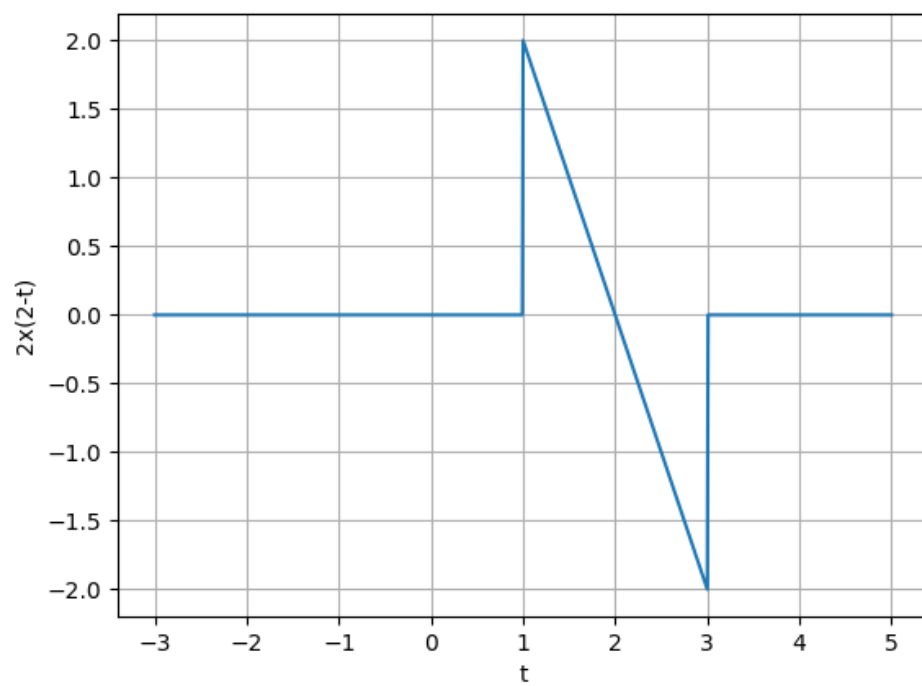
$$\bullet x(t) = \begin{cases} t, & -1 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{άλλού} \end{cases} \Rightarrow x(3t-1) = \begin{cases} 3t-1, & -1 \leq 3t-1 \leq 1 \\ 0, & \text{άλλού} \end{cases} \Rightarrow x(3t-1) = \begin{cases} 3t-1, & 0 \leq 3t \leq 2 \\ 0, & \text{άλλού} \end{cases} \Rightarrow$$

$$x(3t-1) = \begin{cases} 3t-1, & 0 \leq t \leq \frac{2}{3} \\ 0, & \text{άλλού} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3}x(3t-1) = \begin{cases} \frac{3t-1}{4}, & 0 \leq t \leq \frac{2}{3} \\ 0, & \text{άλλού} \end{cases}$$

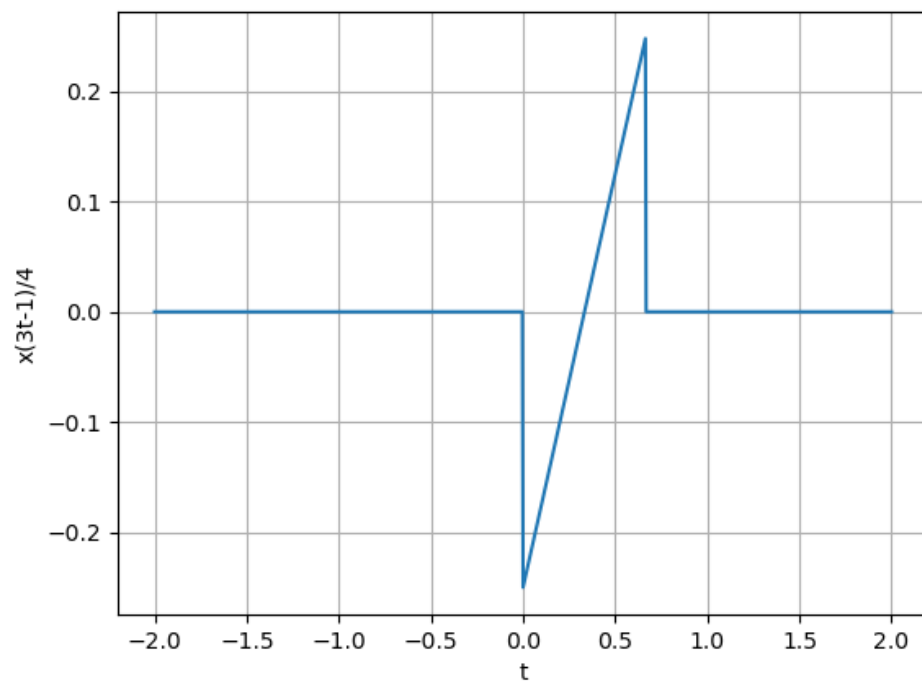
Παρακάτω είναι οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.



