Συνέλιξη

Κ.Σπανάκης

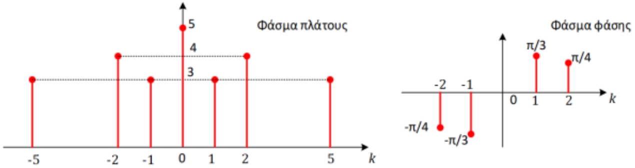
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχ/κών και Μηχ/κών Η/Υ

kspan@ics.forth.gr

1. Ασκήσεις

Άσκηση 1η

- Σας δίνεται το φάσμα πλάτους και φάσης ενός περιοδικού σήματος με περίοδο $T_0 = 0.002s$



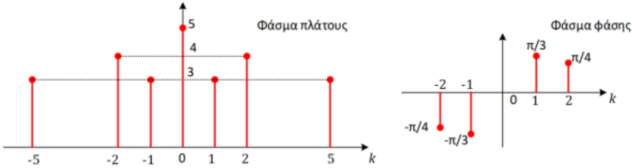
Άσκηση 1η

- Σας δίνεται το φάσμα πλάτους και φάσης ενός περιοδικού σήματος με περίοδο $T_0 = 0.002s$

- Να βρεθούν η θεμελιώδης συχνότητα ω_0 η ισχύς του σήματος

Άσκηση 1η

- Σας δίνεται το φάσμα πλάτους και φάσης ενός περιοδικού σήματος με περίοδο $T_0 = 0.002s$



- Να βρεθούν η θεμελιώδης συχνότητα ω_0 η ισχύς του σήματος
- Εκφράστε το περιοδικό σήμα σε εκθετική και τριγωνομετρική Σειρά Φουριερ.

Λύση 1ου ερωτήματος 1ης Άσκησης

- Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0.002}$

Λύση 1ου ερωτήματος 1ης Άσκησης

- Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0.002}$

Λύση 1ου ερωτήματος 1ης Άσκησης

- Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0.002} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\frac{2\pi}{1}}{\frac{2}{1000}}$
- Βάσει της ταυτότητας του Parseval , ισχύει ότι η ισχύς ενός περιοδικού σήματος ισούται με το άθροισμα των υψωμένων στο τετράγωνο συντελεστων Fourier του σήματος:

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k$$

Λύση 1ου ερωτήματος 1ης Άσκησης

- Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0.002} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\frac{2\pi}{1}}{\frac{2}{1000}}$
- Βάσει της ταυτότητας του Parseval , ισχύει ότι η ισχύς ενός περιοδικού σήματος ισούται με το άθροισμα των υψωμένων στο τετράγωνο συντελεστων Fourier του σήματος:

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k$$

- Άρα η ισχύς του δεδομένου σήματος θα είναι $P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=-5}^{5} \alpha_k =$ $\alpha_{-5}^2 + \alpha_{-2}^2 + \alpha_{-1}^2 + \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_5^2$

Λύση 1ου ερωτήματος 1ης Άσκησης

- Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0.002} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\frac{2\pi}{1}}{\frac{2}{1000}}$
- Βάσει της ταυτότητας του Parseval , ισχύει ότι η ισχύς ενός περιοδικού σήματος ισούται με το άθροισμα των υψωμένων στο τετράγωνο συντελεστων Fourier του σήματος:

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k$$

- Άρα η ισχύς του δεδομένου σήματος θα είναι $P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=-5}^{5} \alpha_k =$

$\alpha_{-5}^2 + \alpha_{-2}^2 + \alpha_{-1}^2 + \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_5^2$

Λύση 1ου ερωτήματος 1ης Άσκησης

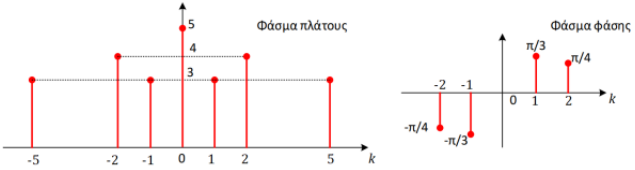
- Η θεμελιώδης συχνότητα είναι $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0.002} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\frac{2\pi}{1}}{\frac{2}{1000}}$
- Βάσει της ταυτότητας του Parseval , ισχύει ότι η ισχύς ενός περιοδικού σήματος ισούται με το άθροισμα των υψωμένων στο τετράγωνο συντελεστων Fourier του σήματος:

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k$$

- Άρα η ισχύς του δεδομένου σήματος θα είναι $P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=-5}^{5} \alpha_k =$ $\alpha_{-5}^2 + \alpha_{-2}^2 + \alpha_{-1}^2 + \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_5^2 \Rightarrow P_x = 3^2 + 4^2 + 3^2 + 5^2 + 3^2 + 4^2 + 3^2 = 93$

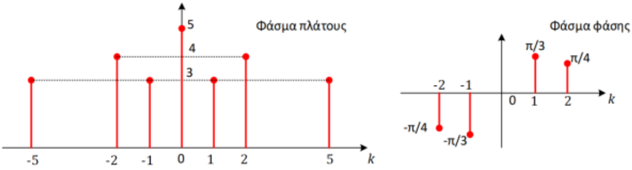
Λύση 2ου ερωτήματος 1ης Άσκησης

- Βάσει του φάσματος πλάτους και φάσης του περιοδικού σήματοςκαθώς και της θεμελιώδους συχνότητας $\omega_0 = 1000\pi$, θα κατασκευαστεί η εκθετική σειρά Fourier.



Λύση 2ου ερωτήματος 1ης Άσκησης

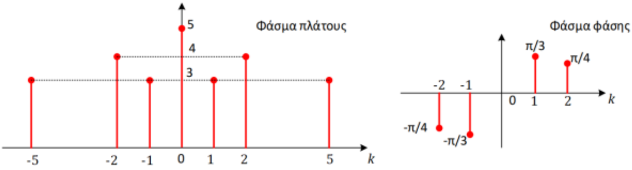
- Βάσει του φάσματος πλάτους και φάσης του περιοδικού σήματοςκαθώς και της θεμελιώδους συχνότητας $\omega_0 = 1000\pi$, θα κατασκευαστεί η εκθετική σειρά Fourier.



- Άρα $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j(k\omega_0 t + \phi_k)}$

Λύση 2ου ερωτήματος 1ης Άσκησης

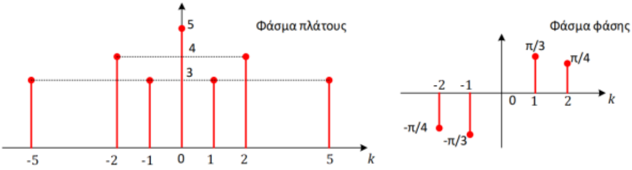
- Βάσει του φάσματος πλάτους και φάσης του περιοδικού σήματοςκαθώς και της θεμελιώδους συχνότητας $\omega_0 = 1000\pi$, θα κατασκευαστεί η εκθετική σειρά Fourier.



- Άρα $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j(k\omega_0 t + \phi_k)}$

Λύση 2ου ερωτήματος 1ης Άσκησης

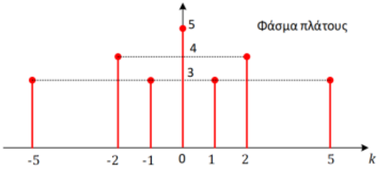
- Βάσει του φάσματος πλάτους και φάσης του περιοδικού σήματοςκαθώς και της θεμελιώδους συχνότητας $\omega_0 = 1000\pi$, θα κατασκευαστεί η εκθετική σειρά Fourier.

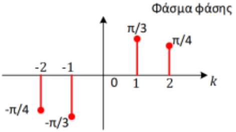


- Άρα $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j(k\omega_0 t + \phi_k)} \Rightarrow x(t) = \alpha_{-5} e^{j(-5\omega_0 t + \phi_{-5})} + \alpha_{-2} e^{j(-2\omega_0 t + \phi_{-2})} +$
$\alpha_{-5} e^{j(-\omega_0 t + \phi_{-1})} + \alpha_0 + \alpha_1 e^{j(\omega_0 t + \phi_1)} + \alpha_2 e^{j(2\omega_0 t + \phi_2)} + \alpha_5 e^{j(5\omega_0 t + \phi_5)}$

Λύση 2ου ερωτήματος 1ης Άσκησης

- Βάσει του φάσματος πλάτους και φάσης του περιοδικού σήματοςκαθώς και της θεμελιώδους συχνότητας $\omega_0 = 1000\pi$, θα κατασκευαστεί η εκθετική σειρά Fourier.





- Άρα $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{j(k\omega_0 t + \phi_k)} \Rightarrow x(t) = \alpha_{-5} e^{j(-5\omega_0 t + \phi_{-5})} + \alpha_{-2} e^{j(-2\omega_0 t + \phi_{-2})} + \alpha_{-5} e^{j(-\omega_0 t + \phi_{-1})} + \alpha_0 + \alpha_1 e^{j(\omega_0 t + \phi_1)} + \alpha_2 e^{j(2\omega_0 t + \phi_2)} + \alpha_5 e^{j(5\omega_0 t + \phi_5)} \Rightarrow x(t) = 3e^{-j5000\pi t} + 4e^{j(-2000t - \pi/4)} + 3e^{j(-1000\pi t - \pi/3)} + 5 + 3e^{j(1000\pi t + \pi/3)} + 4e^{j(2000\pi t + \pi/4)} + 3e^{j5000\pi t}$
- Η τριγωνομετρική μορφή προκύπτει βάσει συνδυασμού των όρων του εκθετικού αναπτύγματος με αντίθετες συχνότητες. Δηλαδή προστίθενται οι όροι $\alpha_k e^{j(k\omega_0 t + \phi_k)}$, $\alpha_{-k} e^{j(-k\omega_0 t + \phi_{-k})}$ για να προκύψει ο τριγωνομετρικός όρος.

Λύση 2ου ερωτήματος 1ης Άσκησης (Συνέχεια)

- $3e^{-j5000\pi t} + 3e^{j5000\pi t} = 3(e^{-j5000\pi t} + 3e^{j5000\pi t})$

Λύση 2ου ερωτήματος 1ης Άσκησης (Συνέχεια)

- $3e^{-j5000\pi t} + 3e^{j5000\pi t} = 3(e^{-j5000\pi t} + 3e^{j5000\pi t})$

Λύση 2ου ερωτήματος 1ης Άσκησης (Συνέχεια)

- $3e^{-j5000\pi t} + 3e^{j5000\pi t} = 3(e^{-j5000\pi t} + 3e^{j5000\pi t}) \xRightarrow{e^{jk}+e^{-jk}=2\cos(k)}$
  $3e^{-j5000\pi t} + 3e^{j5000\pi t} = 3 \cdot 2\cos(5000\pi t) = 6\cos(5000\pi t)$
- Ομοίως προκύπτει ότι:

Λύση 2ου ερωτήματος 1ης Άσκησης (Συνέχεια)

- $3e^{-j5000\pi t} + 3e^{j5000\pi t} = 3(e^{-j5000\pi t} + 3e^{j5000\pi t}) \xRightarrow{e^{jk}+e^{-jk}=2\cos(k)}$
  $3e^{-j5000\pi t} + 3e^{j5000\pi t} = 3 \cdot 2\cos(5000\pi t) = 6\cos(5000\pi t)$
- Ομοίως προκύπτει ότι:
  - $4e^{j(-2000t-\pi/4)} + 4e^{j(2000\pi t+\pi/4)} = 4 \cdot 2\cos(2000\pi + \pi/4) = 8\cos(2000\pi + \pi/4)$

Λύση 2ου ερωτήματος 1ης Άσκησης (Συνέχεια)

- $3e^{-j5000\pi t} + 3e^{j5000\pi t} = 3(e^{-j5000\pi t} + 3e^{j5000\pi t}) \xRightarrow{e^{jk}+e^{-jk}=2\cos(k)}$
  $3e^{-j5000\pi t} + 3e^{j5000\pi t} = 3 \cdot 2\cos(5000\pi t) = 6\cos(5000\pi t)$
- Ομοίως προκύπτει ότι:
  - $4e^{j(-2000t-\pi/4)} + 4e^{j(2000\pi t+\pi/4)} = 4 \cdot 2\cos(2000\pi + \pi/4) = 8\cos(2000\pi + \pi/4)$
  - $3e^{j(-1000\pi t-\pi/3)} + 3e^{j(1000\pi t+\pi/3)} = 3 \cdot 2\cos(1000\pi t + \pi/3) = 6\cos(1000\pi t + \pi/3)$