Σχήμα 1: Σήμα 1ο



Σχήμα 2: Σήμα 2ο

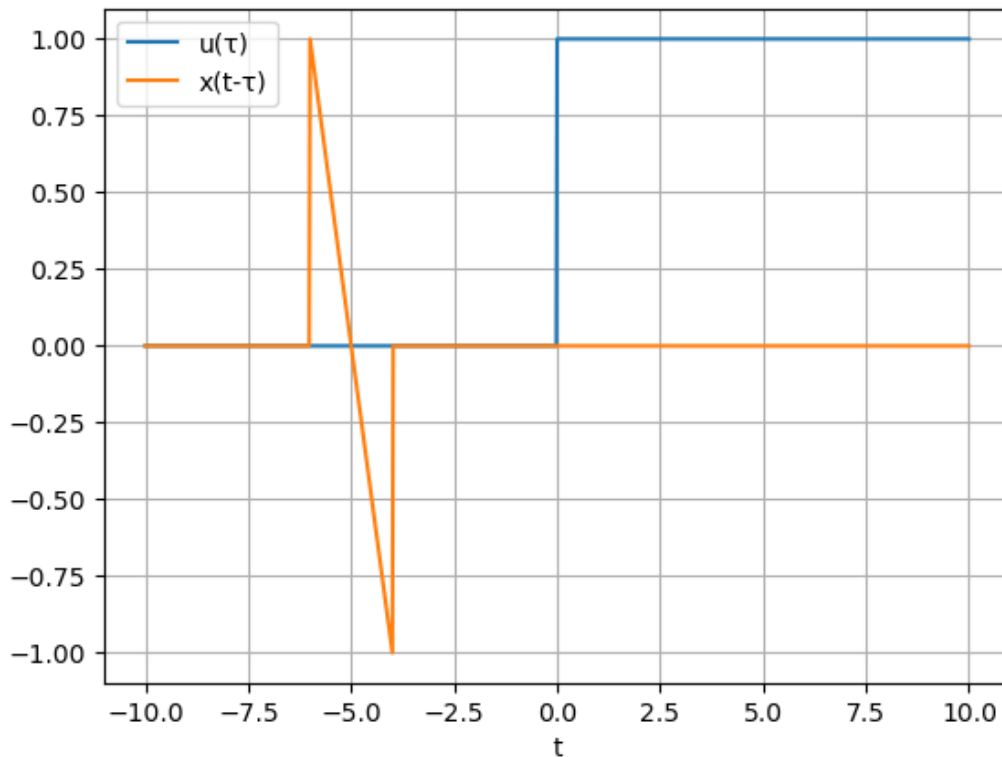


Σχήμα 3: Σήμα 3ο

2ο ερώτημα

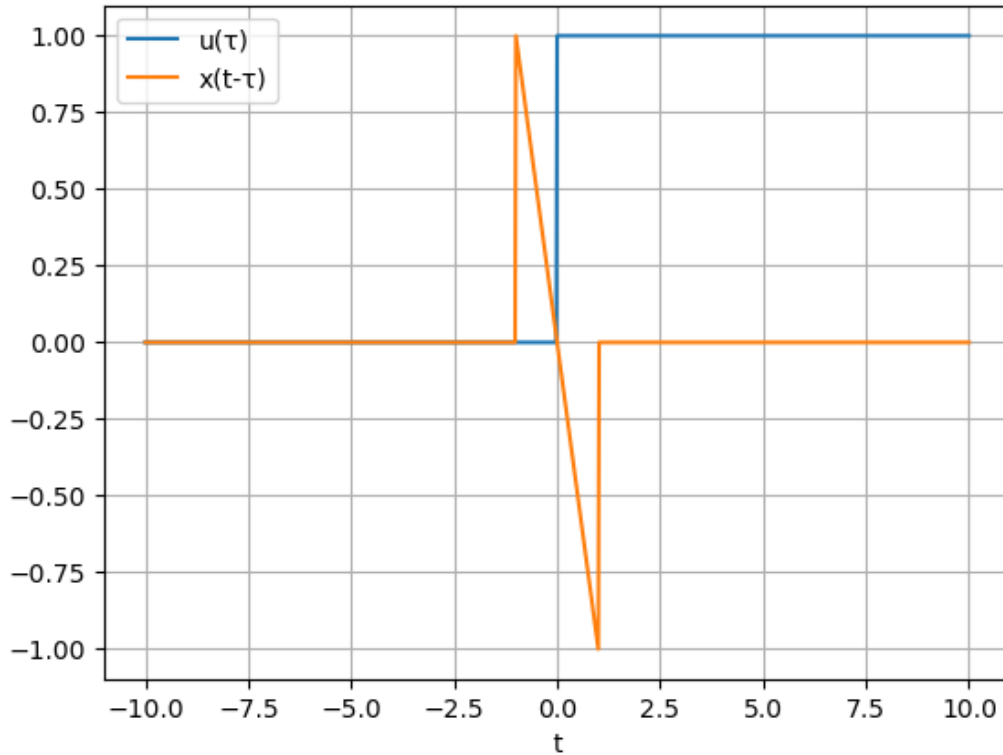
$$x(t)*u(t) = u(t)*x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^0 0 \cdot x(t-\tau)d\tau + \int_0^{\infty} 1 \cdot x(t-\tau)d\tau = \int_0^{\infty} x(t-\tau)d\tau.$$

Από εδώ προκύπτουν 3 περιπτώσεις.