Λύση 2ου ερωτήματος 1ης Άσκησης (Συνέχεια)

- $3e^{-j5000\pi t} + 3e^{j5000\pi t} = 3(e^{-j5000\pi t} + 3e^{j5000\pi t}) \xRightarrow{e^{jk}+e^{-jk}=2\cos(k)}$
  $3e^{-j5000\pi t} + 3e^{j5000\pi t} = 3 \cdot 2\cos(5000\pi t) = 6\cos(5000\pi t)$
- Ομοίως προκύπτει ότι:
  - $4e^{j(-2000t-\pi/4)} + 4e^{j(2000\pi t+\pi/4)} = 4 \cdot 2\cos(2000\pi + \pi/4) = 8\cos(2000\pi + \pi/4)$
  - $3e^{j(-1000\pi t-\pi/3)} + 3e^{j(1000\pi t+\pi/3)} = 3 \cdot 2\cos(1000\pi t + \pi/3) = 6\cos(1000\pi t + \pi/3)$
- Άρα $x(t) = 5 + 6\cos(1000\pi t + \pi/3) + 8\cos(2000\pi t + \pi/4) + 6\cos(5000\pi t)$

Άσκηση 2η

- Δίνεται το σήμα $x(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha > 0$

Άσκηση 2η

- Δίνεται το σήμα $x(t) = e^{-\alpha|t|}$, $\alpha > 0$
- Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Φουριερ και να κάνετε τη γραφική παράσταση του μετασχηματισμού Φουριερ σε συνάρτηση με τη κυκλική συχνότητα ω.

Λύση Άσκησης 2ης

- $x(t) = e^{-\alpha|t|}, \ \alpha > 0$

Λύση Άσκησης 2ης

- $x(t) = e^{-\alpha|t|}, \ \alpha > 0$

Λύση Άσκησης 2ης

- $x(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha > 0 \Rightarrow x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t},\ t \geq 0 \\ e^{\alpha t},\ t < 0 \end{cases}$

Λύση Άσκησης 2ης

- $x(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha > 0 \Rightarrow x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ e^{\alpha t}, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

Λύση Άσκησης 2ης

- $x(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha > 0 \Rightarrow x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ e^{\alpha t}, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow$
  $X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt$

Λύση Άσκησης 2ης

- $x(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha > 0 \Rightarrow x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ e^{\alpha t}, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow$
$X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) =$
$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t - j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t - j\omega t} dt$

Λύση Άσκησης 2ης

- $x(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha > 0 \Rightarrow x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ e^{\alpha t}, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow$
$X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) =$
$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t - j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t - j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - j\omega)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt$

Λύση Άσκησης 2ης

- $x(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha > 0 \Rightarrow x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ e^{\alpha t}, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow$
  $X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) =$
  $\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t - j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t - j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - j\omega)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt$
  $\xRightarrow{\int e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a} + C} X(\omega) = \left[\frac{e^{(\alpha - j\omega)t}}{(\alpha - j\omega)} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} \right]_{0}^{\infty}$

Λύση Άσκησης 2ης

- $x(t) = e^{-\alpha|t|}, \ \alpha > 0 \Rightarrow x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ e^{\alpha t}, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) =$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t - j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t - j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - j\omega)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt$$

$$\xRightarrow{\int e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a} + C} X(\omega) = \left[\frac{e^{(\alpha - j\omega)t}}{(\alpha - j\omega)} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} \right]_{0}^{\infty} X(\omega) =$$

$$\left[\frac{e^{(\alpha - j\omega)0}}{(\alpha - j\omega)} - \lim_{t \to -\infty} \frac{e^{(\alpha - j\omega)t}}{(\alpha - j\omega)} \right] + \left[\lim_{t \to \infty} \frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} - \frac{e^{-(\alpha + j\omega)0}}{-(\alpha + j\omega)} \right]$$

Λύση Άσκησης 2ης

- $x(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha > 0 \Rightarrow x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ e^{\alpha t}, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow$
$X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) =$
$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t - j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t - j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - j\omega)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt$
$\xRightarrow{\int e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a} + C} X(\omega) = \left[\frac{e^{(\alpha - j\omega)t}}{(\alpha - j\omega)} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} \right]_{0}^{\infty} X(\omega) =$
$\left[\frac{e^{(\alpha - j\omega)0}}{(\alpha - j\omega)} - \lim_{t \to -\infty} \frac{e^{(\alpha - j\omega)t}}{(\alpha - j\omega)} \right] + \left[\lim_{t \to \infty} \frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} - \frac{e^{-(\alpha + j\omega)0}}{-(\alpha + j\omega)} \right]$
$\xRightarrow[\lim_{t \to -\infty} e^{-(a+jb)t} = 0,\ \forall a > 0]{\lim_{t \to \infty} e^{(a+jb)t} = 0,\ \forall a < 0} X(\omega) = \frac{e^{(\alpha - j\omega)0}}{(\alpha - j\omega)} - \frac{e^{-(\alpha + j\omega)0}}{-(\alpha + j\omega)}$

Λύση Άσκησης 2ης

- $x(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha > 0 \Rightarrow x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ e^{\alpha t}, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow$
$X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) =$
$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t - j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t - j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - j\omega)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt$
$\xRightarrow{\int e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a} + C} X(\omega) = \left[\frac{e^{(\alpha - j\omega)t}}{(\alpha - j\omega)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)}\right]_{0}^{\infty} X(\omega) =$
$\left[\frac{e^{(\alpha - j\omega)0}}{(\alpha - j\omega)} - \lim_{t \to -\infty} \frac{e^{(\alpha - j\omega)t}}{(\alpha - j\omega)}\right] + \left[\lim_{t \to \infty} \frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} - \frac{e^{-(\alpha + j\omega)0}}{-(\alpha + j\omega)}\right]$
$\xRightarrow[\lim_{t \to -\infty} e^{-(a+jb)t} = 0,\ \forall a > 0]{\lim_{t \to \infty} e^{(a+jb)t} = 0,\ \forall a < 0} X(\omega) = \frac{e^{(\alpha - j\omega)0}}{(\alpha - j\omega)} - \frac{e^{-(\alpha + j\omega)0}}{-(\alpha + j\omega)} \Rightarrow X(\omega) =$
$\frac{1}{(\alpha - j\omega)} + \frac{1}{(\alpha + j\omega)}$

Λύση Άσκησης 2ης

- $x(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha > 0 \Rightarrow x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ e^{\alpha t}, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow$
$X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) =$
$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t - j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t - j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - j\omega)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt$
$\xRightarrow{\int e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a} + C} X(\omega) = \left[\frac{e^{(\alpha - j\omega)t}}{(\alpha - j\omega)} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} \right]_{0}^{\infty} X(\omega) =$
$\left[\frac{e^{(\alpha - j\omega)0}}{(\alpha - j\omega)} - \lim_{t \to -\infty} \frac{e^{(\alpha - j\omega)t}}{(\alpha - j\omega)} \right] + \left[\lim_{t \to \infty} \frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} - \frac{e^{-(\alpha + j\omega)0}}{-(\alpha + j\omega)} \right]$
$\xRightarrow[\lim_{t \to -\infty} e^{-(a+jb)t} = 0,\ \forall a > 0]{\lim_{t \to \infty} e^{(a+jb)t} = 0,\ \forall a < 0} X(\omega) = \frac{e^{(\alpha - j\omega)0}}{(\alpha - j\omega)} - \frac{e^{-(\alpha + j\omega)0}}{-(\alpha + j\omega)} \Rightarrow X(\omega) =$
$\frac{1}{(\alpha - j\omega)} + \frac{1}{(\alpha + j\omega)} \Rightarrow X(\omega) = \frac{(\alpha + j\omega)}{(\alpha - j\omega)(\alpha + j\omega)} + \frac{(\alpha - j\omega)}{(\alpha + j\omega)(\alpha - j\omega)}$

Λύση Άσκησης 2ης

- $x(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha > 0 \Rightarrow x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ e^{\alpha t}, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) =$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t - j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t - j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - j\omega)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt$$

$$\xRightarrow{\int e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a} + C} X(\omega) = \left[\frac{e^{(\alpha - j\omega)t}}{(\alpha - j\omega)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)}\right]_{0}^{\infty} X(\omega) =$$

$$\left[\frac{e^{(\alpha - j\omega)0}}{(\alpha - j\omega)} - \lim_{t \to -\infty} \frac{e^{(\alpha - j\omega)t}}{(\alpha - j\omega)}\right] + \left[\lim_{t \to \infty} \frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} - \frac{e^{-(\alpha + j\omega)0}}{-(\alpha + j\omega)}\right]$$

$$\xRightarrow[\lim_{t \to -\infty} e^{-(a+jb)t} = 0,\ \forall a > 0]{\lim_{t \to \infty} e^{(a+jb)t} = 0,\ \forall a < 0} X(\omega) = \frac{e^{(\alpha - j\omega)0}}{(\alpha - j\omega)} - \frac{e^{-(\alpha + j\omega)0}}{-(\alpha + j\omega)} \Rightarrow X(\omega) =$$

$$\frac{1}{(\alpha - j\omega)} + \frac{1}{(\alpha + j\omega)} \Rightarrow X(\omega) = \frac{(\alpha + j\omega)}{(\alpha - j\omega)(\alpha + j\omega)} + \frac{(\alpha - j\omega)}{(\alpha + j\omega)(\alpha - j\omega)}$$

$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{(\alpha + j\omega) + (\alpha - j\omega)}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Λύση Άσκησης 2ης

- $x(t) = e^{-\alpha|t|},\ \alpha > 0 \Rightarrow x(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t}, & t \geq 0 \\ e^{\alpha t}, & t < 0 \end{cases} \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) =$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t - j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t - j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - j\omega)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt$$

$$\xRightarrow{\int e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a} + C} X(\omega) = \left[\frac{e^{(\alpha - j\omega)t}}{(\alpha - j\omega)} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} \right]_{0}^{\infty} X(\omega) =$$

$$\left[\frac{e^{(\alpha - j\omega)0}}{(\alpha - j\omega)} - \lim_{t \to -\infty} \frac{e^{(\alpha - j\omega)t}}{(\alpha - j\omega)} \right] + \left[\lim_{t \to \infty} \frac{e^{-(\alpha + j\omega)t}}{-(\alpha + j\omega)} - \frac{e^{-(\alpha + j\omega)0}}{-(\alpha + j\omega)} \right]$$

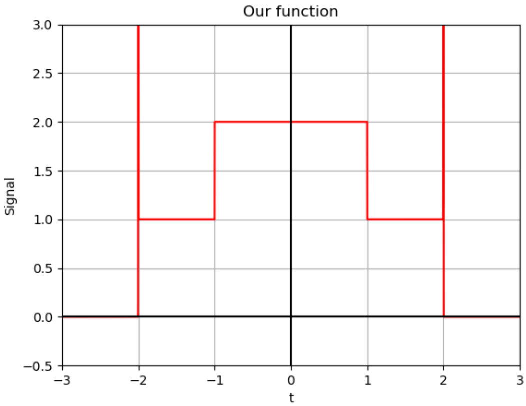
$$\xRightarrow[\lim_{t \to -\infty} e^{-(a+jb)t} = 0,\ \forall a > 0]{\lim_{t \to \infty} e^{(a+jb)t} = 0,\ \forall a < 0} X(\omega) = \frac{e^{(\alpha - j\omega)0}}{(\alpha - j\omega)} - \frac{e^{-(\alpha + j\omega)0}}{-(\alpha + j\omega)} \Rightarrow X(\omega) =$$

$$\frac{1}{(\alpha - j\omega)} + \frac{1}{(\alpha + j\omega)} \Rightarrow X(\omega) = \frac{(\alpha + j\omega)}{(\alpha - j\omega)(\alpha + j\omega)} + \frac{(\alpha - j\omega)}{(\alpha + j\omega)(\alpha - j\omega)}$$

$$\Rightarrow X(\omega) = \frac{(\alpha + j\omega) + (\alpha - j\omega)}{\alpha^2 + \omega^2} \Rightarrow X(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