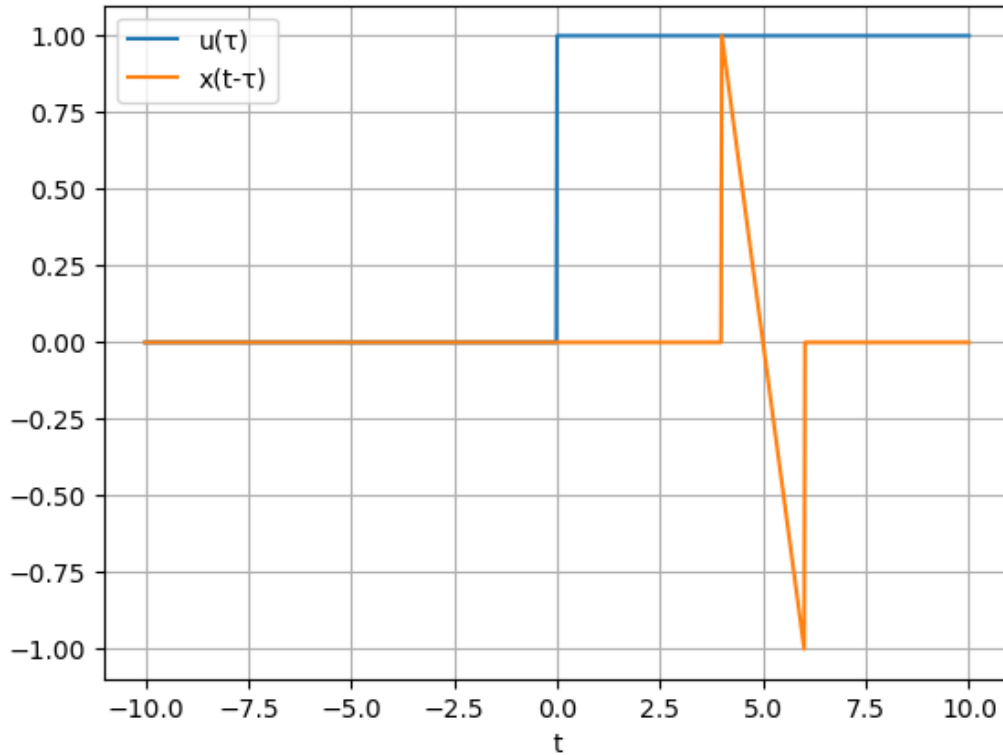
Σχήμα 4: Περίπτωση 1η

Στην πρώτη περίπτωση, η υπο ολοκλήρωση ποσότητα $x(t - \tau)$ που βρίσκεται στην περιοχή όπου $u(\tau) = 1$ είναι ίση με μηδέν. Για να είναι η ποσότητα $x(t - \tau)$ ίση με 0 για κάθε $\tau > 0$, θα πρέπει $t - \tau < -1 \Rightarrow t < -1 + \tau < -1 + 0 = -1$. Άρα, $\int_0^{\infty} x(t - \tau)d\tau = 0, \forall t < -1$



Σχήμα 5: Περίπτωση 2η

Στην δεύτερη περίπτωση, η υπο ολοκλήρωση ποσότητα $x(t - \tau)$ που βρίσκεται στην περιοχή όπου $u(\tau) = 1$ έχει μέρος της μη μηδενικής περιοχής της $x(t - \tau)$. Για να είναι η ποσότητα $x(t - \tau)$ ίση με $t - \tau$ για κάθε $\tau > 0$, θα πρέπει $-1 \leq t - \tau \leq 1 \Rightarrow -1 + \tau \leq t \leq 1 + \tau \Rightarrow -1 \leq t \leq 1$. Άρα, $\int_0^\infty x(t - \tau) d\tau = \int_0^{t+1} (t - \tau) d\tau + \int_{t+1}^\infty 0 d\tau = \int_0^{t+1} (t - \tau) d\tau = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2} \right]_0^{t+1} = \left[t(t+1) - \frac{(t+1)^2}{2} \right] - \left[0 \cdot t - \frac{0^2}{2} \right] = t^2 + t - \frac{t^2}{2} - t - \frac{1}{2} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}$