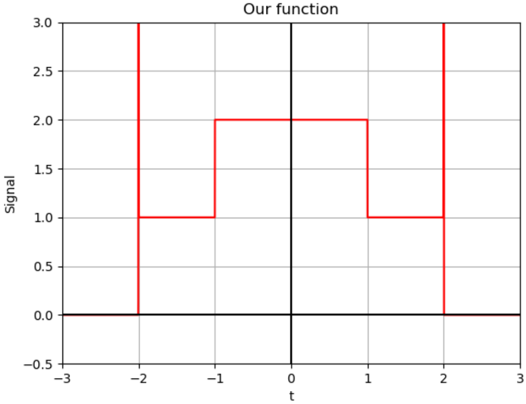
Άσκηση 3η

- Να υπολογιστούν ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t)$ με την ακόλουθη γραφική παράσταση:



Άσκηση 3η

- Να υπολογιστούν ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $x(t)$ με την ακόλουθη γραφική παράσταση:



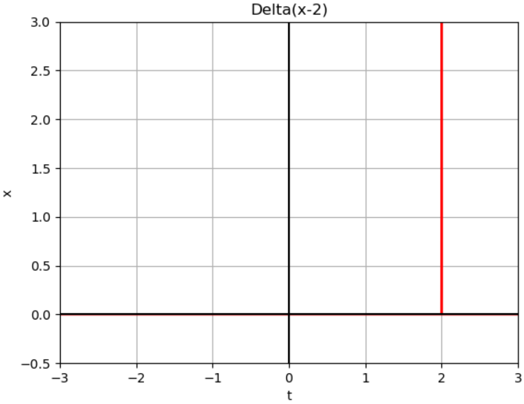
- Να βρεθεί η συνέλιξη $y(t) = x(t) * \cos(t)$

Λύση 1ου ερωτήματος

- Η παράστασή μας αποτελείται από τα εξής μέρη:

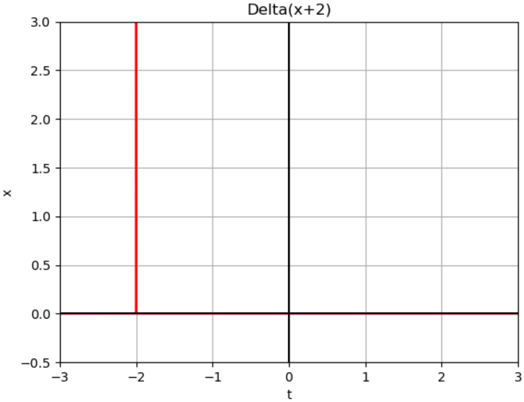
Λύση 1ου ερωτήματος

- Η παράστασή μας αποτελείται από τα εξής μέρη:



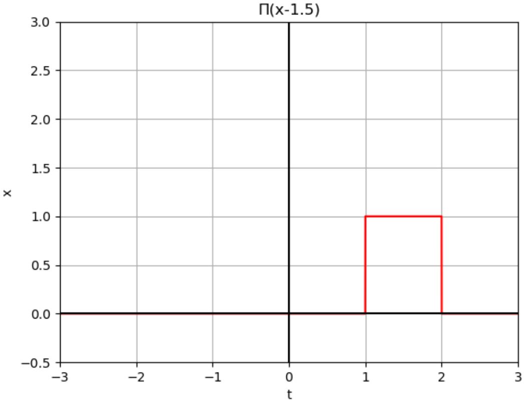
Λύση 1ου ερωτήματος

- Η παράστασή μας αποτελείται από τα εξής μέρη:



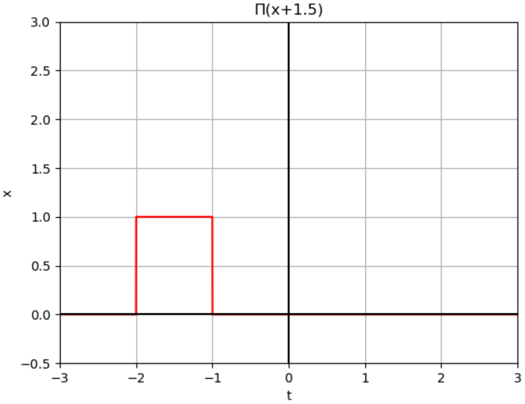
Λύση 1ου ερωτήματος

- Η παράστασή μας αποτελείται από τα εξής μέρη:



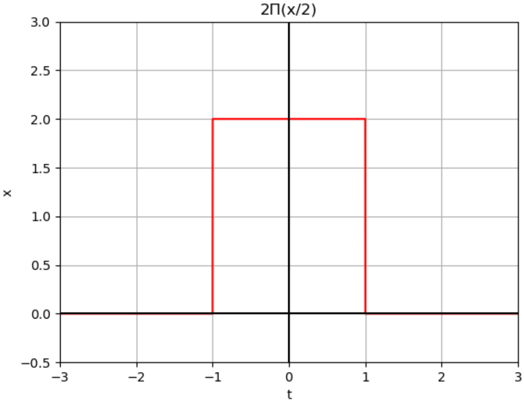
Λύση 1ου ερωτήματος

- Η παράστασή μας αποτελείται από τα εξής μέρη:



Λύση 1ου ερωτήματος

- Η παράστασή μας αποτελείται από τα εξής μέρη:



Λύση 1ου ερωτήματος

- Η αρχική συνάρτηση είναι το άθροισμα των επιμέρους συναρτήσεων όπως φαίνονται στις γραφικές παραστάσεςι εξ ων συνίσταται η αρχική γραφική παράσταση.

Λύση 1ου ερωτήματος

- Η αρχική συνάρτηση είναι το άθροισμα των επιμέρους συναρτήσεων όπως φαίνονται στις γραφικές παραστάσεςι εξ ων συνίσταται η αρχική γραφική παράσταση.
- Άρα η συνάρτηση είναι
  $x(t) = \delta(t+2) + \Pi(x+1.5) + 2\Pi(t/2) + \Pi(x-1.5) + \delta(x-2)$

Λύση 1ου ερωτήματος

- $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$

Λύση 1ου ερωτήματος

- $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

Λύση 1ου ερωτήματος

- $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta(t+2) + \Pi(t+1.5) + 2\Pi(t/2) + \Pi(t-1.5) + \delta(t-2)\right] e^{-j\omega t} dt$

Λύση 1ου ερωτήματος

- $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \Rightarrow X(\omega) =$
  $\int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta(t+2) + \Pi(t+1.5) + 2\Pi(t/2) + \Pi(t-1.5) + \delta(t-2)\right] e^{-j\omega t}dt$
  $\Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+2)e^{-j\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t+1.5)e^{-j\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} 2\Pi(t/2)e^{-j\omega t}dt +$
  $\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t-1.5)e^{-j\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2)e^{-j\omega t}dt$
- Ισχύει από θεωρία ότι $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0)$, οπότε
  $X(\omega) = e^{-j\omega(-2)} + \int_{-2}^{-1} 1 \cdot e^{-j\omega t}dt + \int_{-1}^{1} 2 \cdot e^{-j\omega t}dt + \int_{1}^{2} 1 \cdot e^{-j\omega t}dt + e^{-j\omega \cdot 2}$

Λύση 1ου ερωτήματος

- $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) =$
  $\int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta(t+2) + \Pi(t+1.5) + 2\Pi(t/2) + \Pi(t-1.5) + \delta(t-2)\right] e^{-j\omega t} dt$
  $\Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+2) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t+1.5) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} 2\Pi(t/2) e^{-j\omega t} dt +$
  $\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t-1.5) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2) e^{-j\omega t} dt$
- Ισχύει από θεωρία ότι $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$, οπότε
  $X(\omega) = e^{-j\omega(-2)} + \int_{-2}^{-1} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_{-1}^{1} 2 \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_{1}^{2} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt + e^{-j\omega \cdot 2}$
- Ισχύει ότι $\int e^{\alpha t} = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}$ οπότε ισχύει:

Λύση 1ου ερωτήματος

- $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \Rightarrow X(\omega) =$
  $\int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta(t+2) + \Pi(t+1.5) + 2\Pi(t/2) + \Pi(t-1.5) + \delta(t-2)\right] e^{-j\omega t}dt$
  $\Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+2)e^{-j\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t+1.5)e^{-j\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} 2\Pi(t/2)e^{-j\omega t}dt +$
  $\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t-1.5)e^{-j\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2)e^{-j\omega t}dt$
- Ισχύει από θεωρία ότι $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0)$, οπότε
  $X(\omega) = e^{-j\omega(-2)} + \int_{-2}^{-1} 1 \cdot e^{-j\omega t}dt + \int_{-1}^{1} 2 \cdot e^{-j\omega t}dt + \int_{1}^{2} 1 \cdot e^{-j\omega t}dt + e^{-j\omega \cdot 2}$
- Ισχύει ότι $\int e^{\alpha t} = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}$ οπότε ισχύει:

Λύση 1ου ερωτήματος

- $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow X(\omega) =$
$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta(t+2) + \Pi(t+1.5) + 2\Pi(t/2) + \Pi(t-1.5) + \delta(t-2)\right] e^{-j\omega t} dt$
$\Rightarrow X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+2) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t+1.5) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} 2\Pi(t/2) e^{-j\omega t} dt +$
$\int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t-1.5) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2) e^{-j\omega t} dt$
- Ισχύει από θεωρία ότι $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) f(t) dt = f(t_0)$, οπότε
$X(\omega) = e^{-j\omega(-2)} + \int_{-2}^{-1} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_{-1}^{1} 2 \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_{1}^{2} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt + e^{-j\omega \cdot 2}$
- Ισχύει ότι $\int e^{\alpha t} = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}$ οπότε ισχύει:
$X(\omega) = e^{j2\omega} + \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-2}^{-1} + 2\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{1}^{2} + e^{-j2\omega} \Rightarrow$

Λύση 1ου ερωτήματος

- $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \Rightarrow X(\omega)=$
$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\delta(t+2)+\Pi(t+1.5)+2\Pi(t/2)+\Pi(t-1.5)+\delta(t-2)\right]e^{-j\omega t}dt$
$\Rightarrow X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t+2)e^{-j\omega t}dt+\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(t+1.5)e^{-j\omega t}dt+\int_{-\infty}^{\infty}2\Pi(t/2)e^{-j\omega t}dt+$
$\int_{-\infty}^{\infty}\Pi(t-1.5)e^{-j\omega t}dt+\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-2)e^{-j\omega t}dt$
- Ισχύει από θεωρία ότι $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$, οπότε
$X(\omega)=e^{-j\omega(-2)}+\int_{-2}^{-1}1\cdot e^{-j\omega t}dt+\int_{-1}^{1}2\cdot e^{-j\omega t}dt+\int_{1}^{2}1\cdot e^{-j\omega t}dt+e^{-j\omega\cdot 2}$
- Ισχύει ότι $\int e^{\alpha t}=\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}$ οπότε ισχύει:
$X(\omega)=e^{j2\omega}+\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-2}^{-1}+2\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{1}^{2}+e^{-j2\omega}\Rightarrow$
$X(\omega)=\left(e^{j2\omega}+e^{-j2\omega}\right)+\left[\frac{e^{j\omega}}{-j\omega}-\frac{e^{j2\omega}}{-j\omega}\right]+2\left[\frac{e^{-j\omega}}{-j\omega}-\frac{e^{j\omega}}{-j\omega}\right]+\left[\frac{e^{-j2\omega}}{-j\omega}-\frac{e^{-j\omega}}{-j\omega}\right]$

Λύση 1ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $\Rightarrow X(\omega) = \left(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}\right) - \frac{1}{j\omega}\left[e^{j\omega} - e^{j2\omega} + 2e^{-j\omega} - 2e^{j\omega} + e^{-j2\omega} - e^{-j\omega}\right] \Rightarrow$

Λύση 1ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $\Rightarrow X(\omega) = \left(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}\right) - \frac{1}{j\omega}\left[e^{j\omega} - e^{j2\omega} + 2e^{-j\omega} - 2e^{j\omega} + e^{-j2\omega} - e^{-j\omega}\right] \Rightarrow$