Σχήμα 6: Περίπτωση 3η

Στην τρίτη περίπτωση, η υπο ολοκλήρωση ποσότητα $x(t-\tau)$ που βρίσκεται στην περιοχή όπου $u(\tau) = 1$ έχει όλη την μη μηδενική περιοχή της εκεί. Για $t > 1$, θα ισχύει $\int_0^\infty x(t-\tau)d\tau = \int_0^{t-1} x(t-\tau)d\tau + \int_{t-1}^{t+1} x(t-\tau)d\tau + \int_{t+1}^\infty x(t-\tau)d\tau = \int_0^{t-1} 0d\tau + \int_{t-1}^{t+1} (t-\tau)d\tau + \int_{t+1}^\infty 0d\tau = \int_{t-1}^{t+1} (t-\tau)d\tau = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2} \right]_{t-1}^{t+1} = \left[t(t+1) - \frac{(t+1)^2}{2} \right] - \left[t(t-1) - \frac{(t-1)^2}{2} \right] = \left[t^2 + t - \frac{t^2 + 2t + 1}{2} \right] - \left[t^2 - t - \frac{t^2 - 2t + 1}{2} \right] = \frac{t^2 - 1}{2} - \frac{t^2 - 1}{2} = 0$

5ο Θέμα

Έστω αιτιατό ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου το οποίο έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+3)}$$

και σήμα εισόδου $x(t)$ με μετασχηματισμό Laplace:

$$X(s) = \frac{1}{s-1}$$

- Να βρεθεί η κρουστική απόκριση. Είναι το σύστημα ευσταθές;
- Να βρεθεί η έξοδος $y(t)$ για όλα τα πιθανά πεδία σύγκλισης του $X(s)$.