Λύση 1ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $\Rightarrow X(\omega) = \left(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}\right) - \frac{1}{j\omega}\left[e^{j\omega} - e^{j2\omega} + 2e^{-j\omega} - 2e^{j\omega} + e^{-j2\omega} - e^{-j\omega}\right] \Rightarrow$
  $X(\omega) = \left(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}\right) + \frac{1}{j\omega}\left[e^{j2\omega} - e^{-j2\omega} + e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right] \Rightarrow$

Λύση 1ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $\Rightarrow X(\omega) = \left(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}\right) - \frac{1}{j\omega}\left[e^{j\omega} - e^{j2\omega} + 2e^{-j\omega} - 2e^{j\omega} + e^{-j2\omega} - e^{-j\omega}\right] \Rightarrow$
  $X(\omega) = \left(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}\right) + \frac{1}{j\omega}\left[e^{j2\omega} - e^{-j2\omega} + e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right] \Rightarrow$
  $X(\omega) = \left(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}\right) + \frac{1}{j\omega}\left[e^{j2\omega} - e^{-j2\omega}\right] + \frac{1}{j\omega}\left[e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right]$
- Ισχύει από θεωρία ότι $\cos t = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$, $\sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$, οπότε
  $X(\omega) = 2\cos 2\omega + \frac{2}{\omega}\sin 2\omega + \frac{2}{\omega}\sin\omega$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $y(t) = x(t) * \cos(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cos(t-\tau) d\tau \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $y(t) = x(t) * \cos(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $y(t) = x(t) * \cos(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) =$
  $\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau+2) + \Pi(\tau+1.5) + 2\Pi(t/2) + \Pi(\tau-1.5) + \delta(\tau-2)]\cos(t-\tau)d\tau$
- Από εδώ μπορεί κανείς να προχωρήσει με 2 τρόπους:

Λύση 2ου ερωτήματος

- $y(t) = x(t) * \cos(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau+2) + \Pi(\tau+1.5) + 2\Pi(t/2) + \Pi(\tau-1.5) + \delta(\tau-2)]\cos(t-\tau)d\tau$
- Από εδώ μπορεί κανείς να προχωρήσει με 2 τρόπους:
  - Να λύσει απευθείας το ολοκλήρωμα.

Λύση 2ου ερωτήματος

- $y(t) = x(t) * \cos(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau+2) + \Pi(\tau+1.5) + 2\Pi(t/2) + \Pi(\tau-1.5) + \delta(\tau-2)]\cos(t-\tau)d\tau$
- Από εδώ μπορεί κανείς να προχωρήσει με 2 τρόπους:
  - Να λύσει απευθείας το ολοκλήρωμα.
  - Να χρησιμοποιήσει την ιδιότητα: $\cos(t) = \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2} \xRightarrow{t \leftarrow t-\tau} \cos(t-\tau) = \frac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}$. Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα όπου $\cos(t-\tau) =$ με το $\frac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}$, προκύπτουν τα εξής: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left(\frac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}\right)d\tau \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $y(t) = x(t) * \cos(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau+2) + \Pi(\tau+1.5) + 2\Pi(t/2) + \Pi(\tau-1.5) + \delta(\tau-2)]\cos(t-\tau)d\tau$
- Από εδώ μπορεί κανείς να προχωρήσει με 2 τρόπους:
  - Να λύσει απευθείας το ολοκλήρωμα.
  - Να χρησιμοποιήσει την ιδιότητα: $\cos(t) = \dfrac{e^{jt}+e^{-jt}}{2} \xRightarrow{t \leftarrow t-\tau} \cos(t-\tau) = \dfrac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}$. Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα όπου $\cos(t-\tau) =$ με το $\dfrac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}$, προκύπτουν τα εξής: $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left(\dfrac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}\right)d\tau \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $y(t) = x(t) * \cos(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) =$
$\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau+2) + \Pi(\tau+1.5) + 2\Pi(t/2) + \Pi(\tau-1.5) + \delta(\tau-2)]\cos(t-\tau)d\tau$
- Από εδώ μπορεί κανείς να προχωρήσει με 2 τρόπους:
  - Να λύσει απευθείας το ολοκλήρωμα.
  - Να χρησιμοποιήσει την ιδιότητα:
    $\cos(t) = \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2} \xRightarrow{t \leftarrow t-\tau} \cos(t-\tau) = \frac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}$. Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα όπου $\cos(t-\tau) =$ με το $\frac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}$, προκύπτουν τα εξής:
    $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left(\frac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}\right)d\tau \Rightarrow$
    $y(t) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j(t-\tau)}d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(t-\tau)}d\tau\right) \Rightarrow$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $y(t) = x(t) * \cos(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) =$
  $\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau+2) + \Pi(\tau+1.5) + 2\Pi(t/2) + \Pi(\tau-1.5) + \delta(\tau-2)]\cos(t-\tau)d\tau$
- Από εδώ μπορεί κανείς να προχωρήσει με 2 τρόπους:
  - Να λύσει απευθείας το ολοκλήρωμα.
  - Να χρησιμοποιήσει την ιδιότητα:
    $\cos(t) = \dfrac{e^{jt}+e^{-jt}}{2} \xRightarrow{t \leftarrow t-\tau} \cos(t-\tau) = \dfrac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}$. Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα όπου $\cos(t-\tau) =$ με το $\dfrac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}$, προκύπτουν τα εξής:
    $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left(\dfrac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}\right)d\tau \Rightarrow$
    $y(t) = \dfrac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j(t-\tau)}d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(t-\tau)}d\tau\right) \Rightarrow$
    $y(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{jt}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\tau}d\tau + e^{-jt}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j\tau}d\tau\right) \xRightarrow[\omega=1]{j\tau=j\omega\tau}$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $y(t) = x(t) * \cos(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) =$
$\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau+2) + \Pi(\tau+1.5) + 2\Pi(t/2) + \Pi(\tau-1.5) + \delta(\tau-2)]\cos(t-\tau)d\tau$
- Από εδώ μπορεί κανείς να προχωρήσει με 2 τρόπους:
  - Να λύσει απευθείας το ολοκλήρωμα.
  - Να χρησιμοποιήσει την ιδιότητα:
    $\cos(t) = \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2} \xrightarrow{t\leftarrow t-\tau} \cos(t-\tau) = \frac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}$. Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα όπου $\cos(t-\tau) =$ με το $\frac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}$, προκύπτουν τα εξής:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left(\frac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}\right)d\tau \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j(t-\tau)}d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(t-\tau)}d\tau\right) \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{jt}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\tau}d\tau + e^{-jt}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j\tau}d\tau\right) \xrightarrow[\omega=1]{j\tau=j\omega\tau}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{jt}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau + e^{-jt}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(-\omega)\tau}d\tau\right) \Rightarrow$$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $y(t) = x(t) * \cos(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) =$
$\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau+2) + \Pi(\tau+1.5) + 2\Pi(t/2) + \Pi(\tau-1.5) + \delta(\tau-2)]\cos(t-\tau)d\tau$
- Από εδώ μπορεί κανείς να προχωρήσει με 2 τρόπους:
  - Να λύσει απευθείας το ολοκλήρωμα.
  - Να χρησιμοποιήσει την ιδιότητα:
    $\cos(t) = \dfrac{e^{jt}+e^{-jt}}{2} \xrightarrow{t \leftarrow t-\tau} \cos(t-\tau) = \dfrac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}$. Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα όπου $\cos(t-\tau) =$ με το $\dfrac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}$, προκύπτουν τα εξής:
    $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left(\dfrac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}\right)d\tau \Rightarrow$
    $y(t) = \dfrac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j(t-\tau)}d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(t-\tau)}d\tau\right) \Rightarrow$
    $y(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{jt}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\tau}d\tau + e^{-jt}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j\tau}d\tau\right) \xrightarrow[\omega=1]{j\tau=j\omega\tau}$
    $y(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{jt}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau + e^{-jt}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(-\omega)\tau}d\tau\right) \Rightarrow y(t) =$
    $\dfrac{1}{2}\left(e^{jt}X(\omega) + e^{-jt}X(-\omega)\right)$

Λύση 2ου ερωτήματος

- $y(t) = x(t) * \cos(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\cos(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) =$
$\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau+2) + \Pi(\tau+1.5) + 2\Pi(t/2) + \Pi(\tau-1.5) + \delta(\tau-2)]\cos(t-\tau)d\tau$
- Από εδώ μπορεί κανείς να προχωρήσει με 2 τρόπους:
  - Να λύσει απευθείας το ολοκλήρωμα.
  - Να χρησιμοποιήσει την ιδιότητα:
    $\cos(t) = \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2} \xrightarrow{t\leftarrow t-\tau} \cos(t-\tau) = \frac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}$. Αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα όπου $\cos(t-\tau) =$ με το $\frac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}$, προκύπτουν τα εξής:
    $$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left(\frac{e^{j(t-\tau)}+e^{-j(t-\tau)}}{2}\right)d\tau \Rightarrow$$
    $$y(t) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j(t-\tau)}d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(t-\tau)}d\tau\right) \Rightarrow$$
    $$y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{jt}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\tau}d\tau + e^{-jt}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{j\tau}d\tau\right) \xrightarrow[\omega=1]{j\tau=j\omega\tau}$$
    $$y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{jt}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau + e^{-jt}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(-\omega)\tau}d\tau\right) \Rightarrow y(t) =$$
    $$\frac{1}{2}\left(e^{jt}X(\omega) + e^{-jt}X(-\omega)\right) \xrightarrow{\omega=1} y(t) = \frac{1}{2}\left(e^{jt}X(1) + e^{-jt}X(-1)\right)$$

Λύση 2ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $X(\omega) = 2\cos 2\omega + \dfrac{2}{\omega}\sin 2\omega + \dfrac{2}{\omega}\sin\omega \Rightarrow X(1) = 2\cos 2 + 2\sin 2 + 2\sin 1$

Λύση 2ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $X(\omega) = 2\cos 2\omega + \frac{2}{\omega}\sin 2\omega + \frac{2}{\omega}\sin\omega \Rightarrow X(1) = 2\cos 2 + 2\sin 2 + 2\sin 1$
- $X(-1) = 2\cos(-2) + \frac{2}{-1}\sin(-2) + \frac{2}{-1}\sin(-1) \Rightarrow X(-1) =$
  $2\cos 2 + 2\sin 2 + 2\sin 1 = X(1)$

Λύση 2ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $X(\omega) = 2\cos 2\omega + \frac{2}{\omega}\sin 2\omega + \frac{2}{\omega}\sin\omega \Rightarrow X(1) = 2\cos 2 + 2\sin 2 + 2\sin 1$
- $X(-1) = 2\cos(-2) + \frac{2}{-1}\sin(-2) + \frac{2}{-1}\sin(-1) \Rightarrow X(-1) = 2\cos 2 + 2\sin 2 + 2\sin 1 = X(1)$
- $y(t) = X(1)\frac{(e^{jt} + e^{-jt})}{2}$

Λύση 2ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $X(\omega) = 2\cos 2\omega + \frac{2}{\omega}\sin 2\omega + \frac{2}{\omega}\sin\omega \Rightarrow X(1) = 2\cos 2 + 2\sin 2 + 2\sin 1$
- $X(-1) = 2\cos(-2) + \frac{2}{-1}\sin(-2) + \frac{2}{-1}\sin(-1) \Rightarrow X(-1) = 2\cos 2 + 2\sin 2 + 2\sin 1 = X(1)$
- $y(t) = X(1)\frac{(e^{jt} + e^{-jt})}{2}$

Λύση 2ου ερωτήματος (Συνέχεια)

- $X(\omega) = 2\cos 2\omega + \frac{2}{\omega}\sin 2\omega + \frac{2}{\omega}\sin\omega \Rightarrow X(1) = 2\cos 2 + 2\sin 2 + 2\sin 1$
- $X(-1) = 2\cos(-2) + \frac{2}{-1}\sin(-2) + \frac{2}{-1}\sin(-1) \Rightarrow X(-1) = 2\cos 2 + 2\sin 2 + 2\sin 1 = X(1)$
- $y(t) = X(1)\frac{(e^{jt} + e^{-jt})}{2} \Rightarrow y(t) = (2\cos 2 + 2\sin 2 + 2\sin 1)\cos t$