Υπόδειξη: α) $\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}[s] > -a$ β) $\mathcal{L}\{-e^{-at}u(-t)\} = \frac{1}{s+a}, \operatorname{Re}[s] < -a$, γ)
 $y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(s) = X(s)H(s), R_y = R_x \cap R_h$

Λύση 5ου Θέματος

1ο ερώτημα

Η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ έχει 2 πόλους: -3 και -1. Άρα τα υποψήφια πεδία σύγκλισης είναι 3:

- $\mathbf{R}[s] = \{s : \operatorname{Re}[s] < -3\}$
- $\mathbf{R}[s] = \{s : -3 < \operatorname{Re}[s] < -1\}$
- $\mathbf{R}[s] = \{s : \operatorname{Re}[s] > -1\}$

Δεδομένου ότι είναι αιτιατό θα πρέπει να περιλαμβάνει το ημιεπίπεδο όπου τα s έχουν θετικό πραγματικό μέρος, οπότε η υποψήφια που ικανοποιεί τον περιορισμό του αιτιατού είναι $\mathbf{R}[s] = \{s : \operatorname{Re}[s] > -1\}$. Επειδή μάλιστα περιλαμβάνει και την τιμή $s = 0$, τότε το σύστημα περιλαμβάνει τον φανταστικό άξονα οπότε είναι και ευσταθές.

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} = \frac{A(s+3) + B(s+1)}{(s+1)(s+3)} = \frac{s(A+B) + (3A+B)}{(s+1)(s+3)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 3A+B=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+(A+B)=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ 2A+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=1-A \\ 2A=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=1-(-1)=2 \end{cases} \Rightarrow H(s) =$$

$$-\frac{1}{s+1} + 2\frac{1}{s+3} \xrightarrow{\text{Υπόδειξη α)}} h(t) = -e^{-t}u(t) + 2e^{-3t}u(t)$$

2ο ερώτημα

Το σήμα εξόδου θα είναι $y(t)$ με μετασχηματισμό Laplace $Y(s) = X(s)H(s) = \frac{1}{s-1} \frac{s-1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$ με περιοχή σύγκλισης $R_y = R_x \cap R_h$. Ο μετασχηματισμός Laplace $X(s) = \frac{1}{s-1}$ έχει 2 πιθανές περιοχές σύγκλισης:

- $\mathbf{R}[s] = \{s : \operatorname{Re}[s] < 1\} \Rightarrow R_y = R_x \cap R_h = \{s : -1 < \operatorname{Re}[s] < 1\}$
- $\mathbf{R}[s] = \{s : \operatorname{Re}[s] > 1\} \Rightarrow R_y = R_x \cap R_h = \{s : \operatorname{Re}[s] > 1\}$

Επειδή οι πόλοι είναι -1 και -3, έχουμε 3 υποψήφια πεδία σύγκλισης :

- $\mathbf{R}[s] = \{s : \operatorname{Re}[s] < -3\}$

- $\mathbf{R}[s] = \{s : -3 < \text{Re}[s] < -1\}$

- $\mathbf{R}[s] = \{s : \text{Re}[s] > -1\}$

Το τελευταίο υποψήφιο πεδίο συγκλίσεως ταιριάζει και με τις 2 πιθανές μορφές του σήματος $y(t)$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } Y(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} = \frac{A(s+3) + B(s+1)}{(s+1)(s+3)} = \frac{s(A+B) + (3A+B)}{(s+1)(s+3)} \Rightarrow \\ \begin{cases} A+B=0 \\ 3A+B=1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+(A+B)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+0=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ 2A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/2 \\ B=-1/2 \end{cases} \Rightarrow \\ Y(s) &= \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s+3} \xrightarrow{\text{Υπόδειξη } \alpha} h(t) = \frac{1}{2} e^{-t} u(t) - \frac{1}{2} e^{-3t} u(t) \end{aligned}$$

6ο Θέμα

Δεδομένης της παρακάτω διαφορικής εξίσωσης:

$$\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = e^{-t}u(t), \quad x(0) = 1 \quad (1)$$

χωρίς να βρείτε το αρχικό σήμα $x(t)$ υπολογίστε τις παρακάτω ποσότητες:

(α) μονόπλευρο Laplace του σήματος $g(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

(β) μονόπλευρο Laplace του σήματος $k(t) = [x(t-4)]'$

- Υπόδειξη: α) $\mathcal{ML}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}$, $\mathcal{Re}[s] > -a$, β) $\mathcal{ML}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s} + \int_{-\infty}^0 x(\tau) d\tau$, $R \cap \{s : \mathcal{Re}[s] > 0\}$, γ) $\int_{-\infty}^0 x(t) dt = 0$, δ) $\mathcal{ML}\{x(t-t_0)\} = e^{-st_0} X(s)$ με ίδια περιοχή σύγκλισης, ε) $\mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)$ με ίδια περιοχή σύγκλισης

Λύση του Θέματος

1ο ερώτημα

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) &= e^{-t}u(t), \quad x(0) = 1 \Rightarrow \mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)\right\} = \mathcal{ML}\{e^{-t}u(t)\}, \quad x(0) = 1 \xrightarrow{\text{Υπόδειξη } \alpha} \\ \mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + 2\mathcal{ML}\{x(t)\} &= \frac{1}{s+1}, \quad \mathcal{Re}[s] > -1 \xrightarrow{\text{Υπόδειξη } \epsilon} sX(s) - x(0) + 2X(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow \\ X(s)(s+2) &= \frac{1}{s+1} + x(0), \quad \mathcal{Re}[s] > -1 \Rightarrow X(s)(s+2) = \frac{1}{s+1} + x(0), \quad \mathcal{Re}[s] > -1 \Rightarrow X(s)(s+2) = \\ \frac{1}{s+1} + 1, \quad \mathcal{Re}[s] > -1 &\Rightarrow X(s)(s+2) = \frac{s+2}{s+1} + 1, \quad \mathcal{Re}[s] > -1 \Rightarrow X(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)}, \quad \mathcal{Re}[s] > \\ -1 &\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \mathcal{Re}[s] > -1 \end{aligned}$$

Βάσει των υποδείξεων β) και γ), προκύπτει ότι $\mathcal{ML}\{g(t)\} = \mathcal{ML}\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau\right\} = \frac{X(s)}{s} + \int_{-\infty}^0 x(\tau)d\tau = \frac{1}{s(s+1)} + 0 = \frac{1}{s(s+1)}$, $\mathcal{Re}[s] = [\mathcal{Re}[s] > -1] \cap [\mathcal{Re}[s] > 0] = \mathcal{Re}[s] > 0$

2ο ερώτημα

Αρχικά μπορούμε να βρούμε τον μετασχηματισμό Laplace τη παραγώγου του $x(t)$. Βάσει της υποδείξεως ε), ισχύει ότι $\mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0) = s\frac{1}{s+1} - 1 = \frac{s - (s+1)}{s+1} = -\frac{1}{s+1}$, $\mathcal{Re}[s] > -1$.

Άρα το σήμα $k(t)$, το οποίο είναι η μετατοπισμένη κατά 4 χρονικές στιγμές παράγωγος του $x(t)$, θα έχει, βάσει της υποδείξεως δ) μονόπλευρο μετασχηματισμό Laplace, $\mathcal{ML}\{k(t)\} = \mathcal{ML}\{x'(t-4)\} = e^{-4s}\mathcal{ML}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = -\frac{e^{-4s}}{s+1}$, $\mathcal{Re}[s] > -1$.